30 Gennaio 2017

(i) $L^2[-1,1]$ $\quad f : \|f\|_2 = 5$

qual è la massima $\|f\|_1$?

Per H.M. otteniamo

$$\int_{-1}^{1}|f| \le \left\{\int_{-1}^{1}|f|^2\right\}^{1/2} \left\{\int_{-1}^{1} 1\,dx\right\}^{1/2} = \|f\|_2 \sqrt{2}$$

quindi otteniamo $\|f\|_1 \le \sqrt{2}\,\|f\|_2$ (*)

nel caso specifico quindi $\|f\|_1 \le 5\sqrt{2}$

OSS: è possibile in generale fare di meglio della limitazione (*) (e quindi avere una limitazione più stringente) ?

La risposta è no, se banalmente prendiamo $f = c =$ costante

$\|f\|_1 = 2c \qquad \|f\|_{L_2} = c\sqrt{2} \qquad \|1\|_{L_2} = \sqrt{2}$

in questo caso nella (*) vale il segno $=$.

(ii) $\varphi \mapsto \int_{-1}^{1} dx\, x\, \varphi(x)$

$$\left|\int_{-1}^{1} dx\, x\,\varphi(x)\right| \le \int_{-1}^{1} dx\, |\varphi(x)| \le 2 \sup|\varphi(x)| = 2\|\varphi\|_{0,0}$$

poiché la linearità è ovvio questo dimostra la continuità, otteniamo quindi un elemento di $S'(\mathbb{R})$.

$x \quad \langle F|\varphi\rangle = \int_{-1}^{1} dx\, x\,\varphi(x)$

$$\langle F'|\varphi\rangle =: -\langle F|\varphi'\rangle = -\int_{-1}^{1} dx\, x\,\varphi'(x) =$$

$$= -x\,\varphi(x)\Big|_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1} dx\,\varphi(x) = -\big(\varphi(1)+\varphi(-1)\big) + \int_{-1}^{1} dx\,\varphi(x)$$

$$F' = -\delta_1 - \delta_{-1} + \chi_{[-1,1]}(x)$$

iii) Residuo in $z=0$ di $f = \frac{1}{z^3}\,\frac{1}{e^z-1}$

$$\frac{1}{e^z-1} = \frac{1}{z+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{6}+\frac{z^4}{4!}+o(z^4)} =$$

$$= \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{6}+\frac{z^3}{4!}+o(z^3)} =$$

$$= \frac{1}{z}\left(1-\cancel{\frac{z}{2}}-\frac{z^2}{6}-\frac{z^3}{4!}+\frac{z^2}{4}+\frac{z^3}{6}+o(z^3)\right)$$

$$= \frac{1}{z}\left(1+\dots+\left(-\frac{1}{4!}+\frac{1}{6}\right)z^3+\dots\right)$$

Il residuo di f in $z=0$ è quindi $-\frac{1}{4!}+\frac{1}{6} = \frac{1}{8}$

Abbiamo usato sistematicamente la serie geometrica: $\frac{1}{1+w} = 1-w+w^2+\dots$

1) $M = \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 \\ -1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$. su $\mathbb{C}^2$ si definisce

$$(\underline{x}, \underline{y}) =: \sum_{i,j} \bar{x}_i M_{ij} y_j$$

• è un prodotto interno. La bilinearità è banale, vediamo la positività, calcoliamo $(\underline{x}, \underline{x})$:

$$(\bar{x}_1\ \bar{x}_2) \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 \\ -1/2 & 3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{3}{2}(|x_1|^2 + |x_2|^2) - \mathrm{Re}\, \bar{x}_2 x_1$$

$$\geq \frac{3}{2}(|x_1|^2 + |x_2|^2) - |x_1||x_2| = |x_1|^2 + |x_2|^2 + \frac{(|x_1| - |x_2|)^2}{2}$$

≥ 0 ed inoltre nullo solo se $x_1 = x_2 = 0$.

• Aggiunto di **A** rispetto a $(\ ,\ )$

Se indichiamo con $\langle\ ,\ \rangle$ l'usuale prodotto interno in $\mathbb{C}^2$ abbiamo $(\underline{x}, \underline{y}) = \langle \underline{x}, M\underline{y} \rangle$

allora $(x, A\underline{y}) = \langle \underline{x}, MA\underline{y} \rangle = \langle (MA)^+\underline{x}, \underline{y} \rangle$

$$= \langle A^+M^+\underline{x}, \underline{y} \rangle = \langle A^+M^+\underline{x}, M^{-1}M\underline{y} \rangle =$$

$$= \langle M^{-1+}A^+M^+\underline{x}, M\underline{y} \rangle = (M^{-1+}A^+M^+\underline{x}, y)$$

l'aggiunto della matrice A rispetto al prodotto interno $(\ ,\ )$ è quindi $M^{-1+}A^+M^+$ dove "+" è sempre trasposto e coniugato.

