

Corso di

TEORIA DELLE INTERAZIONI FONDAMENTALI II

(Meccanica Quantistica Relativistica)

A.A. 2019-2020

Prof. G. Ferrera

giancarlo.ferrera@mi.infn.it

giancarlo.ferrera@unimi.it

Lezioni: martedì h 16.30-18.30 Aula E
 venerdì h 8.30-10.30 Aula I

aule virtuali: <http://zoom.us/my/aula.e>
 <http://zoom.us/my/aula.i>

sito web: pctserver.mi.infn.it/~ferrera/teaching.html

bibliografia: J.J. Sakurai, *Advanced Quantum*

J.J. Sakurai, "Advanced Quantum Mechanics", Addison Wesley, 1967

J.D. Bjorken, S.D. Drell, "Relativistic Quantum Mechanics", McGraw-Hill, 1964

F. Mandl, G. Shaw, "Quantum Field Theory", Wiley, 1984 (I ed), 2010 (II ed)

Relativistic notation

Sia x^μ , $\mu=0,1,2,3$ un 4-vettore spazio-tempo "contro-variante"
 $x_0 = ct$ coordinata temporale e x_j , $j=1,2,3$ coord. spaziale

$$x^\mu = (ct, \vec{x})$$

Definiamo il tensore metrico $g_{\mu\nu}$ con componenti

$$\left\{ \begin{array}{l} g_{00} = -g_{11} = -g_{22} = -g_{33} = +1 \\ g_{\mu\nu} = 0 \text{ se } \mu \neq \nu \end{array} \right. \quad g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

e definiamo un 4-vettore "covariante" x_μ a partire da x^μ

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu \quad \left(\begin{array}{l} \text{notazione di} \\ \text{Einstein} \end{array} \right) \quad g_{\mu\nu} x^\nu \equiv \sum_{\nu=0}^3 g_{\mu\nu} x^\nu$$

da cui $x_\mu = (ct, -\vec{x})$

Definiamo il tensore metrico covariante da

$$g^{\mu\nu} g_{\nu\lambda} = \delta^\mu_\lambda \quad \text{dove } \delta^\mu_\lambda \text{ \u00e9 la delta di Kronecker}$$

$$\delta^\mu_\lambda = \begin{cases} 1 & \text{se } \mu = \lambda \\ 0 & \text{se } \mu \neq \lambda \end{cases}$$

da cui $g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$

2
Sotto trasformazioni di Lorentz

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^{\mu\nu} x_\nu$$

rimane invariato l'intervallo spazio-temporale

$$x^\mu x_\mu = x^\mu g_{\mu\nu} x^\nu = (x^0)^2 - \vec{x} \cdot \vec{x}$$

per cui $x^\mu x_\mu$ è uno scalare di Lorentz

quindi $x^\mu x_\mu = x'^\mu x'_\mu = \Lambda^{\mu\nu} x_\nu \Lambda_{\mu\lambda} x^\lambda$

$$\Rightarrow \Lambda^{\mu\nu} \Lambda_{\mu\lambda} = \delta^\nu_\lambda \quad \Rightarrow \Lambda_{\mu\nu} = (\Lambda^{-1})^\nu_\mu$$

Inoltre $\Lambda_{\mu\nu}$ è reale (coordinate spazio-tempo sono reali)

Un 4-vettore S^μ (S_μ) che sotto trasformazioni di Lorentz si trasforma come x^μ (x_μ), e quindi $S^\mu S_\mu$ è invariante, è detto vettore contravariante (covariante). Ad esempio

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \right)$$

sono 4 vettori contravarianti

$$x^\nu = (\Lambda^{-1})^{\nu\mu} x'_\mu = \Lambda^{\mu\nu} x'_\mu \Rightarrow \frac{\partial x^\nu}{\partial x'_\mu} = \Lambda^{\mu\nu}$$

$$\frac{\partial}{\partial x'_\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'_\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} = \Lambda^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\nu}$$

quindi anche $p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \vec{p} \right)$ trasforma come x^μ

È invariante di Lorentz anche il prodotto scalare di due 4-vettori definito da

$$a \cdot b \equiv a^\mu b_\mu = a_\mu b^\mu = g_{\mu\nu} a^\mu a^\nu = \dots = a^0 b^0 - \vec{a} \cdot \vec{b}$$

Per cui se $\phi(x)$ è una funzione scalare, $\partial^\mu = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla} \right)$

$\partial_\mu \phi \equiv \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu}$ è un 4-vettore covariante e $\partial^\mu \phi \equiv \frac{\partial \phi}{\partial x_\mu}$ è contravariante

mentre $\delta \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} \delta x^\mu$ e $\partial^\mu \partial_\mu = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \equiv \square$ sono

scalari di Lorentz.

Un tensore di rango 2 si trasforma come

$$t^{\mu\nu} \rightarrow t'^{\mu\nu} = \Lambda^{\mu\lambda} \Lambda^{\nu\sigma} t_{\lambda\sigma}$$

e analogamente i tensori di rango superiore

Si noti che nel caso della Relatività Speciale l'introduzione del tensore metrico $g^{\mu\nu}$ e la distinzione fra vettori covarianti e contravarianti NON è necessaria. Si può infatti definire (notazioni di Minkowski)

$$x_\mu = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (\vec{x}, ict)$$

$$x_\mu x_\mu = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = \vec{x}^2 + (ict)^2 = \vec{x}^2 - c^2 t^2 \quad \text{invariante di Lorentz}$$

$$x_\mu \rightarrow x'_\mu = \Lambda_{\mu\nu} x_\nu \quad \text{dove } \Lambda_{ij} \text{ e } \Lambda_{44} \in \mathbb{R} \quad c_{ij} = 1, 3$$
$$\Lambda_{j4} \text{ e } \Lambda_{4j} \in \mathbb{Im}$$

Le due notazioni sono ovviamente completamente equivalenti \perp

Classical Lagrangian Field Theory

Partiamo da una particella (punto materiale) in meccanica classica e dalle eq. di Eulero-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

derivabile dal principio di minima azione $\delta S(q, \dot{q}, t_1, t_2) = 0$

Consideriamo ora q_i coordinate generalizzate e sia L (indipendente da t) data da

$$S(q, \dot{q}, t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}) dt$$

$$L = T - V$$

T energia cinetica e V potenziale

δS variazioni arbitrarie su una traiettoria $q(t)$ tale che $q(t_1) = q(t_2) = 0$

e $H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$ dove $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$

Consideriamo un sistema di N particelle m in 1 dimensione collegate con molle identiche di costante elastica K



Sia η_i lo spostamento della i -esima particella dalla sua posizione d'equilibrio e sia a la distanza all'equilibrio di 2 particelle vicine.

La lagrangiana L del sistema è data da:

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m \dot{\eta}_i^2 - K (\eta_{i+1} - \eta_i)^2 = \sum_{i=1}^N a \frac{1}{2} \left[\frac{m}{a} \dot{\eta}_i^2 - K \left(\frac{\eta_{i+1} - \eta_i}{a} \right)^2 \right]$$

$$= \sum_{i=1}^N a \mathcal{L}_i, \quad \text{dove } \mathcal{L}_i \text{ è la densità lagrangiana (per unità di lunghezza)}$$

Consideriamo il limite continuo del sistema discreto per cui

$$N \rightarrow \infty, \quad a \rightarrow dx, \quad \frac{m}{a} = \mu \quad (\text{densità di massa lineare})$$

$$\frac{\eta_{i+1} - \eta_i}{a} \rightarrow \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad Ka \rightarrow Y \quad (\text{modulo di elasticità})$$

abbiamo quindi $L = \int \mathcal{L} dx$ con $\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[\mu \dot{\eta}^2 - Y \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right]$ = 5

$\eta = \eta(x, t)$ è una coordinata generalizzata funzione di x e t (campo)
 Si consideri una variazione del campo $\eta(x, t) \rightarrow \eta(x, t) + \delta \eta(x, t)$
 Il principio di minima azione per il caso continuo è

$$0 = \delta S = \delta \int L dt = \int dt \int dx \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} \delta \eta + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial \eta / \partial x)} \delta \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial \eta / \partial t)} \delta \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right) \right\} =$$

$$= \int dt \int dx \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} \delta \eta - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial \eta / \partial x)} \right) \delta \eta - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial \eta / \partial t)} \right) \delta \eta \right\} \pm 0$$

$$+ \int dt \int dx \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial \eta / \partial x)} \right) \delta \eta + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial \eta / \partial t)} \right) \delta \eta \right\}$$

!!
 $\delta \eta(x, t) = 0$, è annullata agli estremi in x e t

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial \eta / \partial x)} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial \eta / \partial t)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} = 0 \quad \text{Eq. di Eulero-Lagrange}$$

per il campo $\eta(x, t)$

Analogamente si può definire una densità hamiltoniana

$$\mathcal{H} = \dot{\eta} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}} - \mathcal{L} = \frac{1}{2} \mu \dot{\eta}^2 + \frac{1}{2} Y \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \quad \text{densità di energia}$$

cinetica e potenziale

dove $\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}}$ è il momento canonico coniugato a η

Campo scalare classico

Generalizziamo il risultato in 3 dimensioni spaziali utilizzando una notazione covariante di Lorentz.

