METODI MATEMATICI DELLA FISICA
Prova scritta del 13 settembre 2016

i) Calcolare il residuo in $z = 0$ della funzione $f(z) = z^3(\frac{1}{z} + 2z)^8$.

ii) Si consideri la matrice

$$\mathbf{P} = \frac{1}{3}\left(\begin{array}{ccc} +2 & -1 & -1 \\ -1 & +2 & -1 \\ -1 & -1 & +2 \end{array}\right).$$

Si dimostri che definisce un proiettore ortogonale;
Il sottospazio di proiezione si identifica con un piano, se ne scriva l'equazione.

iii) Per quali valori di $\alpha \in \mathbb{C}$ la funzione $\frac{x^\alpha}{1-ix^2}$ appartiene a $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$?

AVVERTENZA: 2 dei 3 esercizi i,ii,iii devono avere valutazione sufficiente, altrimenti la prova è comunque valutata insufficiente.

Esercizio 1
Calcolare l'integrale:

$$\int_0^\infty dx\, \frac{\sqrt[4]{x}}{(x+1)^2}$$

Esercizio 2
Si consideri la serie di potenze $f(z) = \sum_{k=0}^\infty c_k z^k$ dove i coefficienti soddisfano la legge di ricorrenza $c_{k+1} - 3c_k + c_{k-1} = 0$, $k = 1, 2, \ldots$, con c_0 e c_1 assegnati.
1) Utilizzando la legge, scrivere un'equazione algebrica per $f(z)$ e risolverla.
2) Determinare il raggio di convergenza della serie.

Esercizio 3
Determinare $a(t)$ e $b(t)$, soluzioni dell'equazione differenziale con condizioni iniziali $a(0) = A$, $b(0) = B$:

$$\frac{d}{dt}\left[\begin{array}{c} a(t) \\ b(t) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} a(t) \\ b(t) \end{array}\right]$$

Per quali condizioni iniziale la soluzione non diverge per $t \to \infty$?