Nel caso specifico $M^+ = M$ quindi l'aggiunto è $M^{-1}A^+M$. (4)

il fatto che esista M^{-1}, cioè che M non abbia l'autovalore nullo, è chiaro dall'aver dimostrato la positività di $(,)$

(se $M\underline{x} = 0$ $\langle \underline{x}, M\underline{x} \rangle = 0$)

2) $$\frac{1}{1+\sin^2 x} = f(x) \qquad \text{serie di coseni}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx \, \frac{\cos n x}{1+\sin^2 x} = \frac{2i}{\pi}\oint dz \, z \, \frac{z^n + z^{-n}}{(z^2-1)^2 - 4z^2}$$

dove, in modo abituale, ci siamo riportati ad un integrale sulla circonf. unitaria $|z| = 1$ in senso antiorario: $z = e^{ix}$.

consideriamo il secondo addendo di a_n

$$\frac{2i}{\pi}\oint dz \, z \, \frac{z^{-n}}{(z^2-1)^2 - 4z^2} \qquad \text{se poniamo } z = \frac{1}{w} \quad dz = -\frac{1}{w^2}dw$$

e teniamo conto che l'orientamento di w rimetto opposto a quello di z (ed è sempre la circonf. unitaria)

abbiamo $$\frac{2i}{\pi}\oint dz \, z \, \frac{z^{-n}}{(z^2-1)^2 - 4z^2} = \frac{2i}{\pi}\oint dw \, \frac{w^{n+1}}{(w^2-1)^2 - 4w^2}$$

quindi

$$a_n = \frac{4i}{\pi}\oint dz \, \frac{z^{n+1}}{(z^2-1)^2 - 4z^2}$$

⑤

Il denominatore è una biquadratica con radici

$z^2 = 3 \pm 2\sqrt{2} = (\sqrt{2} \pm 1)^2$ e quindi

$z_1 = \sqrt{2}-1 \quad z_2 = -(\sqrt{2}-1) \quad z_3 = \sqrt{2}+1 \quad z_4 = -(\sqrt{2}+1)$

solo z_1 e z_2 hanno $|z|<1$ e danno contributo all'integrale. Si calcola per quanto riguarda solo

$$\operatorname{Res}(\sqrt{2}-1) = -\frac{(\sqrt{2}-1)^n}{8\sqrt{2}} \qquad \operatorname{Res}(-(\sqrt{2}-1)) = -(-)^n\frac{(\sqrt{2}-1)^n}{8\sqrt{2}}$$

da cui tornando a a_n abbiamo

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{per } n \text{ dispari} \\ \frac{2}{\sqrt{2}}(\sqrt{2}-1)^n & \text{per } n \text{ pari} \end{cases}$$

quindi

$$\frac{1}{1+\sin^2 x} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}\sum_1^\infty (\sqrt{2}-1)^{2n} \cos 2nx$$

provate a mettere $x=0$ e verificare che il membro di destra, valutabile per via della serie geometrica, dà proprio 1.

Anzi scrivendo $\cos(2nx) = \frac{e^{2inx} + e^{-2inx}}{2}$ è possibile fare la verifica per x arbitrario.

La serie, oltre che in L^2, converge uniformemente per il criterio di Weierstrass.

3) $\hat{P}f = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dy \left[4\cos^2(x-y) - 1\right] f(y)$

per verificare che $\hat{P}$ è proprio un proiettore potremmo ~~vo~~ dimostrare la validità delle due relazioni $\hat{P} = \hat{P}^\dagger$ e $P^2 = P$.

In particolare la seconda richiederebbe qualche calcolo. Ricordiamo che però un proiettore ha una rappresentazione standard in termini del s.o.n.c. dello spazio di proiezione $\{u_n\}$:

$$\hat{P} f = \Sigma\, u_n (u_n, f)$$

in questo caso $\Sigma\, u_n(x) \int_{-\pi}^{\pi} dy\, u_n(y) f(y)$

quindi occorre che $4\cos^2(x-y) - 1$ si scriva come una somma $\Sigma\, u_n(x)\, \bar{u}_n(y)$. Usiamo allora le formule di addizione d'archi ($\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$):

$4\cos^2(x-y) - 1 = 4\cos^2 x \cos^2 y + 4\sin^2 x \sin^2 y +$

$8 \cos x \sin x \cos y \sin y - 1 =$

$= 4\cos^2 x \cos^2 y + 4\sin^2 x \sin^2 y + 2\sin 2x \sin 2y - 1 \quad (1)$

ricordando che $\{\cos nx, \sin nx\}$ sono un s.o.n.c. è chiaro che occorre eliminare $\cos^2 x$ etc. in funzione di

$\cos 2x$ etc.

Ricordando $\begin{cases} \cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \\ \quad\;\; = 1 - 2\sin^2 x \end{cases} \Rightarrow \quad \cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$

$\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$

, otteniamo

$$(1) = 4\,\frac{1+\cos 2x}{2}\,\frac{1+\cos 2y}{2} + 4\,\frac{1-\cos 2x}{2}\,\frac{1-\cos 2y}{2}$$

$$+ \sin 2x \sin 2y - 1 =$$

$$= 1 + 2\cos 2x \cos 2y + 2\sin 2x \sin 2y$$

da cui

$$\hat{P}f = \int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x\,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2y + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x\,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2y\right) f(y)\,dy$$

le funzioni ortonormalizzate coinvolte sono **3**:

$$u_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \qquad u_{2c} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x \qquad u_{2s} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x$$

lo spazio di proiezione ha dimensione 3.