Sia $\phi(x)$ un campo reale, definiamo $\partial_\mu \phi \equiv \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu}$, ovvero che

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0$$

L'equazione è covariante di Lorentz se \mathcal{L} è una quantità scalare

Se $\phi(x)$ è un campo scalare reale $\phi'(x') = \phi(x)$ sotto Trasn. di Lorentz

$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$, vogliamo ottenere un eq. del moto lineare in ϕ
(\mathcal{L} deve dipendere quadraticamente da ϕ e $\partial_\mu \phi$)

poniamo ad esempio

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - \mu^2 \phi^2)$$

dalla eq. di E-L otteniamo

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^\mu} (2 \partial^\mu \phi) + \mu^2 \phi^2 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\partial^\mu \partial_\mu \phi + \mu^2 \phi = 0} \quad \left(\square \phi + \mu^2 \phi = 0 \quad \text{dove } \square = \partial^\mu \partial_\mu = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right)$$

Eq. di Klein-Gordon (derivata anche da Schrödinger)

Si osserva l'analoga con la formula relativistica $E^2 - |\vec{p}|^2 c^2 = m^2 c^4$

dove $E \rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$, $p_k \rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_k}$, $\mu \rightarrow \frac{mc}{\hbar} = [\text{lunghezza}^{-1}]$

Il campo coniugato è $\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}(x)}$

dove $\mathcal{H}(x) = \pi(x) \dot{\phi}(x) - \mathcal{L}(\phi, \partial^\mu \phi)$

e l'hamiltoniana $H = \int d^3x \mathcal{H}(x)$

Siccome \mathcal{L} non dipende esplicitamente da t , H è costante nel tempo

per cui $\pi(x) = \frac{1}{c^2} \dot{\phi}(x)$

$$\mathcal{H}(x) = \frac{1}{2} (c^2 \pi^2(x) + (\nabla \phi)^2 + \mu^2 \phi^2)$$

Classical Electromagnetic Field

Consideriamo le eq. di Maxwell nelle unita di Heaviside-Lorentz (razionalizzate)

$$\left\{ \begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E} &= \rho \\ \nabla \times \vec{B} &= \frac{1}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\ \nabla \times \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{aligned} \right.$$

\downarrow
 $\epsilon_0 = \mu_0 = 1$

\downarrow
no fattori $\sqrt{4\pi}$ in Eq. M

$\rho = \rho(\vec{x}, t)$ densita di carica
 $\vec{j} = \vec{j}(\vec{x}, t)$ " " corrente
 $\vec{E} = \vec{E}(\vec{x}, t)$ campo elettrico
 $\vec{B} = \vec{B}(\vec{x}, t)$ " magnetico

$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\hbar c} \sim \frac{1}{137}$ costante di struttura fine

($\alpha = \frac{e_{cgs}^2}{\hbar c}$, $e = e_{cgs} \cdot \sqrt{4\pi}$, $\vec{E} = \frac{\vec{E}_{cgs}}{\sqrt{4\pi}}$, ... , unita di Gauss non razionalizzate (CGS))

($\alpha = \frac{e^2}{4\pi\hbar c \epsilon_0}$, $e = \frac{e_{SI}}{\sqrt{\epsilon_0}}$, $\vec{E} = \vec{E}_{SI} \cdot \sqrt{\epsilon_0}$, ... , unita MKS razionalizzate (SI))

Le Eq. di M. possono essere scritte in forma compatta introducendo il tensore F (antisimmetrico) $F^{\mu\nu} = F^{\mu\nu}(x)$ e la 4-corrente j^μ

$j^\mu = j^\mu(x) = (c\rho(x), \vec{j}(x))$

$\nu \rightarrow$	0	1	2	3	\uparrow
	0	E_x	E_y	E_z	0
	$-E_x$	0	B_z	$-B_y$	1
	$-E_y$	$-B_z$	0	B_x	2
	$-E_z$	B_y	$-B_x$	0	3

$F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$

$$\boxed{\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = \frac{1}{c} j^\mu}$$

(Lorentz covariant)

Prime 2 eq. Maxwell

Prendendo la 4-divergenza di $\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu}$ otteniamo

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial F^{\nu\mu}}{\partial x^\mu} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\mu} \right) = 0$$

\downarrow $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$ $\mu \leftrightarrow \nu$ \Rightarrow $\frac{\partial j_\mu}{\partial x^\mu} = 0$ conservazione della 4-corrente.

analogamente dalle seconde 2 eq. di Maxwell si può introdurre $A^\mu = (\phi, \vec{A})$ in feltro. $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$, $\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$

$$\left\{ \begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \left(-\vec{\nabla} \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\nabla} \times \vec{A}}{\partial t} \\ &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{j} \end{aligned} \right.$$

e scriviamo

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_\lambda} F^{\mu\nu} + \frac{\partial}{\partial x_\mu} F^{\nu\lambda} + \frac{\partial}{\partial x_\nu} F^{\lambda\mu} = 0 \right) \quad \text{Seconde 2 eq. Maxwell}$$

Introducendo il potenziale vettore $A^\mu = A^\mu(x) = (\phi(x), \vec{A}(x))$ esprimiamo

$$F^{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\nu} A^\mu - \frac{\partial}{\partial x^\mu} A^\nu$$

e abbiamo che $(\partial^\lambda F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\lambda} + \partial^\nu F^{\lambda\mu}) = \partial^\lambda (\partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu) + \partial^\mu (\partial^\lambda A^\nu - \partial^\nu A^\lambda) + \partial^\nu (\partial^\lambda A^\mu - \partial^\mu A^\lambda) = 0$ è automaticamente soddisfatta

Partendo dal tensore elettrom. possiamo scrivere la quantità scalare

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} &= F_{00} F^{00} + F_{01} F^{10} + F_{02} F^{20} + F_{03} F^{30} + F_{10} F^{01} + F_{11} F^{11} + F_{12} F^{21} + F_{13} F^{31} \\ &\quad + F_{20} F^{02} + F_{21} F^{12} + F_{22} F^{22} + F_{23} F^{32} + F_{30} F^{03} + F_{31} F^{13} + F_{32} F^{23} + F_{33} F^{33} \\ &= -2(F_{01} F^{01} + F_{02} F^{02} + F_{03} F^{03}) + (F_{12} F^{12} + F_{13} F^{13} + F_{23} F^{23}) = \\ &= 2(-|\vec{E}|^2 + |\vec{B}|^2) \end{aligned}$$

$$\left(\frac{1}{8} \epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} F^{\mu\nu} F^{\lambda\sigma} = \vec{E} \cdot \vec{B} \text{ non è invariante per parità} \right)$$

Possiamo scrivere la densità lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{c} j_\mu A^\mu$$

considerando ogni componente di A^μ come un campo indipendente

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} &= -\frac{1}{4} \partial_\nu \left\{ \frac{\partial}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} (\partial_\alpha A_\nu - \partial_\nu A_\alpha) (\partial^\alpha A^\mu - \partial^\mu A^\alpha) \right\} \\ &= -\frac{1}{4} \partial_\nu \left\{ \frac{\partial}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} \left[2(\partial_\alpha A_\nu) (\partial^\alpha A^\mu) - 2(\partial_\alpha A_\nu) (\partial^\mu A^\alpha) \right] \right\} \\ &= -\frac{1}{4} \partial_\nu (\cancel{\partial^\mu A^\mu} - \cancel{\partial^\nu A^\mu}) = -\partial_\nu F^{\mu\nu} \end{aligned}$$

e $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} = -\frac{1}{c} j^\mu \Rightarrow \partial_\nu F^{\mu\nu} = \frac{1}{c} j^\mu$ Eq. Maxwell

che può anche essere scritta come

$$\partial_\nu (\partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu) = \square A^\mu - \partial^\mu (\partial_\nu A^\nu) = \frac{1}{c} j^\mu$$

Queste eq. sono covarianti di Lorentz e invarianti sotto trasformazioni di gauge

$A^\mu \rightarrow A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu \chi$ e $\partial_\mu A'^\mu \neq 0$

con $\chi = \chi(x)$ tale che $\square \chi + \partial_\mu A^\mu = 0$

$\Rightarrow \partial_\mu A'^\mu = \partial_\mu A^\mu + \square \chi = 0$

$\Rightarrow \square A'^\mu - \square (\partial^\mu \chi) - \partial^\mu (\partial_\nu A'^\nu - \partial^\nu A'^\mu) = \frac{1}{c} j^\mu$

Pertanto sono $F^{\mu\nu}$ (\vec{E}, \vec{B}) le quantità che hanno significato fisico e il potenziale A^μ può essere considerato come una quantità utile per semplificare i calcoli. Ogni teoria formulata in termini del potenziale deve essere gauge invariante (predizioni per osservabili fisiche invarianti per transf. gauge)

Possiamo quindi imporre che $\partial_\mu A^\mu = 0$ condizione di Lorentz

e otteniamo l'eq.

