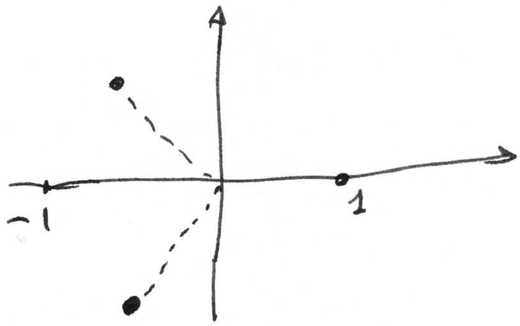
# 27 Giugno 2017

(i)

$$f = \frac{1}{z^3-1} = \sum_0^\infty c_n (z+1)^n$$

• la funzione $f$ ha tre poli del primo ordine nelle tre $\sqrt[3]{1}$, cioè $1$, $e^{i\frac{2\pi}{3}}$ e $e^{i\frac{4}{3}\pi} = e^{-i\frac{2}{3}\pi}$



Noi stiamo facendo lo sviluppo di Taylor di $f$ con centro in $z=-1$, i poli più prossimi distano

$$\left|e^{i\frac{2}{3}\pi}+1\right| = \left\{\left(\cos\frac{2}{3}\pi+1\right)^2 + \operatorname{sen}^2\frac{2}{3}\pi\right\}^{1/2} =$$

$$= \left\{2 + 2\cos\frac{2}{3}\pi\right\}^{1/2} = \left\{2 - 2\cdot\frac{1}{2}\right\}^{1/2} = \sqrt{1} = 1$$

e questo è il raggio di conv. dello sviluppo di Taylor.

• $$\frac{1}{z^3-1} = \frac{1}{(z-1)\left(z-e^{i\frac{2}{3}\pi}\right)\left(z-e^{-i\frac{2}{3}\pi}\right)} =$$

$$= \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-e^{i\frac{2}{3}\pi}} + \frac{C}{z-e^{-i\frac{2}{3}\pi}}$$

$$= \frac{1}{2\left(1+\cos\frac{\pi}{3}\right)}\frac{1}{z-1} - \frac{1}{4\sin^2\frac{\pi}{3}}\left\{\frac{e^{i\pi/3}}{z-e^{-i\frac{2}{3}\pi}} + \frac{e^{-i\pi/3}}{z-e^{i\frac{2}{3}\pi}}\right\}$$

$$= -\frac{1}{4\left(1+\cos\frac{\pi}{3}\right)}\frac{1}{1-\frac{z+1}{2}} +$$

$$+ \frac{1}{4\sin^2\frac{\pi}{3}}\left\{\frac{e^{i\pi/3}}{1+e^{-i\frac{2}{3}\pi}}\frac{1}{1-\frac{z+1}{1+e^{-i\frac{2}{3}\pi}}} + \frac{e^{-i\pi/3}}{1+e^{i\frac{2}{3}\pi}}\frac{1}{1-\frac{z+1}{1+e^{i\frac{2}{3}\pi}}}\right\}$$

$$= -\frac{1}{4\left(1+\cos\frac{\pi}{3}\right)}\sum_0^\infty\left(\frac{z+1}{2}\right)^n + \frac{1}{4\sin^2\frac{\pi}{3}}\frac{e^{i\pi/3}}{1+e^{-i\frac{2}{3}\pi}}\sum_0^\infty\left(\frac{z+1}{1+e^{-i\frac{2}{3}\pi}}\right)^n$$

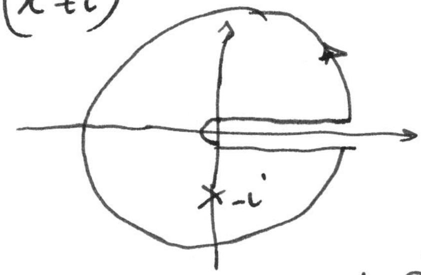
$$+ \frac{1}{4\sin^2\frac{\pi}{3}}\frac{e^{-i\pi/3}}{1+e^{i\frac{2}{3}\pi}}\sum_0^\infty\left(\frac{z+1}{1+e^{i\frac{2}{3}\pi}}\right)^n$$

la prima serie converge per $|z+1|<2$ la seconda e la terza per $|z+1| < |1+e^{i\frac{2}{3}\pi}|$ come atteso.

