Metodi Matematici della Fisica
20 febbraio 2017

i) Si consideri la funzione $g(x, y) = (x-y+x^2-y^2)+i(x+y+6xy-2x^2-2y^2)$. Per quali punti del piano essa risulta essere una funzione olomorfa?

ii) Calcolare il raggio di convergenza della somma

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\exp(an) + 1}, \qquad a \in \mathbb{C}$$

iii) In uno spazio di Hilbert n-dimensionale, quale relazione sussiste tra la traccia di un proiettore ortogonale e la dimensione del suo range?
Scrivere le più generali matrici reali 3×3 che rappresentino proiettori ortogonali su $\mathbb{R}^3$, aventi rispettivamente traccia uguale a 1,2,3.

AVVERTENZA: due degli esercizi i,ii,iii devono avere valutazione sufficiente, altrimenti la prova è comunque valutata insufficiente.

Esercizio 1) Calcolare l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, x\, e^{-x^2+(1+i)x}.$$

Esercizio 2) Si consideri su $\mathrm{L}^2(Q)$, dove Q è il quadrato $[0, 1]\times[0, 1]$, l'operatore lineare

$$(Af)(x, y) = (x + iy)f(x, y)$$

1) mostrare che A è limitato;
2) calcolare la norma $\|A\|$;
3) calcolare $A^\dagger$.

Esercizio 3) Si consideri la mappa $F\varphi = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \varphi(n)$, $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.
1) Mostrare che la somma esiste e definisce una distribuzione temperata.
2) Determinare la trasformata di Fourier di F (è sufficiente rappresentarla come una serie).