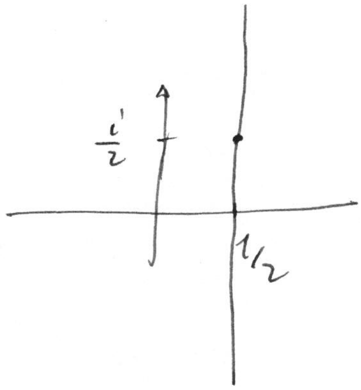
11 Settembre 2017

$$w = \frac{z}{1+z}$$

circonf. $|z|=1$ va in una retta, infatti $z=-1$ ~~[illegible]~~ viene portato all'∞. Quale retta?



$z = 1 \Rightarrow w = 1/2$

$z = i \Rightarrow \frac{i}{1+i} = \frac{1+i}{2}$

è la retta $Re\, z = 1/2$.

asse reale $w(x) = \frac{x}{1+x}$: è sempre un numero reale,

quindi è l'asse reale.

asse immag. $w = \frac{it}{1+it}$ $|w(t)| \lneqq$ cost. $\Rightarrow$ è una circonf.

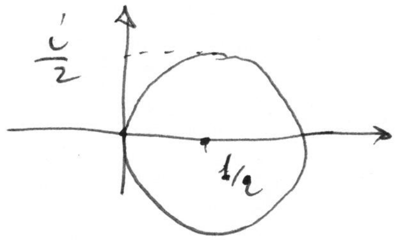
$w(0) = 0$, $w(t=1) = \frac{i}{1+i} = \frac{i(1-i)}{2} = \frac{1+i}{2}$

per il suggerimento che viene dato ($w(\bar{z}) = \overline{w(z)}$) l'immagine di una figura (l'asse immaginario) simmetrica per riflessione rispetto all'asse reale, ha la stessa proprietà. Segue che il centro deve essere nell'asse reale $z_c = x_c$ allora conoscendo il fatto che la circonf. passa per $w=0$ e $w = \frac{1+i}{2}$ il centro sarà in

②

$$x_c^2 = \left| \frac{1+i}{2} - x_c \right|^2 = \left(\frac{1}{2} - x_c\right)^2 + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} - x_c + x_c^2$$

$\Rightarrow \quad x_c = 1/2$



2) $f(z) = \dfrac{1}{(1-\cosh z)^2}$ P.P in $z=0$

$\cosh z$ è una f. pari $\Rightarrow \cosh z = 1 + a_1 z^2 + a_2 z^4 + \dots$

$$\frac{1}{(1-\cosh z)^2} = \frac{1}{(a_1 z^2 + a_2 z^4 + \dots)^2} = \frac{1}{a_1^2 z^4} \frac{1}{\left(1 + \frac{a_2}{a_1} z^2 + \dots\right)^2}$$

$$= \frac{1}{a_1^2 z^4}\left(1 - 2\frac{a_2}{a_1} z^2 + O(z^4)\right) \rightarrow \text{P.P} = \frac{1}{a_1^2 z^4} - \frac{2a_2}{a_1^3} \frac{1}{z^2}$$

calcoliamo ora a_1 e a_2.

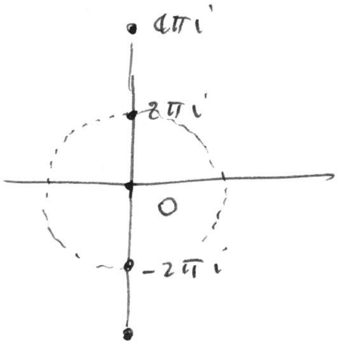
$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \frac{1 + \cancel{z} + \frac{z^2}{2} + \cancel{\frac{z^3}{3!}} + \frac{z^4}{4!} + 1 - \cancel{z} + \frac{z^2}{2} - \cancel{\frac{z^3}{3!}} + \frac{z^4}{4!} + \dots}{2}$$

$$= 1 + \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} + \dots \qquad a_1 = \frac{1}{2} \qquad a_2 = \frac{1}{24}$$

$$\text{P.P} = \frac{4}{z^4} - 2\,\frac{\frac{1}{24}}{1/8}\,\frac{1}{z^2} = \frac{4}{z^4} - \frac{2}{3}\frac{1}{z^2}.$$

Per la seconda domanda consideriamo le singolarità della funzione $f(z)$.

$1 = \cosh z$ ha soluzione $z = 2k\pi i \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$



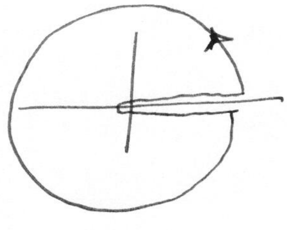
sono dei poli

il raggio di convergenza della parte analitica è quindi 2π.

