28 Gennaio 2018

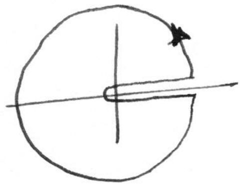
1) $$I = \int_0^{\pi/2} dx \, \frac{\sqrt{\tan x}}{1+\cos^2 x}$$

poniamo $t = \tan x \Rightarrow \cos^2 x = \dfrac{1}{1+t^2}$, $dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$

per ottenere

$$I = \int_0^{\infty} dt \, \frac{\sqrt{t}}{2+t^2}$$

A questo punto si può proseguire in modo abituale con la tecnica del "key-hole"



(si veda il testo)

2) $$\sum_0^{\infty} \cos(\alpha k)\, z^k \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

la formula $R^{-1} = \overline{\lim} \, |c_n|^{1/n} = \overline{\lim}_k \, |\cos \alpha k|^{1/k}$ non è immediatamente decisiva visto il carattere oscillante di $|\cos \alpha k|$. E' chiaro comunque che

$$R^{-1} \leq 1 \Rightarrow R \geq 1.$$

Aggiriamo il problema dello studio di una classe limite facendo il ragionamento che segue, da cui seguirà che $R = 1$.

[redacted]

Notiamo che $\cos(\alpha k) = \frac{e^{i\alpha k} + e^{-i\alpha k}}{2}$; quindi per $|z| < 1$

è vero che

$$\sum_0^\infty \cos(\alpha k) z^k = \frac{1}{2} \sum_0^\infty e^{i\alpha k} z^k + \frac{1}{2} \sum_0^\infty e^{-i\alpha k} z^k$$

perché le due serie a destra sono convergenti. Quindi

per $|z| < 1$

$$\sum_0^\infty \cos(\alpha k) z^k = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - e^{i\alpha} z} + \frac{1}{2} \frac{1}{1 - e^{-i\alpha} z}$$

chiediamoci ora se la serie a sx potrebbe avere un raggio di convergenza maggiore di 1.

Poiché una serie di potenze descrive una funzione olomorfa nel suo cerchio di convergenza, se ciò fosse si avrebbe per conseguenza che dovrebbe esistere una funzione olomorfa in un cerchio con $R > 1$, uguale al membro di destra per $|z| < 1$.

ma la funzione a destra ha due poli, in $z = e^{\pm i\alpha}$, quindi questo non può essere! Perciò $R = 1$.

3) $\hat{P} f = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} dy\, xy(3 + 5xy) f(y)$

Potremmo, ciecamente, verificare con un po' di pazienza $\hat{P} = \hat{P}^\dagger$ e $\hat{P}^2 = \hat{P}$. Si può procedere più speditamente se si osserva che

$$\frac{1}{2}\, xy\,(3+5xy) = \frac{1}{2}\, 3xy + \frac{5}{2}\, x^2 y^2$$

$$= u_1(x)\, u_1(y) + u_2(x)\, u_2(y) \quad \text{con}$$

$$u_1(x) = \sqrt{\frac{3}{2}}\, x \quad , \quad u_2(x) = \sqrt{\frac{5}{2}}\, x^2$$

notiamo adesso che u_1 è dispari mentre u_2 è pari, quindi $(u_1, u_2) = 0$. Se è vero che $\hat{P}$ è un proiettore occorre che $\sqrt{\frac{3}{2}}$ e $\sqrt{\frac{5}{2}}$ sono proprio i coefficienti di normalizzazione opportuni:

$$\int_{-1}^{1} dx\, x^2 = \left.\frac{x^3}{3}\right|_{-1}^{1} = \frac{2}{3} \qquad \int_{-1}^{1} (x^2)^2\, dx = \left.\frac{x^5}{5}\right|_{-1}^{1} = \frac{2}{5}$$

in effetti è vero. Quindi $\hat{P}$ è il proiettore il cui spazio di proiezione è generato dalla base ortonormale

$$\psi_1(x) = \sqrt{\frac{3}{2}}\, x \quad , \quad \psi_2(x) = \sqrt{\frac{5}{2}}\, x^2 .$$

Domanda ii)

$$\exp \lambda \hat{P} = \mathbb{1} + \sum_{1}^{\infty} \frac{\lambda^n \hat{P}^n}{n!} = \mathbb{1} + \hat{P} \sum_{1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} = \mathbb{1} + (e^{\lambda} - 1)\hat{P}$$

dove abbiamo usato l'idempotenza

$$e^{\lambda \hat{P}}\, u_a = a\, u_a \Rightarrow (e^{\lambda} - 1)\, \hat{P} u_a = (a-1)\, u_a$$

gli autovettori di $e^{\lambda \hat{P}}$ sono autovettori di $\hat{P}$, autovettori che ben conosciamo se $\hat{P} u_a = 0$ allora $a = 1$

se $P u_a = 1$ (quindi $u_a = \alpha \psi_1 + \beta \psi_2$)

allora $a = e^{\lambda}$

Quindi $e^{\lambda P}$ ha un autospazio bidimensionale relativo all'autovalore e^{λ}, ed un autospazio ∞-dimensionale, al primo ortogonale, relativamente all'autovalore 1.

