

METODI MATEMATICI DELLA FISICA
Prova scritta del 07 luglio 2014

Esercizio 1

Calcolare l'integrale:

$$\int_0^{2\pi} dx \frac{\cos(2x)}{1 + \sin^2 x}.$$

Esercizio 2

Determinare i poli e i corrispondenti residui della funzione

$$f(z) = \frac{1}{\sinh(z^2 - 1)}$$

Esercizio 3

Si consideri il gruppo di trasformazioni $R_\theta : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$,

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad -\pi < \theta \leq \pi.$$

1) Mostrare che il gruppo è fortemente continuo in $\theta = 0$:

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \|R_\theta u - u\|^2 = 0, \quad \forall u \in \mathbb{C}^2.$$

2) Scrivere la matrice nella sua forma esponenziale.

Esercizio 4

1) Mostrare che $\chi_{[-n,n]} \rightarrow 1$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$,

2) Calcolare $\mathcal{F}\chi_{[-n,n]}$,

3) Mostrare la convergenza della successione di funzioni, in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$:

$$\frac{\sin(nx)}{\pi x} \rightarrow \delta(x)$$