$$\square A^\mu = \frac{1}{c} j^\mu$$

Anche con la scelta di Lorenz A_μ non è unico e possiamo effettuare la seguente trasformazione

$$A^\mu \rightarrow A^{\mu'} = A^\mu + \partial^\mu \Lambda \quad \text{trsf. di gauge del II tipo}$$

con $\Lambda = \Lambda(x)$ che soddisfa $\square \Lambda = 0$ eq. omogenea di d'Alembert

$$\Rightarrow \square A^{\mu'} - \square \cancel{\partial^\mu \Lambda} = \square A^{\mu'} = \frac{1}{c} j^\mu$$

Consideriamo il campo elettromagnetico libero: $j^\mu = 0$

Possiamo scegliere le seguenti condizioni di gauge (frame dependent)

$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ "gauge di Coulomb o di radiazione (diversa dalla condiz. di Lorentz)"

Un vettore che soddisfa la g. di Coulomb è detto "campo trasverso" infatti per un'onda piana $\vec{A}(\vec{x}) = \vec{A}_0 e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} = \vec{A}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t)}$
 $\vec{k} = \left(\frac{E}{\hbar c}, \vec{k} \right) = \left(\frac{\omega}{c}, \vec{k} \right), \frac{\omega}{c} = |\vec{k}|$

$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \Rightarrow \vec{k} \cdot \vec{A} = 0$

\vec{A} è perpendicolare alla direzione di propagazione \vec{k} dell'onda
 Nella gauge di Coulomb \vec{A} è un campo "trasverso"

Si può considerare una transf. di gauge $A^\mu \rightarrow A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu \Lambda$

tale che $-\frac{1}{c} \frac{\partial \Lambda}{\partial t} = A^0 \Rightarrow A'^0 = 0 \Rightarrow \phi(x) = 0$

e la condizione di Lorentz $\partial_\mu A^\mu = 0$ equivale alla gauge di C.
 Nella g. di C. le eq. di Maxwell sono $\square A^\mu = 0$ (con $\phi(x) = 0$)

pertanto $\square \vec{A} = 0$ e $\begin{cases} \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \\ \vec{E} = -\vec{\nabla} \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \end{cases} \Rightarrow \vec{B} \text{ e } \vec{E} \text{ sono "trasversi" come } \vec{A}$

Decomposizione di Fourier

Il campo \vec{A} ha infiniti gradi di libertà $-\infty < x < +\infty, -\infty < t < +\infty$
 Analogamente alla quantizzazione in MQ consideriamo un cubo di volume $V=L^3$ e imponiamo le condizioni al bordo sulla superficie del cubo (il limite al continuo si ottiene per $L \rightarrow \infty$) a t fissato

$\vec{A}(0, y, z, t) = \vec{A}(L, y, z, t); \vec{A}(x, 0, z, t) = \vec{A}(x, L, z, t), \dots$ etc
 $\vec{A}(\vec{x}, t) \Big|_{t=0} = \frac{\hbar a}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \sum_{r=1,2} \left(a_r(\vec{k}, 0) \vec{u}_{\vec{k},r}(\vec{x}) + a_r^*(\vec{k}, 0) \vec{u}_{\vec{k},r}^*(\vec{x}) \right)$

(N.B. \vec{A} è reale, $\vec{A} = \vec{A}^*$) dove $\vec{u}_{\vec{k},r}(\vec{x}) = \vec{E}_r(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$

$\vec{E}_r(\vec{k})$ è detto vettore di polarizzazione ^{è reale} \vec{r} e ha norma 1 = 12

Essendo $\vec{k} \cdot \vec{A} = 0$ \rightarrow \vec{A} ha solo 2 componenti indipendenti. Scegliamo $\vec{E}_r(\vec{k})$ tale che

$(\vec{E}_1, \vec{E}_2, \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|})$ formino una ^(distorsa) ^{reale} ^{terna} di vettori ortogonali di norma 1 ($\vec{k} \cdot \vec{E}_r = 0$)

$|\vec{E}_1| = |\vec{E}_2| = 1$, in questo modo \vec{A} è un vettore trasverso

Abbiamo quindi che $\frac{1}{V} \int_{\Omega} d^3\vec{x} \vec{u}_{\vec{k},r}(\vec{x}) \vec{u}_{\vec{k}',r'}^*(\vec{x}) = \delta_{\vec{k}\vec{k}'} \delta_{rr'}$

e $\frac{1}{V} \int_{\Omega} d^3\vec{x} \vec{u}_{\vec{k},r}(\vec{x}) \vec{u}_{\vec{k}',r'}^*(\vec{x}) = \frac{1}{V} \int_{\Omega} d^3\vec{x} \vec{u}_{\vec{k},r}^*(\vec{x}) \vec{u}_{\vec{k}',r'}(\vec{x}) = \delta_{\vec{k},-\vec{k}'} \delta_{rr'}$

dove $\vec{k} = \frac{2\pi}{L} (m_1, m_2, m_3)$, $m_1, m_2, m_3 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

per cui $\vec{E}_r(\vec{k}) \cdot \vec{E}_{r'}(\vec{k}) = \delta_{rr'}$ $\vec{E}_r(\vec{k}) \cdot \vec{k} = 0$ $r, r' = 1, 2$

Il campo al tempo t generico è dato dall'espansione di Fourier

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{\kappa_0}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \sum_r \left(a_r(\vec{k}, t) \vec{E}_r(\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} + a_r^*(\vec{k}, t) \vec{E}_r(\vec{k}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} \right)$$

$$= \frac{\kappa_0}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \sum_r \left(a_r(\vec{k}, 0) \vec{E}_r(\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} + a_r^*(\vec{k}, 0) \vec{E}_r(\vec{k}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} \right)$$

con $\kappa x = \omega t - \vec{k} \cdot \vec{x}$ $\omega = |\vec{k}|c = \omega_k$

dove si è usato che $\square \vec{A} = 0 \Rightarrow \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} a_r(\vec{k}, t) = -|\vec{k}|^2 a_r(\vec{k}, t) = -\frac{\omega_k^2}{c^2} a_r(\vec{k}, t)$

che è un'eq. diff. per oscillatori armonici disaccoppiati e quindi

$$a_r(\vec{k}, t) = a_r(\vec{k}, 0) e^{-i\omega_k t}$$

la densità hamiltoniana si ottiene da $\mathcal{L}_{em} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \frac{1}{2} (|\vec{E}|^2 - |\vec{B}|^2)$

$$\mathcal{H}_{em} = \frac{\partial \mathcal{L}_{em}}{\partial(\partial A_\mu / \partial t)} \cdot \frac{\partial A_\mu}{\partial t} - \mathcal{L}_{em} = \left[\frac{\partial}{\partial \dot{\vec{E}}} \frac{1}{2} (|\vec{E}|^2 - |\vec{B}|^2) \right] \cdot (\dot{\vec{E}}) - \frac{1}{2} (|\vec{E}|^2 - |\vec{B}|^2) =$$

$$= \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{E} - \frac{1}{2} (|\vec{E}|^2 - |\vec{B}|^2) =$$

$$= \frac{1}{2} (|\vec{E}|^2 + |\vec{B}|^2)$$

$$\Rightarrow H_{em} = \int d^3x \mathcal{H}_{em} = \frac{1}{2} \int (|\vec{E}|^2 + |\vec{B}|^2) d^3x$$

$$= \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{c^2} \left| \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right|^2 + |\nabla \times \vec{A}|^2 \right) d^3x \quad (\nabla \times \vec{A}) \cdot \vec{B} = \nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) + \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{B})$$

calcoliamo la
quantità

$$\int (\nabla \times \vec{u}_{\vec{k},r}(\vec{x})) \cdot (\nabla \times \vec{u}_{\vec{k}',r'}^*(\vec{x})) d^3x = \int \nabla \cdot (\vec{u}_{\vec{k},r}(\vec{x}) \times (\nabla \times \vec{u}_{\vec{k}',r'}^*(\vec{x}))) d^3x$$

$$+ \int \vec{u}_{\vec{k},r}(\vec{x}) \cdot (\nabla \times (\nabla \times \vec{u}_{\vec{k}',r'}^*(\vec{x}))) d^3x = \frac{\vec{u}_{\vec{k},r}(\vec{x}) \times \nabla \times \vec{u}_{\vec{k}',r'}^*(\vec{x})}{r}$$

$$- \int \vec{u}_{\vec{k},r}(\vec{x}) \cdot \nabla^2 \vec{u}_{\vec{k}',r'}^*(\vec{x}) d^3x + \int \vec{u}_{\vec{k},r}(\vec{x}) \cdot \nabla (\nabla \cdot \vec{u}_{\vec{k}',r'}^*(\vec{x})) d^3x =$$

$$= V |\vec{k}|^2 \delta_{\vec{k}\vec{k}'} \delta_{rr'} = V \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \delta_{\vec{k}\vec{k}'} \delta_{rr'}$$

$$\nabla \cdot \vec{u}_{\vec{k},r}(\vec{x}) = i\vec{k} \cdot \vec{u}_{\vec{k},r}(\vec{x}) = 0$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$$

