26-9-2017

$z=0$ e $z=1$ punti fissi

$$w=\frac{az+b}{cz+d} \qquad w(0)=\frac{b}{d}=0 \Rightarrow b=0 \quad (e\ d\neq 0)$$

$$w=\frac{az}{cz+d} \quad ; \quad w(1)=\frac{a}{c+d}=1 \Rightarrow a=c+d.$$

Quindi $\quad w=\dfrac{c+d}{cz+d}\,z.$

se la circonf. unitaria deve diventare una retta occorre che un suo punto vada all' ∞. Ovvero che per qualche ϑ

$$w(e^{i\vartheta})=\infty \Rightarrow \quad ce^{i\vartheta}+d=0 \quad d=-ce^{i\vartheta}$$

$$w=\frac{c(1-e^{i\vartheta})\,z}{c(z-e^{i\vartheta})}=\frac{1-e^{i\vartheta}}{z-e^{i\vartheta}}\,z$$

stesso ragionamento per la bisettrice I e III quadrante.
I suoi punti possono parametrizzarsi come $x\,e^{i\pi/4}$ $\quad x\in\mathbb{R}$,
occorre allora che per qualche x

$$x\,e^{i\pi/4}-e^{i\vartheta}=0 \quad\Rightarrow\quad e^{i(\vartheta-\frac{\pi}{4})}\in\mathbb{R}.$$

$$\vartheta-\frac{\pi}{4}=k\pi \qquad k\in\mathbb{Z} \quad\Rightarrow\quad \vartheta=\frac{\pi}{4} \qquad \vartheta=\frac{\pi}{4}-\pi$$

(tutte le altre sono equivalenti).

Quindi $\quad w=\dfrac{1\mp e^{i\pi/4}}{z\mp e^{i\pi/4}}\,z \quad$ sono le due soluzioni

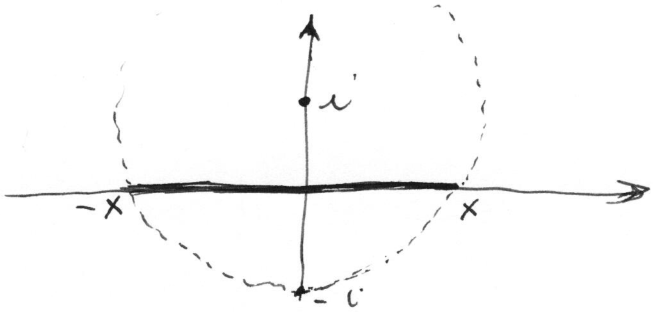
2) $$\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{(z-i)(z+i)} =$$

$$= \frac{1}{z-i} \; \frac{1}{z-i+2i} = \frac{1}{2i} \; \frac{1}{z-i} \; \frac{1}{1+\frac{z-i}{2i}}$$

$$= \frac{1}{2i} \; \frac{1}{z-i} \; \frac{1}{1-\frac{i(z-i)}{2}} = \frac{1}{2i} \; \frac{1}{z-i} \sum_0^{\infty} \left(i \, \frac{z-i}{2}\right)^n$$

la serie converge per $|z-i| < 2$.

Quindi se



l'intercetto della circonf. con l'asse reale si ha in due punti simmetrici rispetto all'origine, in $x = \pm\sqrt{2^2-1} = \pm\sqrt{3}$

La serie converge quindi per $-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$.

3) $$I = \int_0^{\pi} dx \, \frac{\cos 3x}{5+4\cos x} = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dx \, \frac{\cos 3x}{5+4\cos x} = \frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi} dx \, \frac{e^{i3x}+e^{-i3x}}{5+2(e^{ix}+e^{-ix})}$$

si riporta ad un integrale sulla circ. unitaria $z = e^{ix}$:

$$I = \frac{1}{4i} \oint_{\gamma} dz \, \frac{1+z^6}{z^3(2z^2+5z+2)}$$

poli semplici in: $z_2 = -\frac{1}{2}$, $z_3 = -2$

polo triplo in: $z_1 = 0$

solo z_1 e z_2 hanno $|z|<1$ e contribuiscono ad I dei residui.

scritto $2z^2+5z+2 = 2(z+1/2)(z+2)$ abbiamo

$$R_2 = \frac{1}{4i} \; \frac{1+\left(\frac{1}{2}\right)^6}{\left(-\frac{1}{2}\right)^3 \cdot 2\left(3/2\right)} = \frac{i}{4} \cdot \frac{65}{24}$$

