

**METODI MATEMATICI DELLA FISICA**  
**Prova scritta del 21 luglio 2015**

**Esercizio 1.** Calcolare l'integrale:

$$\int_0^{\infty} dx \frac{x^{3/4}}{(1+x)^3}$$

**Esercizio 2.** Determinare il periodo  $\tau$  della funzione

$$f(t) = \frac{\cos(\frac{3}{2}t)}{1 + \cos^2(\frac{1}{4}t)}$$

e calcolare lo sviluppo di Fourier in  $[-\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2}]$ .

**Esercizio 3.** Sia  $\hat{A} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  e  $\|\hat{A}\| < 1$ . Mostrare che:

- 1)  $A^n$  converge all'operatore nullo, per  $n \rightarrow \infty$ ;
- 2) la successione  $\hat{S}_n = \sum_{k=0}^n \hat{A}^k$  converge in norma.
- 3) il limite della successione è l'operatore  $(1 - \hat{A})^{-1}$ .

**Esercizio 4.** Mostrare che il funzionale  $F_{a,\xi}$  ( $a$  reale,  $\xi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ) con azione

$$\langle F_{a,\xi} | \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} dy \varphi(a - y) \xi(y)$$

è una distribuzione temperata, e determinarne la trasformata di Fourier.