19 Luglio 2017

(i)

Abbiamo tre funzione $f_k(x,y)$ $k=1,2,3$

solo una può essere la parte reale di una funzione intera.

Il senso dell'esercizio è chiaramente che deve essere semplice scartare due funzioni su tre, la restante è per esclusione la risposta. Funzione analitica intera significa funzione olomorfa $\forall z \in \mathbb{C}$, di conseguenza la parte reale ed immaginaria devono essere funzioni di $\mathcal{E}^\infty(\mathbb{R}^2)$. f_2 e f_3 hanno un denominatore che può annullarsi e ci potrebbe quindi essere una singolarità facile da scoprire. f_1 non ha questo problema, ci ricordiamo d'altronde che deve anche valere $\Delta f=0$, e $\Delta f_1 = \left(\partial_x^2 + \partial_y^2\right) f_1 = 4 \neq 0.$ $\Rightarrow$ f_1 è da scartare

Vediamo ora se f_2 e f_3 sono di $\mathcal{E}^\infty(\mathbb{R}^2)$ (se lo fossero entrambe ci sarebbe da controllare poi la condizione sul Δ). Cominciamo dalla più semplice: $f_2(x,y)$. Poniamo $x' = 1+x$, allora

$$f_2(x',y) = \frac{(x'-1)^3 + (x'-1)y^2 + (x'-1)^2 - y^2}{x'^2 + y^2}$$

poniamo $x = \rho\cos\vartheta$ $y = \rho\sin\vartheta$, ci interessa per $\rho \to 0$ il numeratore all'ordine ρ^2. (2)

$$(\rho\cos\vartheta-1)^3+(\rho\cos\vartheta-1)\rho^2\sin^2\vartheta+(\rho\cos\vartheta-1)^2-\rho^2\sin^2\vartheta =$$

$$= -1+3\rho\cos\vartheta-3\rho^2\cos^2\vartheta-\rho^2\sin^2\vartheta+1-2\rho\cos\vartheta+\rho^2\cos^2\vartheta-\rho^2\sin^2\vartheta+O(\rho^3)$$

$$= \rho\cos\vartheta + O(\rho^2)$$

evidentemente <u>non</u> esiste il limite di f_2 per $\rho \to 0$.

Anche f_2 è da ~~scartare~~, la risposta è f_3.

Lo studente può restare perplesso perché forse gli può sembrare strano che in f_3 non ci sia una qualche singolarità in $x=0=y$ (ha cioè il dubbio che il testo sia sbagliato!). Si noti però una sottigliezza del testo, dice: solo una ... <u>può</u> essere la parte reale etc. perché non dice solo una ... <u>è</u> la parte reale etc?

Il punto è che $f_3(x,y) = \mathrm{Re}\left(\frac{\sin z}{z}\right)$

$\frac{\sin z}{z}$ ha una singolarità eliminabile in $z=0$ e, dalla teoria, sappiamo che se definiamo questa funzione valere 1 per $z=0$, il risultato è una funzione olomorfa intera.

ii) le matrici P devono soddisfare le due condizioni $P = P^\dagger$ e $P^2 = \mathbb{1}$ per essere un proiettore, ed inoltre $\mathrm{tr}(P) = \sum_i (P)_{ii} = 2$ per proiettare su un sottospazio di dimensione 2.

Osserviamo allora che $P_4^\dagger \neq P_4$: è quindi da scartare.

$\mathrm{tr}\, P_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 1 \neq 2$ $\quad P_2$ è da scartare.

P_1 e P_3 "passano" l'esame della traccia e dell'hermitianità

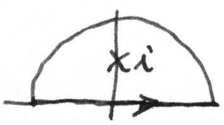
basta calcolare l'elemento "11" di $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^2$

per scoprire che vale $\frac{1}{4} + 1 \neq 1/2$, l'idempotenza è violata:

la risposta è P_3.

1) $$\int_0^{\infty} dx \, \frac{\cos x}{1+x^2} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, \frac{\cos x}{1+x^2} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, \frac{e^{ix}}{1+x^2}$$

a questo punto via Lemma di Jordan



si arriva in breve al risultato

2) $(B, A) = \mathrm{tr}(B^\dagger A)$ è un prodotto interno.

l'unica proprietà non completamente banale è $(A,A) \geq 0$:

$$(A,A) = \mathrm{tr}\, A^\dagger A = \sum_i (A^\dagger A)_{ii} = \sum_{ij} (A^\dagger)_{ij} A_{ji} =$$

$$= \sum_{ij} \bar{A}_{ji} A_{ji} = \sum_{ij} |A_{ji}|^2$$

questa quantità è evidentemente positiva a meno che $A=0$.

Una base ortogonale è costituita dalle N^2 matrici $\{A^{(mn)}\}_{\substack{m=1\ldots N\\ n=1\ldots N}}$ definite da $\left(A^{(mn)}\right)_{ij} = \delta^m_i \delta^n_j$ (dove δ^a_b è la δ di Kronecker):

$$(A^{(mn)}, A^{(pq)}) = \mathrm{tr}\, A^{(mn)\dagger} A^{(pq)} = \sum_{ij} A^{(mn)}_{ji} A^{(pq)}_{ji}$$

$$= \sum_{ij} \delta^m_j \delta^n_i \delta^p_j \delta^q_i = \delta^m_p \delta^n_q .$$

Che $A^{(mn)}$ generino tutto lo spazio è ovvio.