Per il residuo del polo triplo occorre il termine in z^2 dello sviluppo di Taylor di (il numeratore ovviamente (in z^6) non può contribuire)

$$\frac{1}{2+5z+2z^2} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1+\frac{5}{2}z+z^2} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{5}{2}z-z^2+\frac{25}{4}z^2+\dots\right)$$

interessa $\frac{1}{2}\left(\frac{25}{4}-1\right)z^2 = \frac{21}{8}z^2$

Quindi $R_1 = \frac{1}{4i}\,\frac{21}{8}$. Per il T dei residui perciò

$$I = 2\pi i\left(\frac{1}{4i}\,\frac{21}{8}+\frac{i}{4}\,\frac{65}{4}\right) = -\frac{109}{16}\pi =$$

4) $\begin{cases} A = -A^T \\ A \text{ reale} \end{cases}$ consideriamo allora $B = iA$

otteniamo $B = B^{\dagger}$: è hermitiana $M\times M$

per il T. spettrale per le matrici hermitiane B ha M autovalori reali (se contati con le proprie molteplicità) e sappiamo che sono mutuamente ortogonali (per quelli relativi ad un medesimo autovalore li possiamo scegliere così, per gli altri è automatico). Quindi

$$Bu_1=\lambda_1 u_1\,,\quad Bu_2=\lambda_2 u_2\,,\quad Bu_3=\lambda_3 u_3\,,\ \dots\ Bu_M=\lambda_M u_M$$

notiamo che $\overline{B} = -B$ e quindi da

$Bu=\lambda u$ otteniamo $\overline{B}\,\overline{u}=\lambda\overline{u} \Rightarrow B\overline{u}=-\lambda\overline{u}$

Quindi ad ogni autovalore $\lambda \neq 0$ corrisponde un altro autovalore $-\lambda$.

Nel caso $A = 3\times 3$, se $A \neq 0$, abbiamo quindi avere l'~~autovettore~~ autovalore nullo, e poi una coppia $\lambda, -\lambda$.

I tre autovettori sono per questo fatto mutuamente ortogonali.

Per la matrice A assegnata $\det(\lambda - A) = \lambda(\lambda^2+5) \Rightarrow$

$\lambda = 0$ $\quad \lambda_+ = i\sqrt{5}$ e $\lambda_- = -i\sqrt{5}$ e corrispond. $\underline{u}_0, \underline{u}_+, \underline{u}_-$.

Prendendo gli $\underline{u}$ di norma unitaria calcoliamo

$$u_0 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} \qquad u_+ = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}1\\i\sqrt{5}\\-2\end{pmatrix} \qquad u_- = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}1\\-i\sqrt{5}\\2\end{pmatrix}$$

$\forall\, \underline{v} \in \mathbb{C}^3 \qquad \underline{v} = (\underline{u}_0, \underline{v})\, u_0 + (\underline{u}_+, \underline{v})\, \underline{u}_+ + (\underline{u}_-, \underline{v})\, \underline{u}_-$

e quindi

$$e^A \underline{v} = (u_0, \underline{v})\, u_0 + e^{i\sqrt{5}} (\underline{u}_+, \underline{v})\, \underline{u}_+ + e^{-i\sqrt{5}} (\underline{u}_-, \underline{v})\, \underline{u}_-$$

$$(e^A)_{ij}\, v_j = \left(u_{0i}\, \bar{u}_{0j} + e^{i\sqrt{5}} u_{+i}\, \bar{u}_{+j} + e^{-i\sqrt{5}} u_{i-}\, \bar{u}_{-j}\right) v_j$$

da cui leggiamo $(e^A)_{ij}$.

5) $c : c_n = n z^n \qquad c \in l_2(\mathbb{C})$?

$$\sum_1^\infty |c_n|^2 = \sum n^2 |z|^{2n}$$ quando converge?

Riportiamoci a un ambito familiare.

consideriamo le serie di potenze $\sum_1^\infty w^n$

converge per $|w|<1$ e diverge per $|w|>1$

$$\sum n^2 w^n = \left(w \frac{d}{dw}\right)^2 \sum w^n$$

e sappiamo che la serie derivata ha lo stesso raggio di convergenza. Quindi per $|z|<1 \quad c \in l_2(\mathbb{C})$

e certamente per $|z|>1 \quad c \notin l_2(\mathbb{C})$, per $|z|=1 \quad \sum_1^\infty n^2 = \infty$

consideriamo per la seconda domanda la serie

$$\sum_1^\infty n c_n z^n \qquad \text{con} \qquad c \in \ell^2(\mathbb{C}), \text{ e } |z|<1$$

per quanto discusso nel primo punto.

Per la disuguaglianza di H.M.

$$\sum |n c_n z^n| \leq \left(\sum |c_n|^2\right)^{1/2} \left(\sum n^2 |z|^{2n}\right)^{1/2} < \infty$$