3)
$$I = \int_0^{\pi/2} dx \, (\tan x)^{1/4}$$
ponendo $t = \tan x$

$$I = \int_0^{\infty} dt \, \frac{t^{1/4}}{1+t^2}$$

A questo punto basta applicare la tecnica del "key hole":



(si veda il testo)

4) Ricordiamo il teorema di inversione in $S(\mathbb{R})$:

$$(\mathcal{F}^{-1} \mathcal{F} \varphi)(x) = \varphi(x)$$
cioè
$$(\mathcal{F}^{-1} \tilde{\varphi})(x) = \varphi(x)$$
ma dalla definizione di $\mathcal{F}^{-1}$

banalmente $(\mathcal{F}^{-1} \tilde{\varphi})(x) = (\mathcal{F} \tilde{\varphi})(-x)$ quindi

$$(\mathcal{F}^2 \varphi)(-x) = \varphi(x) \Rightarrow (\mathcal{F}^2 \varphi)(x) = \varphi(-x)$$

seconda domanda

$$\mathcal{F} P \varphi = -i\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ipx}\varphi'(x)\frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \overset{(1)}{=} \lim_{A\to\infty}(-i)\int_{-A}^{A} e^{-ipx}\varphi'(x)\frac{dx}{\sqrt{2\pi}}$$

$$\lim_{A}\left\{ -i\,\varphi(x)e^{-ipx}\Big|_{-A}^{A} + i\int_{-A}^{A}\varphi(x)(-ip)\,e^{-ipx}\frac{dx}{\sqrt{2\pi}}\right\}$$

$$\overset{(1)}{=} p\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\,e^{-ipx}\frac{dx}{\sqrt{2\pi}} = p\,\tilde{\varphi}(p) = (Q\mathcal{F}\varphi)(p)$$

in (1) abbiamo usato il T. conv. dominata. Quindi $FP = QF$.

calcoliamo ora $[F, P^2+Q^2]$

$$[F, P^2+Q^2] = \underset{\sim}{FP^2} + FQ^2 - P^2F - \underset{\sim}{Q^2F}$$

ma $FP^2 = FPP = QFP = Q^2F$. I termini con $\sim$ quindi si elidono. Rimaniamo con

$$[F, P^2+Q^2] = FQ^2 - P^2F$$

$$FQ^2 - P^2F = (FQ^2F - P^2F^2)F^{-1} = (FFP^2 - P^2F)F^{-1}$$

$$= (\mathcal{J}P^2 - P^2\mathcal{J})F^{-1}$$

dove $\mathcal{J}$ è l'op. di inversione $(\mathcal{J}\varphi)(x) = \varphi(-x)$

(o "parità")

ma $P^2\mathcal{J}\varphi = \frac{d^2}{dx^2}\varphi(-x) = \frac{d^2}{d(-x)^2}\varphi(-x) = \mathcal{J}P^2\varphi$

e quindi $FQ^2 - P^2F = 0 \Rightarrow [F, P^2+Q^2] = 0$

5) $U_\alpha \{c_n\} \longmapsto \{e^{-in\alpha} c_n\}$

sono op. unitari? $\|U_\alpha c\| = \sum |e^{-in\alpha} c_n|^2 = \sum |c_n|^2 = \|c\|$

e' isometrico, inoltre $\forall \{c_n\} \in \ell^2(\mathbb{C})$

$$c_n = e^{-in\alpha} d_n \qquad \left(\text{con } \{d_n\} = \{e^{in\alpha} c_n\} \in \ell_2(\mathbb{C})\right)$$

cioe' $R(U_\alpha) = \ell_2(\mathbb{C})$. Quindi U_α e' unitario

gr. abeliano: $(U_\alpha U_\beta c)_n = \{U_{\alpha+\beta} c\}_n$ ovvio.

forte continuità: occorre mostrare che $\lim_{\alpha \to 0} U_\alpha c = c$

cioe' $\lim_{\alpha \to 0} \|U_\alpha c - c\| = \lim_{\alpha \to 0} \sum |(e^{-in\alpha} - 1) c_n|^2 = 0$. (1)

ma $|e^{-in\alpha} - 1|^2 |c_n|^2 \leq 4 |c_n|^2$ da cio' segue che la

convergenza e' uniforme in α, segue che $\sum |e^{-in\alpha} - 1|^2 |c_n|^2$ e'

una funzione continua in α, e quindi la (1) e' vera.

