20 Febbraio 2017

(i) $f(x,y) = u(x,y) + i\,v(x,y)$

u e v sono ovunque differenziabili, le identità di Cauchy-Riemann sono quindi condizioni necessarie e sufficiente affinché esista $\frac{d}{dz} f(z)$.

Risultano soddisfatte sulla bisettrice $x = y$

(ii) raggio di convergenza di

$$\sum_{0}^{\infty} \frac{z^n}{\exp an + 1} \qquad \text{con } a \in \mathbb{R}.$$

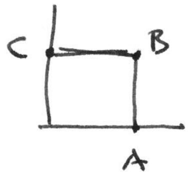
(N.B. $a \in \mathbb{R}$ e non $a \in \mathbb{C}$.)

$$|c_n|^{1/n} = \frac{1}{\left(e^{an}+1\right)^{1/n}} \longrightarrow \begin{cases} 1 & \text{se } a \le 0 \\ e^{-a} & \text{se } a > 0 \end{cases}$$

da cui $R = 1$ e $R = e^{+a}$ nei due casi.

1) Si tratta del ben noto integrale della gaussiana per cui si rimanda al testo.

2) $L^2(Q)$ $\quad Q=[0,1]\times[0,1]$



$$(\hat{A}f)(x,y) = (x+iy)\, f(x,y)$$

• $\hat{A}$ è limitato: infatti $\int |(x+iy) f|^2 \, dx\, dy \le 2 \|f\|^2$

abbiamo quindi la stima $\|\hat{A}\| \le \sqrt{2}$ (*)

• calcolare $\|\hat{A}\|$.

Linea intuitiva: $|x+iy|$ al massimo vale $\sqrt{2}$, se considero delle funzioni $f_n(x,y)$ "sempre più concentrate" attorno allo spigolo B di Q, $|x+iy|$ dovrebbe essere sempre più approssimabile con $\sqrt{2}$.

Costruiamo una successione f_n : $\|\hat{A} f_n\| \to \sqrt{2}$, e $\|f_n\|=1$, dall'osservazione (*) segue allora che $\|\hat{A}\| = \sqrt{2}$.

Consideriamo $\quad f_n = c_n \, \chi_{[1-\frac{1}{n},1]}(x) \; \chi_{[1-\frac{1}{n},1]}(y)$

dove c_n è il fattore di normalizzazione, χ_I denota la funzione caratteristica dell'intervallo I.

$$\int_Q dx\,dy \; \chi^2_{[1-\frac{1}{n},1]}(x) \, \chi^2_{[1-\frac{1}{n},1]}(y) = \frac{1}{n^2} \Rightarrow c_n = n$$

$$f_n(x,y) = n \, \chi_{[1-\frac{1}{n},1]}(x) \; \chi_{[1-\frac{1}{n},1]}(y)$$

$$\|\hat{A} f_n\|^2 = n^2 \int \left|(x+iy)\,\chi_{[..]}\,\chi_{[..]}\right|^2 =$$

$$= n^2 \int_{1-\frac{1}{n}}^{1} dx \int_{1-\frac{1}{n}}^{1} dy\, |x+iy|^2 = n^2 \int_{1-\frac{1}{n}}^{1} dx \int_{1-\frac{1}{n}}^{1} dy\,(x^2+y^2)$$

$$= 2 \cdot n^2 \cdot \frac{1}{n}\, \frac{1}{3}\left[1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^3\right] =$$

$$= \frac{2n}{3}\left[\frac{3}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} 2 \quad \Rightarrow \quad \|\hat{A} f_n\| \to \sqrt{2}$$

- Banalmente si calcola poi $(\hat{A}^{+} f)(x,y) = (x-iy)\, f(x,y)$.

3) $$\varphi \to F\varphi =: \sum_{n\in\mathbb{Z}} \varphi(n) \qquad \varphi \in S(\mathbb{R})$$

definisce una distribuzione temperata.

infatti $$|\varphi(x)| = \frac{1}{1+x^2}\left|(1+x^2)\varphi(x)\right| \le \frac{1}{1+x^2}\left(\|\varphi\|_{00} + \|\varphi\|_{2,0}\right)$$

$$\Rightarrow \quad |F\varphi| \le \sum |\varphi(n)| \le \left(\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2}\right)\left(\|\varphi\|_{0,0} + \|\varphi\|_{2,0}\right) < \infty$$

quindi la serie converge assolutamente e descrive un funzionale continuo.

$$\langle F/\varphi \rangle = \sum_{-\infty}^{+\infty} \langle \delta_n/\varphi \rangle$$

Abbiamo verificato che la serie delle δ_n converge in $S'(\mathbb{R})$.

trasformata di Fourier:

$$\langle \tilde{F}, \varphi \rangle =: \langle F, \tilde{\varphi} \rangle = \sum_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\varphi}(n)$$

con $\tilde{\varphi}(k) = \int \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} e^{-ikx} \varphi(x)$

Quindi $\langle \tilde{F}, \varphi \rangle = \sum_{-\infty}^{+\infty} \int \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} e^{-inx} \varphi(x)$

quindi la trasformata di Fourier della distribuzione assegnata (in forma di serie) è data dalla serie delle distribuzioni regolari $\frac{e^{-inx}}{\sqrt{2\pi}}$ (che converge in questo senso di distribuzioni).