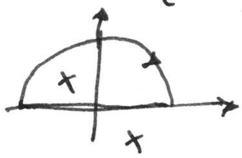
(ii) $M = \begin{pmatrix} 3/2 & z \\ z^* & 1/4 \end{pmatrix}$ non e' un proiettore:

ad esempio la traccia $\frac{3}{2}+\frac{1}{4}$ non e' un numero intero, mentre dovrebbe valere la dimensione dello spazio di proiezione.

1) $I = \int_0^\infty dx \, \frac{\sqrt{x}}{(x+i)^2}$ e' possibile applicare la tecnica del key-hole




(alternativamente ponendo $x = t^2$ trasformare l'integrale in $\int_{-\infty}^{+\infty} dt \, \frac{t^2}{(t^2+i)^2}$ con poli doppi in $\pm e^{-i\pi/4}$ e cammino



)

tenendo conto che per $x>0$ $\sqrt{x-i\varepsilon} = -\sqrt{x}$ si arriva facilmente a

$$2I = 2\pi i \sum{}' \mathrm{Res} = 2\pi i \, \mathrm{Res}(-i)$$

Per calcolare il residuo scriviamo $\sqrt{z} = \sqrt{-i + z + i}$ ed osserviamo che $-i$ e' lontano dal taglio rappresentato in figura, possiamo quindi scrivere lo sviluppo di Taylor.

$$\sqrt{-i + w} = \sqrt{-i} + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{-i}} w + \dots = e^{i\frac{3}{4}\pi} + \frac{1}{2} e^{-i\frac{3}{4}\pi} w + \dots$$

$$= \frac{-1+i}{\sqrt{2}} - \frac{1+i}{2\sqrt{2}}(z+i) + \dots$$ ; da cui il residuo

$$\frac{1}{(z+i)^2}\left(\frac{-1+i}{\sqrt{2}} - \frac{1+i}{2\sqrt{2}}(z+i) + \dots\right) \Rightarrow \mathrm{Res} = -\frac{1+i}{2\sqrt{2}}$$

e quindi $I = -\pi i \, \frac{1+i}{2\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}(1-i)$

Vale la pena di osservare che è possibile effettuare anche il seguente passaggio formale (che prima scriviamo e poi spieghiamo)

$$\sqrt{-i+z+i} = \sqrt{-i\,(1+i(z+i))} \overset{(*)}{=} \sqrt{-i}\;(1+i(z+i))^{1/2} =$$

$$= e^{i\frac{3}{4}\pi}\left(1+\frac{i(z+i)}{2}+\dots\right) =$$

$$= \frac{-1+i}{\sqrt{2}}\left(1+i\,\frac{(z+i)}{2}+\dots\right) = \frac{-1+i}{\sqrt{2}} - \frac{1+i}{2\sqrt{2}}\,(z+i)$$

ottenendo quindi lo stesso risultato. Notiamo però questo: nella formula $\sqrt{1+i(z+i)}$ con $z+i \simeq 0$ siamo proprio sul taglio!! Non posso usare lo sviluppo di Taylor.

Nell'uguaglianza (*) abbiamo usato su tutti le forme $\{1+i(z+i)\}^{1/2}$ dove questa è l'usuale radice quadrata, olomorfa attorno all'asse reale positivo. A sinistra e a destra dell'uguaglianza (*) sono cioè coinvolte diverse scelte "rami" della funzione $\sqrt{\ }$.

<u>OSS</u>: è possibile separare $\int_{-\infty}^{+\infty} dt\, \frac{t^2}{(t^2+i)^2}$ in parti reale e immaginaria, i due integrali che così si ottengono sono di funzioni razionali e quindi, seppur <u>molto</u> laboriosi, di tipo elementare.