4) $L_1(\mathbb{R})$ non e' uno spazio di Hilbert.

Poiché L_1 con la sua norma e' completo, occorre mostrare che tale norma non deriva da alcun prodotto interno. Sappiamo che occorre mostrare che non e' verificata l'uguaglianza del parallelogramma:

$$\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 = 2\left(\|f\|^2 + \|g\|^2\right)$$

cioè non e' verificata per qualche f e qualche g, (per altre magari lo sarà).

Il "succo" dell'esercizio consiste nel trovare esempi semplici, per cui gli integrali coinvolti siano facili da calcolare. Cominciamo allora "per semplicità" ad assumere f e g a valori reali e positivi. Allora

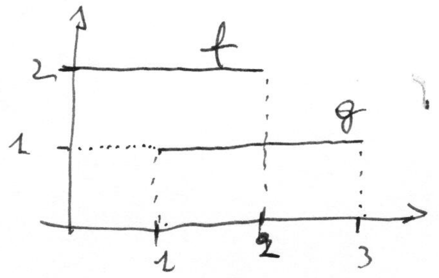
$$\|(f+g)\|^2_{L_1} = \left(\int (f+g)\right)^2 = \left(\int f + \int g\right)^2 \quad (1)$$

consideriamo ora

$\|f-g\|^2_{L_1} = \left(\int |f-g|\right)^2$. Se fosse $\forall x$ $f \geq g$ (o viceversa) avrei $\left(\int f - \int g\right)^2$ (2) sommando (1) + (2)

verificherei l'uguaglianza del parallelogramma!
Per trovare un semplice controesempio occorre quindi
che non sia vero $f \geq g \ \forall x$.

prendiamo allora ad es.



si ottiene $\| f+g \|^2 = 36$ $\quad \| f-g \|^2 = 16$

$\| f \|^2 = 16$ $\quad \| g \|^2 = 4$

e l'uguaglianza è violata.

5a) $\quad f_\beta = \dfrac{1}{\exp \beta x + 1}$ in S' $\quad f_\beta \to \Theta(-x)$ per $\beta \to \infty$.

Infatti:

$f_\beta \to \Theta(-x)$ puntualmente e inoltre $|f_\beta| \leq 1 \ \forall x$;

allora su $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{e^{\beta x}+1} \varphi(x)\, dx$ $\qquad |\varphi(x)| \in L_1$ è

la maggiorante integrabile che permette di usare il T della

conv. dominata.

5b) $e^{-|x|}$ è pari $\Rightarrow$ espansione in serie di coseni

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\, e^{-|x|}\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos nx\, e^{-x}\,dx = \frac{2}{\pi}\,\mathrm{Re}\int_0^{\pi} e^{inx-x}\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\,\frac{1-(-)^n e^{-\pi}}{1+n^2}$$. Da cui

$$e^{-|x|} = \frac{1-e^{-\pi}}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_1^{\infty}\frac{1-(-)^n e^{-\pi}}{1+n^2}\cos nx$$

$$= \frac{1-e^{-\pi}}{\pi} + \frac{2}{\pi}S_1 - \frac{2e^{-\pi}}{\pi}S_2 \quad (1)$$ con (entrambe convergenti uniformemente)

$$S_1 = \sum_1^{\infty}\frac{\cos nx}{1+n^2} \qquad S_2 = \sum\frac{(-)^n\cos nx}{1+n^2}$$

L'ultima domanda richiede il valore di $S_1(0)$.

Ponendo $x=0$ nella (1) otteniamo

$$1 = \frac{1-e^{-\pi}}{\pi} + \frac{2}{\pi}S_1(0) - \frac{2}{\pi}e^{-\pi}S_2(0) \qquad (2)$$

ponendo invece $x=\pi$ otteniamo

$$e^{-\pi} = \frac{1-e^{-\pi}}{\pi} + \frac{2}{\pi}S_1(\pi) - \frac{2}{\pi}e^{-\pi}S_2(\pi) = \frac{1-e^{-\pi}}{\pi} + \frac{2}{\pi}S_2(0) - \frac{2}{\pi}e^{-\pi}S_1(0) \quad (3)$$

la (2) e la (3) fanno sistema per determinare $S_1(0)$ e $S_2(0)$.