$\mathcal{A}: B \to A^\dagger B A$ calcoliamo l'aggiunto di $\mathcal{A}$

$$(C, \mathcal{A}B) = \mathrm{tr.}(C^\dagger A^\dagger B A) = \mathrm{tr.}(A C^\dagger A^\dagger B)$$

$$= \mathrm{tr}\left[(A C A^\dagger)^\dagger B\right]$$ (abbiamo usato la "ciclicità" della traccia)

l'aggiunto quindi agisce così: $C \to A C A^\dagger$

$\|\mathcal{A}\|$: $\|\mathcal{A}\| = \sup\limits_{\|B\|=1} \|\mathcal{A}B\| = \sup\limits_{\|B\|=1} (\mathcal{A}B, \mathcal{A}B)^{1/2}$

$$= \sup_{\|B\|=1} \left\{\mathrm{tr.}\left((A^\dagger B A)^\dagger A^\dagger B A\right)\right\}^{1/2} = \sup_{\|B\|=1} \left\{\mathrm{tr}\left[A^\dagger B^\dagger A A^\dagger B A\right]\right\}^{1/2} =$$

$$= \sup_{\|B\|=1} \left\{\mathrm{tr.}\, A^\dagger B^\dagger B A\right\}^{1/2} = \sup_{\|B\|=1} \left\{\mathrm{tr.}(A A^\dagger B^\dagger B)\right\}^{1/2} = \sup_{\|B\|=1} \left\{\mathrm{tr}\, B^\dagger B\right\}^{1/2} = 1$$

abbiamo usato l'unitarietà di A e la ciclicità della traccia.

3a) $\ell^2(\mathbb{C})$ $\mathcal{D}\hat{H} \equiv \{(c_n) : \sum_0^\infty |(n+\frac{1}{2})c_n|^2 < \infty\}$

$$(\hat{H}c)_n = (n+\tfrac{1}{2})c_n$$

notiamo che l'operatore coincide (se lo si moltiplica per $\hbar\omega$) con l'op. Hamiltoniano per l'oscillatore armonico nella "rappresentazione di Heisenberg".

- $\mathcal{D}\hat{H}$ è uno spazio lineare: sappiamo infatti che $\ell^2(\mathbb{C})$ è uno spazio lineare, se allora

$$\tilde{c}_n \equiv (n+\tfrac{1}{2})c_n \in \ell_2 \quad e \quad \tilde{d}_n \equiv (n+\tfrac{1}{2})d_n \in \ell_2$$

anche la somma $(n+\frac{1}{2})(c_n+d_n) \in \ell_2$, ovvero

$c_n + d_n \in \mathcal{D}(\hat{H})$ se vi appartengono c_n e d_n.

Analog. per la moltiplicazione per uno scalare.

- $\hat{H}$ è certamente invertibile (iniettivo) infatti se

$$0 = \|\hat{H}c\|^2 = \sum |(n+\tfrac{1}{2})c_n|^2 \quad \text{allora} \quad c_n = 0 \;\forall n \Rightarrow c = 0$$

- $\hat{H}$ non è limitato. consideriamo infatti la famiglia di successioni $c^{(m)}$, definite da $c^{(m)}_n = \delta^m_n$ (δ di Kronecker)

$$\|c^{(m)}\| = 1 \quad \text{ma} \quad \|\hat{H}c^{(m)}\| = (m+\tfrac{1}{2}) \xrightarrow[m\to\infty]{} \infty$$

- $\hat{H}$ è simmetrico. Infatti è densamente definito, il suo dominio contiene ~~[illegible]~~ ad esempio proprio le successioni $c^{(m)}$

che sono una base ortonormale di $l_2(\mathbb{C})$.

esiste quindi $\hat{H}^\dagger$. Siano $d, c \in \mathcal{D}\hat{H}$, allora

$$(d,\hat{H} c) = \sum_0^\infty \bar{d}_n\left(\left(n+\tfrac{1}{2}\right)c_n\right) = \sum_0^\infty \overline{\left(\left(n+\tfrac{1}{2}\right)d_n\right)}\, c_n = (\hat{H} d, c)$$

cioè $\hat{H} \subset \hat{H}^\dagger$.

- autoaggiuntezza di $\hat{H}$: vale.

occorre mostrare $\hat{H}^\dagger \subset \hat{H}$.

Sia allora $d \in \mathcal{D}\hat{H}^\dagger$, allora $\exists\, d' \in l_2(\mathbb{C})$ tale che $\forall c \in \mathcal{D}\hat{H}$ si ha

$$(d, \hat{H} c) = (d', c) \quad (1)$$

mostriamo che se questo è vero allora $d \in \mathcal{D}\hat{H}$.

consideriamo proprio le $c^{(m)} \in \mathcal{D}\hat{H}$ nella (1). Diventa

$$\bar{d}_m \left(m+\tfrac{1}{2}\right) = \bar{d}'_m$$

ma $d' \in l_2(\mathbb{C}) \Rightarrow \sum |d'_m|^2 < \infty \Rightarrow \sum \left|d_m\left(m+\tfrac{1}{2}\right)\right|^2 < \infty$

cioè $d \in \mathcal{D}\hat{H}$.

3b) $\langle F_n | \varphi \rangle = \int_0^\infty dx\, \sin^2(nx)\, \varphi(x) =$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty dx\, 2\sin^2(nx)\,\varphi(x) = -\frac{1}{2}\int_0^\infty dx\, \left(1 - 2\sin^2(nx)\right)\varphi(x) +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_0^\infty dx\, \varphi(x) = -\frac{1}{2}\int_0^\infty dx\, (\cos 2nx)\,\varphi(x) + \frac{1}{2}\int_0^\infty dx\, \varphi(x)$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}\int_0^\infty dx\, \varphi(x)$$ questo per il Lemma di Riemann-Lebesgue