2) $$M(x) = \begin{bmatrix} \cosh x & \sinh x \\ \sinh x & \cosh x \end{bmatrix}$$

• usando le proprietà delle funzioni iperboliche si verifica direttamente $M(x)\,M(y) = M(x+y)$ (1)

essendo $M(x)$ invertibile ($\det M = 1$) otteniamo dall'eq. subito $M(0) = 1$ e $M(-x) = M(x)^{-1}$.

• $M(x)$ non è unitario: $M^+(x) = M(x)$ $M^+(x)M(x) \neq \mathbb{I}$.

• Forte continuità:

$$\|(M(x) - \mathbb{I})\underline{u}\|^2 = \underline{u}^+ (M(x) - \mathbb{I})^2 \underline{u} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

in quanto gli elementi di $M(x)$ sono funzioni continue di $x$.

• $M(x) = \exp xT$

per "capire" questa formula, dalla (1) otteniamo

$$\frac{M(x+\Delta x) - M(x)}{\Delta x} = \frac{M(\Delta x) - \mathbb{I}}{\Delta x} M(x) \xrightarrow[\Delta x \to 0]{} T\,M(x) \quad (2)$$

con $T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ottenuto derivando le componenti. La (2) può essere intesa (visto il carattere finito dimensionale di $\mathbb{C}^2$) ad es. in senso elementare, derivando le componenti. Essendo $M(x)$ una matrice, cioè un operatore su uno spazio finito dimensionale la relazione

$$\frac{M(\Delta x)-\mathbb{I}}{\Delta x} \to T$$

resta vera nel senso della norma degli operatori (delle matrici).

Quindi $\dot{M}(x) = T M(x) \; (= M(x) T) \quad (3)$

Durante il corso abbiamo visto, ed usato sovente, il fatto che se $T$ è un op limitato allora $\frac{d}{dx} e^{TX} = T e^{TX}$.

Qui si ribalta la domanda, dal fatto che $M(x)$ risolve la (3) vorremmo dedurre che $M(x) = e^{xT}$.

Più modestamente, nel nostro caso semplice, verifichiamo che ciò è vero. Osserviamo che $T^2 = \mathbb{I}$, allora

$$e^{xT} = \sum_0^\infty \frac{1}{n!} x^n T^n = \sum_0^\infty \frac{1}{(2n)!} x^{2n} T^{2n} + \sum_0^\infty \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1} T^{2n+1}$$

$= \cosh x + T \operatorname{senh} x$ che, per verifica diretta, è proprio $M(x)$.

3) $\sqrt{1-\cos x} = \sqrt{1-\cos\left(2\frac{x}{2}\right)} = \sqrt{1-\left(1-2\,\mathrm{sen}^2\frac{x}{2}\right)} = \sqrt{2}\,\left|\mathrm{sen}\,\frac{x}{2}\right|$

serie in coseni

$$a_n = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\int_0^{\pi} dx\, \cos nx\, \mathrm{sen}\,\frac{x}{2}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\int_0^{\pi} dx \left\{ \mathrm{sen}\left(\frac{x}{2}+nx\right) + \mathrm{sen}\left(\frac{x}{2}-nx\right) \right\}$$

$$= -\frac{8\sqrt{2}}{\pi}\ \frac{1}{4n^2-1}$$

Quindi

$$\sqrt{1-\cos x} = \frac{4\sqrt{2}}{\pi} - \frac{8\sqrt{2}}{\pi}\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}\cos nx$$

Parseval

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx\,(1-\cos x) = 2\pi = \frac{\pi}{2}\,\frac{16\cdot 2}{\pi^2} + \pi\,\frac{64\cdot 2}{\pi^2}\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{(4n^2-1)^2}$$

$$= \frac{16}{\pi} + \frac{128}{\pi}\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{(4n^2-1)^2}$$

questo permette di calcolare la somma della serie.