mentre $(\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t})$

$$\int \left[\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (a_r(\vec{k},t) \vec{u}_{\vec{k},r}(\vec{x})) \right] \cdot \left[\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (a_{r'}^*(\vec{k}',t) \vec{u}_{\vec{k}',r'}^*(\vec{x})) \right] d^3x = V \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \delta_{\vec{k}\vec{k}'} \delta_{rr'} a_r(\vec{k},t) a_{r'}^*(\vec{k}',t)$$

$$\Rightarrow H_{em} = \frac{k_a^2}{2} \sum_{\vec{k}} \sum_r V \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 (a_r(\vec{k},t) a_r^*(\vec{k},t) + a_r(\vec{k},t) a_r^*(-\vec{k},t) + a_r^*(\vec{k},t) a_r(-\vec{k},t) - a_r(\vec{k},t) a_r(-\vec{k},t) - a_r^*(\vec{k},t) a_r^*(-\vec{k},t)) =$$

$$= \frac{k_a^2}{2} \sum_{\vec{k}} \sum_r \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 (a_r(\vec{k},0) a_r^*(\vec{k},0) + a_r^*(\vec{k},0) a_r(\vec{k},0))$$

indipendenti da t

dove $\ddot{a}_r(\vec{k},t) = -\omega^2 a_r(\vec{k},t)$ e $a_r(\vec{k},t) = a_r(\vec{k},0) e^{-i\omega_k t}$

ovvero un sistema di oscillatori armonici disaccoppiati.

$\hat{H}_{ho} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 \hat{q}^2$, dove $[\hat{q}, \hat{p}] = \hat{q}\hat{p} - \hat{p}\hat{q} = i\hbar$

$\hat{a} \equiv \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(\hat{q} + \frac{i}{m\omega} \hat{p} \right)$ $\hat{q} = \hat{q}^+, \hat{p} = \hat{p}^+$

$\hat{a}^+ = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(\hat{q} - \frac{i}{m\omega} \hat{p} \right)$

$\Rightarrow [\hat{a}, \hat{a}^+] = 1$ e $\hat{H}_{ho} = \frac{\hbar\omega}{2} (\hat{a}^+ \hat{a} + \hat{a} \hat{a}^+) = \hbar\omega \left(\hat{a}^+ \hat{a} + \frac{1}{2} \right)$

$\hat{N} \equiv \hat{a}^+ \hat{a} \Rightarrow \langle \psi | \hat{N} | \psi \rangle = \langle \psi | \hat{a}^+ \hat{a} | \psi \rangle = |\langle \hat{a} | \psi \rangle|^2 \geq 0$

$\hat{N}^+ = \hat{a}^+ \hat{a} = \hat{N}$ $\hat{N} |m\rangle = m |m\rangle (\Rightarrow m \geq 0)$

ma $\hat{N}(\hat{a} |m\rangle) = (\hat{a} \hat{a}^+ - 1) \hat{a} |m\rangle = \hat{a} (\hat{N} - 1) |m\rangle = (m-1) (\hat{a} |m\rangle)$ *operatori di creazione e distruzione*
 $\hat{N}(\hat{a}^+ |m\rangle) = \hat{a}^+ \hat{a} \hat{a}^+ |m\rangle = \hat{a}^+ (\hat{a}^+ \hat{a} + 1) |m\rangle = (m+1) (\hat{a}^+ |m\rangle)$

Si come $\langle \hat{N} \rangle \geq 0 \exists m_0$ minimo tale che $\hat{N} |m_0\rangle = m_0 |m_0\rangle, m_0 \geq 0$
 $\Rightarrow \hat{a} |m_0\rangle = 0 \Rightarrow \hat{a}^+ \hat{a} |m_0\rangle = m_0 |m_0\rangle = 0 \Rightarrow m_0 = 0$

$\Rightarrow m = 0, 1, 2, 3, \dots$

Se $\langle 0|0\rangle = 1 |m\rangle \Rightarrow |m\rangle = \frac{(\hat{a}^+)^m}{\sqrt{m!}} |0\rangle$ e $\langle m|m\rangle = 1$

$\hat{H}_{ho} |m\rangle = \hbar\omega \left(\hat{N} + \frac{1}{2} \right) |m\rangle = \hbar\omega \left(m + \frac{1}{2} \right) |m\rangle, m = 0, 1, 2, \dots$

Nello schema di Heisenberg $i\hbar \frac{d\hat{a}(t)}{dt} = [\hat{a}(t), \hat{H}_{ho}] = \hbar\omega [\hat{a}, \hat{a}^+] \hat{a}(t)$

$\Rightarrow \hat{a}(t) = \hat{a}(0) e^{-i\omega t}$

$\hat{a}^+ |m\rangle = C_+ |m+1\rangle$ $|C_+|^2 \langle m+1|m+1\rangle = \langle m | \hat{a} \hat{a}^+ |m\rangle = \langle m | (\hat{N} + 1) |m\rangle = m+1 \langle m|m\rangle$
 $\hat{a} |m\rangle = C_- |m-1\rangle$ $|C_-|^2 \langle m-1|m-1\rangle = \langle m | \hat{a}^+ \hat{a} |m\rangle = m \langle m|m\rangle$

$\Rightarrow \hat{a}^+ |m\rangle = \sqrt{m+1} |m+1\rangle$
 $\hat{a} |m\rangle = \sqrt{m} |m-1\rangle$

$\hat{a} \rightarrow \langle m' | \hat{a} |m\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$
 $\hat{a}^+ \rightarrow \langle m' | \hat{a}^+ |m\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$

$|m\rangle \rightarrow \langle m' |m\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ $\hat{N} \rightarrow \langle m' | \hat{N} |m\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$

Quantizzazione del campo elettromagnetico

possiamo adesso quantizzare il campo elettromagnetico classico.

I coeff. $Q_r(\vec{k}, t)$ dell'espansione di Fourier del campo classico $\vec{A}(\vec{x}, t)$

vengono identificati con i corrispondenti operatori di creazione e distruzione

$$K_a Q_r(\vec{k}, t) \rightarrow c \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}} \hat{Q}_r(\vec{k}, t) \quad \text{e} \quad K_a Q_r^*(\vec{k}, t) \rightarrow c \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}} \hat{Q}_r^\dagger(\vec{k}, t)$$

$K_a = c \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}}$ \leftarrow fattore di normalizzazione per riportarci alla forma di H dell'osc. armonico

$$\hat{\vec{A}}(\vec{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \sum_r c \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}} \left[\hat{Q}_r(\vec{k}, t) \vec{E}_r(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + \hat{Q}_r^\dagger(\vec{k}, t) \vec{E}_r(\vec{k}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right]$$

mentre $\vec{A}(\vec{x}, t)$ era una funzione "classica" vettoriale definita in ogni punto dello spazio tempo

$\hat{\vec{A}}(\vec{x}, t)$ è un operatore quantistico che agisce sui ket di uno spazio vettoriale.

$\hat{\vec{A}}(\vec{x}, t)$ è un campo quantizzato

L'operatore hamiltoniano è dato da

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \frac{1}{2} \int (|\hat{\vec{E}}|^2 + |\hat{\vec{B}}|^2) d^3x = \sum_{\vec{k}} \sum_r \hbar \omega (\hat{Q}_r^\dagger(\vec{k}) \hat{Q}_r(\vec{k}) + 1) \\ &= \sum_{\vec{k}} \sum_r (\hat{N}_r(\vec{k}) + 1) \end{aligned} \quad \text{dove } \omega = \omega_{\vec{k}} = |\vec{k}|c$$

con

$$\left\{ \begin{aligned} [\hat{Q}_r(\vec{k}), \hat{Q}_r^\dagger(\vec{k}')] &= \delta_{rr} \delta_{\vec{k}\vec{k}'} \\ [\hat{Q}_r(\vec{k}), \hat{Q}_r(\vec{k}')] &= [\hat{Q}_r^\dagger(\vec{k}), \hat{Q}_r^\dagger(\vec{k}')] = 0 \end{aligned} \right.$$

Abbiamo quindi la sovrapposizione di oscillatori armonici indipendenti 16
 con numero di occupazione (\vec{k}, r) .

$\hat{Q}_r(\vec{k})$ ($\hat{Q}_r^+(\vec{k}')$) riduce (aumenta) il numero di occupazione
 dello stato \vec{k}, r (\vec{k}', r') di un'unità.