Generatore: Ricordiamo preventivamente il T di Stone

$$D\hat{G} \equiv \{x : \text{esiste } \lim_{\alpha \to 0} \frac{U_\alpha x - x}{\alpha}\}$$

se $x \in D\hat{G}$ $\qquad \hat{G} x \equiv i \lim_{\alpha \to 0} \frac{U_\alpha x - x}{\alpha}$

$\hat{G}$ risulta essere un operatore, in generale non limitato,

ma autoaggiunto

l'intuito ci dice che in $\ell^2(\mathbb{C})$, se $\sum |n c_n|^2 < \infty$

$$\lim_{\alpha \to 0} \left\{ \frac{e^{-in\alpha} c_n - c_n}{\alpha} + i n c_n \right\} = 0$$

cioè

$$\lim_{\alpha \to 0} \sum_{1}^{\infty} \left| \frac{e^{-in\alpha} - 1 + i n \alpha}{\alpha} c_n \right|^2 = 0. \quad (2)$$

osserviamo che $\left| \frac{e^{-in\alpha} - 1 + in\alpha}{\alpha} c_n \right|^2 = \left| \frac{e^{-in\alpha} - 1 + in\alpha}{n\alpha} n c_n \right|^2$

$$\leq \sup_{\beta} \left| \frac{e^{-i\beta} - 1 + i\beta}{\beta} \right| |n c_n|^2 \leq C |n c_n|^2$$

se allora $\sum |n c_n|^2 < \infty$ si trova la convergenza è uniforme e quindi la (2) è vera. Se sapessimo dimostrare che il limite esiste, soltanto per le successioni che soddisfano $\sum |n c_n|^2 < \infty$ avremmo finito per il teorema di Stone.

Per adesso possiamo affermare che l'op.

$$\tilde{G}, \begin{cases} D\tilde{G} = \{(c_n) : \sum |n c_n|^2 < \infty\} \\ (\tilde{G} c)_n = -i n c_n \end{cases}$$

è contenuto nel generatore:

$$\tilde{G} \subset \hat{G}.$$

Dimostriamo però che l'op. $\tilde{G}$ è autoaggiunto. Intanto è definito densamente perché, ad es., tutte le successioni con solo un numero finito di elementi non nulli, certamente denso, fa parte di $D\tilde{G}$.

è inoltre simmetrico. Siano infatti $\{c_n\}$ e $\{d_n\}$ in $\hat{\mathcal{D}}(\tilde{G})$

allora $(d, \tilde{G} c) = \sum \overline{d_n}(-i n c_n) = \sum \overline{(-i n d_n)}\, c_n$

$= (\tilde{G} d, c)$.

Quindi $\mathcal{D}(\tilde{G}) \subset \mathcal{D}(\tilde{G}^+)$

mostriamo ora che $\mathcal{D}\tilde{G}^+ \subset \mathcal{D}\tilde{G}$. (e quindi $\tilde{G} = \tilde{G}^+$)

sia $\{d_n\} \in \mathcal{D}\tilde{G}^+$, questo comporta che esiste

una successione $\{d'_n\} \in l_2(\mathbb{C})$ tale che

$$(d, \tilde{G} c) = (d', c) \quad \forall \{c_n\} \in \mathcal{D}\tilde{G}.$$

cioè $\sum_n \overline{d_n}(-i n c_n) = \sum_n \overline{d'_n} c_n \quad \forall c_n : \sum |n c_n|^2 < \infty$

consideriamo allora il caso particolare delle $\{c_n\}$ con un solo elemento non nullo: $c_n^{(m)} = \delta_{n,m}$. La condizione precedente dà $\overline{d_m}(-im) = \overline{d'_m}$

d'altra parte la successione d' è in $l_2(\mathbb{C}) \Rightarrow \sum_m |d'_m|^2 < \infty$

cioè $\sum |m d_m|^2 < \infty$, cioè $d \in \mathcal{D}\tilde{G} \Rightarrow \mathcal{D}\tilde{G}^+ \subset \mathcal{D}\tilde{G}$.

Adesso sappiamo che $\tilde{G}$ è autoaggiunto, e $\tilde{G} \subset G$

dove G è il generatore, autoaggiunto di cui al teorema di Stone.

Ma da $\tilde{G} \subset \hat{G}$ segue $\tilde{G}^+ \supset \hat{G}^+$ e poiché

$\tilde{G}^+ = \tilde{G}$ e $\hat{G}^+ = \hat{G}$ si ha $\tilde{G} = \hat{G}$