

## Metodi Matematici della Fisica

### 26 settembre 2017

**Esercizio 1)** Si determini la più generale trasformazione di Möbius che soddisfa i requisiti:

- i) di avere  $z = 0$  e  $z = 1$  come punti fissi;
- ii) di trasformare in rette la circonferenza unitaria e la bisettrice del primo e terzo quadrante.

**Esercizio 2)** 1) Determinare lo sviluppo di Laurent in  $z = i$  della funzione  $(1 + z^2)^{-1}$ .

- 2) Se  $z$  è reale, in quale intervallo la serie converge?

**Esercizio 3)** Si calcoli l'integrale

$$\int_0^\pi dx \frac{\cos(3x)}{5 + 4 \cos x}$$

**Esercizio 4)** Sia  $A = -A^T$  una matrice reale antisimmetrica  $3 \times 3$  non nulla.

- 1) Mostrare che  $A$  ha un autovalore nullo, due autovalori immaginari puri, e che gli autovettori sono ortogonali in  $\mathbb{C}^3$ .
- 2) Calcolare la matrice  $\exp A$ , con

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

**Esercizio 5)** Si consideri lo spazio di Hilbert  $\ell_2(\mathbb{C})$ .

- 1) Per quali  $z \in \mathbb{C}$  la successione  $\{nz^n\}$  è un elemento dello spazio?
- 2) Detta  $D$  la regione dei valori di cui sopra, se  $\{c_n\}$  è un generico elemento dello spazio, mostrare che la serie di potenze  $\sum_{n=0}^\infty nc_n z^n$  è sempre convergente in  $D$ .