$n_r(\vec{k})$ è il numero di occupazione dello stato \vec{k}, r

lo stato $|0\rangle = |0_{\vec{k}_1, r_1}\rangle |0_{\vec{k}_2, r_2}\rangle \dots |0_{\vec{k}_i, r_i}\rangle \dots$

ha la proprietà che applicando un generico $\hat{Q}_r(\vec{k})$ si ottiene il vettore nullo

$\Rightarrow \hat{N}_r(\vec{k}) |0\rangle = 0$ $|0\rangle$ è detto stato di vuoto

lo stato $\hat{Q}_r^+(\vec{k}) |0\rangle$ rappresenta lo stato a 1-particella
 stato a 1 fotone $n_{\vec{k}, r} = 1$

" " $\frac{1}{\sqrt{2}} \hat{Q}_r^+(\vec{k}) \hat{Q}_r^+(\vec{k}) |0\rangle$ rappresenta lo stato a 2 fotoni
 nello stesso stato

" " $\hat{Q}_r^+(\vec{k}) \hat{Q}_{r'}^+(\vec{k}') |0\rangle$ " in 2 stati differenti

In generale, stati a "n" fotoni:

L'operatore numero, $\hat{N}_r(\vec{k}) = \hat{Q}_r^+(\vec{k}) \hat{Q}_r(\vec{k})$ ha autovalori $n_{\vec{k}, r} = 0, 1, 2, \dots$

gli autovalori $|n_{\vec{k}, r}\rangle = \frac{(\hat{Q}_r^+(\vec{k}))^{n_{\vec{k}, r}}}{\sqrt{n_{\vec{k}, r}!}} |0\rangle$ sono stati a n fotoni identici

gli autovalori di \hat{H} saranno quindi

$$|n_{\vec{k}_1, r_1}, n_{\vec{k}_2, r_2}, \dots, n_{\vec{k}_i, r_i}, \dots\rangle = \prod_{\vec{k}_i} \prod_{r_i} |n_{\vec{k}_i, r_i}\rangle$$

e gli autovalori $\sum_{\vec{k}} \sum_r \hbar \omega_{\vec{k}} (n_{\vec{k}, r} + \frac{1}{2})$

Abbiamo un formalismo per trattare stati con numero di fotoni variabile
 Inoltre $[\hat{Q}_r^+(\vec{k}), \hat{Q}_{r'}^+(\vec{k}')] = 0$ e $\vec{k} \neq \vec{k}'$ $\Rightarrow |n_{\vec{k}_1, r_1}, n_{\vec{k}_2, r_2}, \dots\rangle$ è simmetrico per scambio di fotoni
 \Rightarrow Bose-Einstein statist.

Dal momento che lo scala assoluto di energia è arbitraria = 17
 possiamo considerare lo scala in cui l'energia dello stato fondamentale è 0

$$\hat{H} |0\rangle = 0 \quad |0\rangle \text{ stato di vuoto}$$

ovvero
$$\hat{H} = \sum_{\vec{k}} \sum_r \hbar \omega \hat{Q}_r^+(\vec{k}) \hat{Q}_r(\vec{k})$$

Il fatto che $\hat{Q}_r(\vec{k})$ e $\hat{Q}_r^+(\vec{k})$ siano operatori di creazione e distruzione di fotoni, è giustificato dal calcolo dell'impulso del campo elettromagnetico

$$\vec{P} = \frac{1}{c} \int (\vec{E} \times \vec{B}) d^3x = \frac{1}{c} \int \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) \times (\nabla \times \vec{A}) d^3x =$$

si conviene fare $\vec{k} \leftrightarrow -\vec{k}$ in $\sum_{\vec{k}}$

vettore di Poynting
 (flusso di energia per
 unità di superficie e tempo)

$$= \sum_{\vec{k}} \sum_r \frac{\hbar \vec{k}}{2} \left(\hat{Q}_r^+(\vec{k}) \hat{Q}_r(\vec{k}) + \hat{Q}_r(\vec{k}) \hat{Q}_r^+(\vec{k}) \right)$$

$$= \sum_{\vec{k}} \sum_r \hbar \vec{k} \left(\hat{N}_r(\vec{k}) + \frac{1}{2} \right) = \sum_{\vec{k}} \sum_r \hbar \vec{k} \hat{N}_r(\vec{k})$$

dove $\frac{1}{c} \frac{e^2}{2} \frac{\hbar}{\omega \omega'} \frac{\omega}{c} \hat{Q}_r(\vec{k}) \hat{Q}_{r'}^+(\vec{k}') \vec{E}(\vec{k}) \times (\vec{k}' \times \vec{E}_{r'}(\vec{k}')) \frac{1}{V} \int e^{i(\vec{k}-\vec{k}') \cdot \vec{x}} d^3x = \frac{\hbar \vec{k}}{2} \hat{Q}_r(\vec{k}) \hat{Q}_{r'}^+(\vec{k}') \frac{\delta_{\vec{k}, -\vec{k}'}}{\hbar \omega'}$

N.B. $\vec{E}_1(\vec{k}) \times (\vec{k} \times \vec{E}_2(\vec{k})) = 0$, $\vec{E}_1(\vec{k}') \times (\vec{k} \times \vec{E}_1(\vec{k})) = \vec{k}$
 $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$

impulso totale del
 campo elettromagnetico
 quantizzato è la
 somma degli impulsi
 degli stati fotonici

$$\hat{H} \hat{Q}_r^+(\vec{k}) |0\rangle = \hbar \omega \hat{Q}_r^+(\vec{k}) |0\rangle$$

$$\vec{P} \hat{Q}_r^+(\vec{k}) |0\rangle = \hbar \vec{k} \hat{Q}_r^+(\vec{k}) |0\rangle$$

La massa associata ai fotoni è quindi

$$m^2 c^4 = \vec{E}^2 - |\vec{P}|^2 c^2 = (\hbar \omega)^2 - (\hbar |\vec{k}| c)^2 = 0$$

fotoni sono stati
 a massa nulla

I fotoni sono caratterizzati anche dal vettore di polarizzazione $\vec{E}_r(\vec{k})$,
 siccome \vec{E} si trasforma come un tri-vettore associato al fotone
 uno momento angolare intrinseco (SPIN) pari a 1

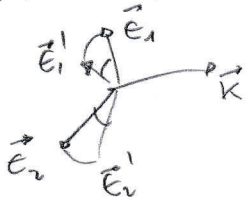
Consideriamo i vettori (complessi) = 18

$$\vec{E}_{\pm}(\vec{k}) = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{E}_1(\vec{k}) \pm i \vec{E}_2(\vec{k}))$$

vettori di polarizzazione circolare

Sotto rotazioni infinitesime attorno alla direzione di propagazione \vec{k}

$$\vec{E}_{\pm}(\vec{k}) \xrightarrow{\delta\phi \text{ attorno a } \vec{k}} \vec{E}'_{\pm}(\vec{k}) = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{E}_1(\vec{k}) + \delta\phi \vec{E}_2(\vec{k}) \pm i(\vec{E}_2(\vec{k}) - \delta\phi \vec{E}_1(\vec{k})))$$



$$= \vec{E}_{\pm}(\vec{k}) + \delta \vec{E}_{\pm}(\vec{k}) \mp i(\vec{E}_1(\vec{k}) \pm i \vec{E}_2(\vec{k}))$$

$$\Rightarrow \delta \vec{E}_{\pm}(\vec{k}) = \mp \frac{\delta\phi}{\sqrt{2}} (\vec{E}_2(\vec{k}) \mp i \vec{E}_1(\vec{k}))$$

$$= \mp i \delta\phi \vec{E}_{\pm}(\vec{k})$$

Associamo quindi ai vettori $\vec{E}_{\pm}(\vec{k})$ le componenti $m = \pm 1$ degli stati di spin quantizzati lungo l'asse di propagazione \vec{k} . Se $\vec{E}_r(\vec{k})$ fosse lungo l'asse di propagazione \vec{k} avremmo lo stato $m=0$ (e chiamante $\vec{E}_r(\vec{k})$ lungo \vec{k} non varrebbe per rotazioni lungo \vec{k}).

Tuttavia lo stato con $m=0$ non esiste a causa della condizione trasversa. lo spin del fotone è solo $\vec{E}_{\pm}(\vec{k})$ ovvero è parallelo o antiparallelo a \vec{k} .

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \Rightarrow \vec{k} \cdot \vec{A} = 0 \Rightarrow \vec{k} \cdot \vec{E}_r(\vec{k}) = 0$$

Notiamo che l'assenza dello stato $m=0$ ha un significato che è invariante per trasformazioni di Lorentz solo per particelle di massa nulla.

Per una particella con massa non nulla è sempre possibile effettuare una trasformazione di Lorentz per cui nel nuovo sistema di riferimento la particella è "a riposo" $\vec{k}=0$. In questo sistema lo spin non può essere parallelo a nulla.

Si verifica facilmente che

$$\vec{E}_{\pm}(\vec{k}) \cdot \vec{E}_{\pm}^*(\vec{k}) = -\vec{E}_{\pm}(\vec{k}) \cdot \vec{E}_{\mp}(\vec{k}) = 1$$

$$\vec{k} \cdot \vec{E}_{\pm}(\vec{k}) = 0 \quad \vec{E}_{\pm}(\vec{k}) \cdot \vec{E}_{\mp}^*(\vec{k}) = \vec{E}_{\pm}(\vec{k}) \cdot \vec{E}_{\pm}(\vec{k}) = 0$$

Altrimenti avremmo potuto espandere $\vec{A}(\vec{x})$ nelle basi $\vec{E}_{\pm}(\vec{k})$ anziché $\vec{E}_{1,2}(\vec{k})$

Per creare uno stato di un fotone con polarizzazione circolare dobbiamo: = 19
 quindi applicare

$$\hat{Q}_{\pm}^+(\vec{k}) = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{Q}_1^+ \mp i \hat{Q}_2^+)$$

al moto $|0\rangle$. Analogamente $\hat{Q}_r^+(\vec{k})|0\rangle$ è una sovrapposizione
 di stati con $m=1$ e $m=-1$.

$$\hat{Q}_1^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{Q}_+^+ + \hat{Q}_-^+)$$

Il postulato di quantizzazione applicato alle variabili canoniche
 dell'oscillatore armonico comporta che le "eccitazioni quantistiche"
 del campo elettromagnetico sono associate a particelle di massa nulla
 e spin uno: i fotoni.

