

Metodi Matematici della Fisica
19 luglio 2017

i) Solo una tra le seguenti tre funzioni può essere la parte reale di una funzione intera. Quale?

$$f_1(x, y) = x^2 + y^2 - 3x, \quad f_2(x, y) = \frac{x^3 + xy^2 + x^2 - y^2}{(1+x)^2 + y^2},$$

$$f_3(x, y) = \frac{x \sin x \cosh y + y \cos x \sinh y}{x^2 + y^2}$$

ii) Solo una tra le seguenti matrici 3×3 rappresenta un proiettore su un sottospazio di dimensione 2, quale?

$$\mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{P}_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Esercizio 1) Si calcoli

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{1+x^2} dx$$

Esercizio 2) Nello spazio lineare complesso delle matrici $n \times n$ si consideri l'applicazione che ad una coppia di matrici A e B associa il numero $(B, A) \equiv \text{tr}(AB^\dagger)$. Si dimostri che tale applicazione definisce un prodotto interno. Quale sarebbe una base ortogonale in questo spazio?

Se un operatore lineare è definito tramite la formula $\mathcal{A} : B \rightarrow A^\dagger B A$, si determini \mathcal{A}^\dagger . Se la matrice A è unitaria, determinare la norma (sup) di \mathcal{A} .

Esercizio 3a) Si consideri sullo spazio di Hilbert $\ell_2(\mathbb{C})$ l'operatore lineare H :

$$\mathcal{D}(H) = \{ \{c_n\} : \sum_0^\infty |(n + \frac{1}{2})c_n|^2 < \infty \}, \quad H : \{c_n\} \rightarrow \{(n + \frac{1}{2})c_n\}.$$

Si dimostri che $\mathcal{D}(H)$ è un sottospazio lineare e si risponda alle seguenti domande: 1) H è invertibile? 2) H è limitato? 3) H è simmetrico? 4) H è autoaggiunto?

Esercizio 3b) Si consideri su $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ il funzionale $F_n : \langle F_n | \varphi \rangle = \int_0^\infty dx \sin^2(nx) \varphi(x)$.

Si dimostri che definisce una distribuzione temperata e se ne calcoli la derivata. Si determini il limite $n \rightarrow \infty$ della successione F_n in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.