In generale in QFT da:

"ad ogni campo è associata una particella con massa e spin fissati"
 e in generale il formalismo di quantizzazione canonica per un campo generico
 è analogo a quello descritto per il campo elettromagnetico.

Evoluzione temporale del campo quantizzato

$\hat{Q}_r(\vec{k}, t)$ e $\hat{Q}_r^+(\vec{k}, t)$ sono operatori che dipendono dal tempo e soddisfano
 l'equazione del moto di Heisenberg

$$\dot{\hat{Q}}_r(\vec{k}, t) = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{Q}_r(\vec{k}, t)] = \frac{i}{\hbar} \sum_{\vec{k}'} \sum_{r'} \hbar \omega' \left[\hat{N}_{r'}(\vec{k}'), \hat{Q}_r(\vec{k}, t) \right] = -i\omega \hat{Q}_r(\vec{k}, t) - \delta_{r1} \delta_{\vec{k}\vec{k}'} \hat{Q}_r(\vec{k}', t)$$

$$\ddot{\hat{Q}}_r(\vec{k}, t) = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \dot{\hat{Q}}_r(\vec{k}, t)] = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, -i\omega \hat{Q}_r(\vec{k}, t)] = -\omega^2 \hat{Q}_r(\vec{k}, t)$$

ovvero la stessa equazione soddisfatta dai coefficienti $Q_r(\vec{k}, t)$ del caso classico

Analogamente $\dot{\hat{Q}}_r^+(\vec{k}, t) = i\omega \hat{Q}_r^+(\vec{k}, t)$; $\ddot{\hat{Q}}_r^+(\vec{k}, t) = -\omega^2 \hat{Q}_r^+(\vec{k}, t)$

Pertanto il campo quantizzato $\hat{A}(x)$ soddisfa le stesse eq. del moto del
 corrispondente campo classico

Infine otteniamo quindi:

$$\hat{Q}_r(\vec{k}, t) = \hat{Q}_r(\vec{k}, 0) e^{-i\omega t} \quad , \quad \hat{Q}_r^+(\vec{k}, t) = \hat{Q}_r^+(\vec{k}, 0) e^{i\omega t}$$

$$\hat{A}(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \sum_r \left[\hat{Q}_r(\vec{k}, 0) \vec{E}_r(\vec{k}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} + \hat{Q}_r^+(\vec{k}, 0) \vec{E}_r(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right] = \hat{A}^+(\vec{x}) + \hat{A}^-(\vec{x})$$

(positive/negative frequency parts)

dove $\hat{A} = \hat{A}^+$ è un operatore hermitiano (analogo a $\vec{A}(\vec{x})$ classico e una funzione reale).

Ricordare: \vec{x} e t che compare nell'espressione $\hat{A}(\vec{x}, t)$ NON sono operatori quantistici ma parametri da cui \hat{A} dipende (esattamente come per t nella meccanica quantistica non relativistica). \vec{x} e t NON sono le coordinate spazio-temporali del fotone

• Fluttuazioni quantistiche e relazioni di indeterminazione:

Siccome $[\hat{Q}_r(\vec{k}), \hat{N}_{r'}(\vec{k}')] = \delta_{\vec{k}\vec{k}'} \delta_{rr'} \hat{Q}_r(\vec{k})$ è chiaro che

$$\hat{N}_r(\vec{k}) \text{ e } \hat{N} \equiv \sum_{\vec{k}} \sum_r \hat{N}_r(\vec{k}) \text{ NON commutano con } \hat{A}, \hat{E} \text{ e } \hat{B}$$

però se il numero totale di fotoni è fissato i valori dei campi possono essere determinati solo con una certa incertezza - ciò è vero anche per lo stato di vuoto $|0\rangle$.

Infatti dato $\hat{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \hat{A}}{\partial t}$ abbiamo che $\langle 0 | \hat{E} | 0 \rangle = 0$ (poiché $\langle 0 | \hat{Q}_r(\vec{k}) | 0 \rangle = 0$)

però l'indeterminazione $\Delta_{\psi}^2 \hat{O} \equiv \langle \hat{O}^2 \rangle_{\psi} - \langle \hat{O} \rangle_{\psi}^2$

$$\Delta_{|0\rangle}^2 \hat{E} = \langle 0 | \hat{E} \cdot \hat{E} | 0 \rangle - |\langle 0 | \hat{E} | 0 \rangle|^2 = \langle 0 | \hat{E} \cdot \hat{E} | 0 \rangle = \infty$$

numero di occupazione fissato \Rightarrow valore del campo completamente incerto
 inoltre uno stato con # di fotoni fissato NON corrisponde a nessuno stato classico poiché $\langle n | \hat{E} | n \rangle = 0$. Si possono però definire gli stati coerenti $\hat{Q}_r(\vec{k}) | \alpha \rangle = \alpha | \alpha \rangle$ per cui $\Delta_{\alpha}^2 \hat{E}$ è minimo

Consideriamo un generico campo $\phi_r(x)$ (classico) dove $r=1, \dots, n$ sono le "componenti" di ϕ (ad esempio le componenti di $\vec{A}(x)$).

Per procedere alla quantizzazione partiamo, come nel caso del campo elettromagnetico, da un volume finito V che viene suddiviso in N piccole regioni: $\delta\vec{x}_i$ con $i=1, \dots, N$ (V volume tridimensionale).

Il campo nell'elemento $\delta\vec{x}_i$ sarà quindi $\phi_r(\vec{x}_i, t)$ $r=1, \dots, n; i=1, \dots, N$

La lagrangiana del sistema è esprimibile come

$$L(t) = \sum_i \delta\vec{x}_i \mathcal{L}_i(\phi_r(\vec{x}_i, t), \phi_r(\vec{x}'_i, t), \dot{\phi}(\vec{x}_i, t))$$

densità lagrangiana
del campo nell'elemento
di volume $\delta\vec{x}_i$

derivata spaziale sostituita
da differenzia finita fra
punti vicini

Per gli impulsi coniugati abbiamo \nearrow campo coniugato

$$p_{r,i}(t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_r(\vec{x}_i, t)} = \delta\vec{x}_i \frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial \dot{\phi}_r(\vec{x}_i, t)} = \pi_r(\vec{x}_i, t) \delta\vec{x}_i$$

e l'hamiltoniana è data da $\xrightarrow{\text{densità hamiltoniana}}$

$$H = \sum_i \delta\vec{x}_i \mathcal{H}_i = \sum_i \delta\vec{x}_i (\pi_r(\vec{x}_i, t) \dot{\phi}_r(\vec{x}_i, t) - \mathcal{L})$$

Nel limite $N \rightarrow \infty$ (e $V \rightarrow \infty$) abbiamo che $\delta\vec{x}_i \rightarrow 0$ e

$$\phi_r(\vec{x}_i, t) \rightarrow \phi_r(x) ; \quad \pi_r(\vec{x}_i, t) \rightarrow \pi_r(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_r} ; \quad L(t) = \int d^3\vec{x} \mathcal{L}(\phi_r, \partial^\mu \phi_r)$$

$$H = \int d^3\vec{x} \mathcal{H}(x) = \int d^3\vec{x} (\pi_r(x) \dot{\phi}_r(x) - \mathcal{L}(\phi_r, \partial^\mu \phi_r))$$

a questo punto è possibile espandere il campo $\phi_r(x)$ in serie di Fourier scrivendo $\phi_r(x) = \phi_{r,+}(x) + \phi_{r,-}(x)$ (frequenze positive/negative)

$$\left\{ \begin{aligned} \phi_{r,+}(x) &= \sum_{\vec{k}} \left(\frac{\hbar c^2}{2V\omega_{\vec{k}}} \right) a_r(\vec{k}) e^{-i\vec{k}x} \\ \phi_{r,-}(x) &= \sum_{\vec{k}} \left(\frac{\hbar c^2}{2V\omega_{\vec{k}}} \right) a_r^+(\vec{k}) e^{i\vec{k}x} \end{aligned} \right.$$

dove abbiamo considerato $\phi(x)$ reale $\Rightarrow \phi(x) = \phi^+(x)$

Imponendo le condizioni di quantizzazione per gli operatori $a(\vec{k})$ e $a^+(\vec{k})$

$$\left\{ \begin{aligned} [a_r(\vec{k}), a_s^+(\vec{k}')] &= \delta_{rs} \delta_{\vec{k}\vec{k}'} && \text{relaz. di commutazione} \\ [a_r(\vec{k}), a_s(\vec{k}')] &= [a_r^+(\vec{k}), a_s^+(\vec{k}')] = 0 \end{aligned} \right.$$

queste equazioni equivolgono (dimostrare per ESERCIZIO) alle seguenti relazioni di commutazione A TEMPI UGUALI per i campi ϕ, ϕ^+

$$\left\{ \begin{aligned} [\phi_r(\vec{x}_i, t), \pi_s(\vec{x}_j, t)] &= i\hbar \frac{\delta_{rs} \delta_{ij}}{\delta \vec{x}_i} && (\text{N.B. } \pi_{r,i}(t) = \pi_r(\vec{x}_i, t) \delta \vec{x}_i) \\ [\phi_r(\vec{x}_i, t), \phi_s(\vec{x}_j, t)] &= [\pi_r(\vec{x}_i, t), \pi_s(\vec{x}_j, t)] = 0 \end{aligned} \right.$$

che nel limite $N \rightarrow \infty$ ($V \rightarrow \infty$) diventano

$$\left\{ \begin{aligned} [\phi_r(\vec{x}, t), \pi_s(\vec{x}', t)] &= i\hbar \delta_{rs} \delta(\vec{x} - \vec{x}') \\ [\phi_r(\vec{x}, t), \phi_s(\vec{x}', t)] &= [\pi_r(\vec{x}, t), \pi_s(\vec{x}', t)] = 0 \end{aligned} \right.$$

infatti $\lim_{\delta \vec{x}_i \rightarrow 0} \frac{\delta_{ij}}{\delta \vec{x}_i} = \delta(\vec{x}_i - \vec{x}_j)$

$\phi(x) \rightarrow \phi'(x') = \phi(x)$, (campo di Klein-Gordon)

Abbiamo che $\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \mu^2 \phi^2)$

$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \frac{1}{c^2} \dot{\phi}(x)$ e $(\square + \mu^2) \phi(x) = 0$ eq. del moto

le relazioni di commutazione a tempi uguali sono:

$$\left\{ \begin{aligned} [\phi(\vec{x}, t), \dot{\phi}(\vec{x}', t)] &= i \hbar c^2 \delta(\vec{x} - \vec{x}') \\ [\phi(\vec{x}, t), \phi(\vec{x}', t)] &= [\dot{\phi}(\vec{x}, t), \dot{\phi}(\vec{x}', t)] = 0 \end{aligned} \right.$$

In maniera simile al campo elettromagnetico espandiamo $\phi(x)$ in serie di

Fourier, ponendo $\phi(x) = \phi_+(x) + \phi_-(x)$ termini a frequenza positiva/negativa

$\phi_+(x) = \sum_{\vec{k}} \left(\frac{\hbar c^2}{2V \omega_{\vec{k}}} \right) a(\vec{k}) e^{-i k x}$ => $\phi(x) = \phi_+(x)$

$\phi_-(x) = \sum_{\vec{k}} \left(\frac{\hbar c^2}{2V \omega_{\vec{k}}} \right) a^\dagger(\vec{k}) e^{i k x}$

dove in questo caso $(\square + \mu^2) \phi(x) = 0 \Rightarrow (-\omega_{\vec{k}}^2 + \vec{k}^2 + \mu^2) \phi(x) = 0$

$\Rightarrow \omega_{\vec{k}}^2 = \frac{\omega_{\vec{k}}^2}{c^2} = \vec{k}^2 + \mu^2$ dove $\mu = \frac{c}{\hbar} m$

$\Rightarrow E = \hbar \omega_{\vec{k}} = + \sqrt{m^2 c^4 + c^2 (\hbar \vec{k})^2}$

Le condizioni di quantizzazione sugli operatori $a(\vec{k})$ e $a^\dagger(\vec{k})$

$$\left\{ \begin{aligned} [a(\vec{k}), a^\dagger(\vec{k}')] &= \delta_{\vec{k}\vec{k}'} \\ [a(\vec{k}), a(\vec{k}')] &= [a^\dagger(\vec{k}), a^\dagger(\vec{k}')] = 0 \end{aligned} \right.$$

relazioni di commutazione dell'oscillatore armonico

equivolgono alle condizioni di quantizzazione nel comp.

l'ordine degli operatori di creazione (o distruzione) fra di loro è ovviamente irrilevante (poiché commutano).

Perciò il valore di aspettazione nel vuoto di un "prodotto normale" è nullo: $\langle 0 | N(AB...L) | 0 \rangle = 0$ (per ogni campo)

È quindi sufficiente definire la densità lagrangiana \mathcal{L} e tutte le osservabili come prodotti normali. Ciò è equivalente a scegliere un determinato ordinamento dei campi classici prima della quantizzazione.

In questo modo ad esempio

$$H = \sum_{\vec{k}} \hbar \omega_{\vec{k}} a^{\dagger}(\vec{k}) a(\vec{k}) \quad \text{e} \quad \langle 0 | H | 0 \rangle = 0$$

Partendo dallo stato fondamentale $|0\rangle$ è quindi possibile costruire gli stati a n particelle

-) $a^{\dagger}(\vec{k}) |0\rangle$ stato a 1-particella (scalen e massa m) di impulso \vec{k}
-) $a^{\dagger}(\vec{k}) a^{\dagger}(\vec{k}') |0\rangle$, stato a 2-particelle di impulsi \vec{k} e $\vec{k}' \neq \vec{k}$
-) $\frac{1}{\sqrt{2}} a^{\dagger}(\vec{k}) a^{\dagger}(\vec{k}) |0\rangle$, " " " " "
-) ... analogamente per gli stati a n particelle

con $\langle 0 | 0 \rangle = 1$ anche gli altri stati sono normalizzati correttamente

Le particelle del campo di Klein-Gordon sono scalari \rightarrow bosoni

e infatti $a^{\dagger}(\vec{k}) a^{\dagger}(\vec{k}') |0\rangle = a^{\dagger}(\vec{k}') a^{\dagger}(\vec{k}) |0\rangle$

ovvero gli stati sono SIMMETRICI per scambio di particelle

e $n(\vec{k}) = 0, 1, 2, \dots$ può assumere qualsiasi valore

Consideriamo ora il caso di un campo scalare complesso per cui

$$\mathcal{L} = N \left(\partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi - \mu^2 \phi^\dagger \phi \right)$$

e $\phi^\dagger \neq \phi$, pertanto trattiamo ϕ e ϕ^\dagger come campi indipendenti

Per i campi coniugati abbiamo

$$\pi(x) = \frac{1}{c^2} \dot{\phi}^\dagger(x), \quad \pi^\dagger(x) = \frac{1}{c^2} \dot{\phi}(x)$$

mentre per le relazioni di commutazione a temp. uguali

$$\left. \begin{aligned} & [\phi(\bar{x}, t), \dot{\phi}^\dagger(\bar{x}', t)] = i \hbar c^2 \delta(\bar{x} - \bar{x}') \\ & [\phi(\bar{x}, t), \phi(\bar{x}', t)] = [\phi(\bar{x}, t), \phi^\dagger(\bar{x}', t)] = [\dot{\phi}(\bar{x}, t), \dot{\phi}(\bar{x}', t)] = \\ & = [\dot{\phi}(\bar{x}, t), \dot{\phi}^\dagger(\bar{x}', t)] = [\phi(\bar{x}, t), \dot{\phi}(\bar{x}, t)] = [\dot{\phi}^\dagger(\bar{x}, t), \dot{\phi}^\dagger(\bar{x}', t)] = 0 \end{aligned} \right\}$$

L'espansione di Fourier per i campi $\phi(x)$ e $\phi^\dagger(x)$ sarà quindi

$$\phi(x) = \phi_+(x) + \phi_-(x) = \sum_{\vec{k}} \left(\frac{\hbar c^2}{2V\omega_{\vec{k}}} \right)^{1/2} \left(a(\vec{k}) e^{-i\vec{k}x} + b^\dagger(\vec{k}) e^{i\vec{k}x} \right)$$

$$\phi^\dagger(x) = \phi_+^\dagger(x) + \phi_-^\dagger(x) = \sum_{\vec{k}} \left(\frac{\hbar c^2}{2V\omega_{\vec{k}}} \right)^{1/2} \left(b(\vec{k}) e^{-i\vec{k}x} + a^\dagger(\vec{k}) e^{i\vec{k}x} \right)$$

parte a frequenza positiva/negativa

Per gli operatori $a(\vec{k})$ e $b(\vec{k})$ ricaviamo quindi le relat. di commutaz.

$$\left. \begin{aligned} & [a(\vec{k}), a^\dagger(\vec{k}')] = [b(\vec{k}), b^\dagger(\vec{k}')] = \delta_{\vec{k}\vec{k}'} \\ & [a(\vec{k}), a(\vec{k}')] = [b(\vec{k}), b(\vec{k}')] = [a(\vec{k}), b(\vec{k}')] = [a^\dagger(\vec{k}), b^\dagger(\vec{k}')] = 0 \end{aligned} \right\}$$

e gli operatori $a(\vec{k})$, $a^\dagger(\vec{k})$, $b(\vec{k})$, $b^\dagger(\vec{k})$ rappresentano gli operatori di creazione e distruzione di due tipi differenti di particelle

$$N_a(\vec{k}) = a^\dagger(\vec{k}) a(\vec{k}), \quad N_b(\vec{k}) = b^\dagger(\vec{k}) b(\vec{k})$$

A partire dallo stato fondamentale è quindi possibile costruire gli stati di n_a particelle di tipo "a" e n_b di tipo "b", inoltre ovviamente

=27

$$a(\vec{k})|0\rangle = b(\vec{k})|0\rangle = 0 \quad \forall \vec{k}$$

$$\phi_-(x)|0\rangle = \phi_+^\dagger(x)|0\rangle = 0 \quad \forall x$$

Abbiamo quindi $H = \sum_{\vec{k}} \hbar \omega_{\vec{k}} (N_a(\vec{k}) + N_b(\vec{k}))$

Invece che trattare i campi $\phi(x)$ e $\phi^\dagger(x)$ indipendentemente è possibile introdurre i campi scalari reali $\phi_1(x)$ e $\phi_2(x)$ come

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_1(x) + i\phi_2(x)) \quad \text{e} \quad \phi^\dagger(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_1(x) - i\phi_2(x))$$

con $\phi_1^\dagger = \phi_1$ e $\phi_2^\dagger = \phi_2$, (con ϕ_1 e ϕ_2 campi indipendenti).

La trattazione in termini di ϕ_1 e ϕ_2 è analoga a quella in termini di ϕ e ϕ^\dagger

Vogliamo ora riscrivere le rel. di commutazione a tempi uguali in forma covariante. Consideriamo il caso del campo scalare reale $\phi(x) = \phi_+(x) + \phi_-(x)$

abbiamo che $[\phi_+(x), \phi_+(y)] = [\phi_-(x), \phi_-(y)] = 0$

per tanto $[\phi(x), \phi(y)] = [\phi_+(x), \phi_-(y)] + [\phi_-(x), \phi_+(y)]$

$$e [\phi_+(x), \phi_-(y)] = \frac{\hbar c^2}{2V} \sum_{\vec{k}, \vec{k}'} \frac{1}{(\omega_{\vec{k}} \omega_{\vec{k}'})^{1/2}} \underbrace{[a(\vec{k}), a^\dagger(\vec{k}')]_{\delta_{\vec{k}\vec{k}'}}} e^{-i\vec{k}x + i\vec{k}'y} =$$

$$= \frac{\hbar c^2}{2(2\pi)^3} \int \frac{d^3\vec{k}}{\omega_{\vec{k}}} e^{-i\vec{k}(x-y)} = i\hbar c \Delta^+(x-y)$$

$$\frac{1}{V} \sum_{\vec{k}} \xrightarrow{V \rightarrow \infty} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{k}$$

dove $\Delta^+(x) \equiv \frac{-i c}{2(2\pi)^3} \int \frac{d^3\vec{k}}{\omega_{\vec{k}}} e^{-i\vec{k}x}$, $k_0 = \frac{\omega_{\vec{k}}}{c}$

e $[\phi_-(x), \phi_+(y)] = -i\hbar c \Delta^+(y-x) \equiv i\hbar c \Delta^-(x-y)$

e $[\phi(x), \phi(y)] = i\hbar c (\Delta^+(x-y) + \Delta^-(x-y)) \equiv i\hbar c \Delta(x-y)$

con $\Delta(x) = \Delta^+(x) + \Delta^-(x) = \frac{-c}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\vec{k}}{\omega_{\vec{k}}} \sin \vec{k}x = \frac{-i}{(2\pi)^3} \int d^4k \delta(k^2 - \mu^2) \epsilon(k_0) e^{-i\vec{k}x}$

dove $d^4k = d^3\vec{k} dk_0$ e $\epsilon(k_0) = \frac{k_0}{|k_0|} = \begin{cases} 1 & \text{se } k_0 > 0 \\ -1 & \text{se } k_0 < 0 \end{cases}$

e $\delta(k^2 - \mu^2) = \delta(k_0^2 - \frac{\omega_{\vec{k}}^2}{c^2} + (\frac{\omega_{\vec{k}}^2}{c^2} - \vec{k}^2 - \mu^2)) = \frac{c}{2\omega_{\vec{k}}} (\delta(k_0 - \frac{\omega_{\vec{k}}}{c}) + \delta(k_0 + \frac{\omega_{\vec{k}}}{c}))$

$\delta(f(x)) = \sum_i \frac{\delta(x-x_i)}{|f'(x_i)|}$ x_i : radici di $f(x)$

$\Rightarrow \Delta(x)$ è invariante di Lorentz

integrale pari di funzione dispari $\int \frac{d^3\vec{k}}{\omega_{\vec{k}}} \sin \vec{k}\vec{x}$

e $[\phi(\vec{x}, t), \phi(\vec{y}, t)] = i\hbar c \Delta(\vec{x}-\vec{y}, 0) = 0$

l'invarianza di Lorentz di $\Delta(x)$ ha una conseguenza fisica molto importante

$[\phi(x), \phi(y)] = i\hbar \Delta(x-y) = 0$, per $(x-y)^2 < 0$

(esiste un sistema di riferimento in cui gli eventi in x e y sono simultanei)

i campi in due punti dello spaziotempo x e y separati da un intervallo di tipo spazio COMUTANO

$c(x_0 - y_0)^2 < (\vec{x} - \vec{y})^2$
space-like separation

le misure che coinvolgono i campi non interferiscono fra di loro se $(x-y)^2 < 0$

MICROCAUSALITA' (l'interferenza dovrebbe essere generata da un segnale che viaggia a velocità superiore a quella della luce).

Sia \hat{O} un operatore (che non dipende esplicitamente dal tempo)

l'equazione di evoluzione temporale alla Heisenberg è

$$i\hbar \frac{d\hat{O}(t)}{dt} = [\hat{O}(t), H]$$

per tanto \hat{O} è una costante del moto se $[\hat{O}, H] = 0$.

Le costanti del moto sono legate alle proprietà di invarianza del sistema attraverso il teorema di Noether.

Dal punto di vista quantistico consideriamo delle trasformazioni unitarie U , $UU^\dagger = 1$ tale che

$$|\psi\rangle \rightarrow |\psi'\rangle = U|\psi\rangle \quad \text{e} \quad \hat{O} \rightarrow \hat{O}' = U\hat{O}U^\dagger$$

Le trasformazioni unitarie, i prodotti scalari, e quindi le predizioni della teoria, sono invarianti.

Nel caso di trasformazioni continue l'operatore U può essere scritto come

$$U = e^{i\alpha T}, \quad \text{dove } \alpha \in \mathbb{R} \text{ e } T = T^\dagger \text{ (oper. hermitiana)}$$

Per trasformazioni infinitesime $\delta\alpha \rightarrow 0$, $U \approx 1 + i\delta\alpha T$

$$\text{per tanto } \hat{O}' = \hat{O} + \delta\hat{O} = (1 + i\delta\alpha T) \hat{O} (1 - i\delta\alpha T) \Rightarrow \delta\hat{O} = i\delta\alpha [T, \hat{O}]$$

Se l'hamiltoniana è invariante sotto la trasformazione generata da U allora:

$$H \text{ è invariante } \Rightarrow \delta H = 0 \Rightarrow [T, H] = 0$$

ovvero T è una costante del moto

nel caso di una teoria di campo derivata da una densità di Lagrangiana \mathcal{L} è possibile costruire quantità conservate a partire dall'invarianza della Lagrangiana sotto trasformazioni di simmetria tramite il teorema di Noether = 29

Partiamo dalla trasformazione del campo

$$\phi_r(x) \rightarrow \phi_r'(x) = \phi_r(x) + \delta\phi_r(x)$$

che induce una variazione della densità Lagrangiana

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_r} \delta\phi_r + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_r)} \delta(\partial_\mu\phi_r) = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_r)} \delta\phi_r \right)$$

dall'eq. di Eulero-Lagrange $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_r} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_r)} \right) = 0$

dove le somme sugli indici r e μ sono sottintese.

Se \mathcal{L} è invariante per la trasformazione $\phi_r \rightarrow \phi_r + \delta\phi_r \rightarrow \delta\mathcal{L} = 0$ e perciò $f^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_r)} \delta\phi_r$ è un quadrivettore conservato $\partial_\mu f^\mu = 0$

Questo è il teorema di Noether: l'invarianza di \mathcal{L} sotto una trasformazione implica una quantità conservata detta "corrente".

Definiamo ora $F^\mu(t) = \int d^3\vec{x} f^\mu(\vec{x}, t)$, - da $\partial_\mu f^\mu = 0$ otteniamo

$$\frac{1}{c} \frac{dF^0(t)}{dt} = - \int d^3\vec{x} \frac{\partial}{\partial x^i} f^i(\vec{x}, t) = \oint_S \vec{f} \cdot d\vec{S} = 0$$

$\left. \begin{array}{l} \text{superficie che} \\ \text{racchiude } V \end{array} \right\} \text{elemento di} \\ \text{superficie} \\ \text{normale } = S$

dove abbiamo usato il teorema della divergenza $\int d^3\vec{x} \nabla \cdot \vec{f}(\vec{x}, t) = \oint_S \vec{f} \cdot d\vec{S}$ e il fatto che i campi (e quindi f^μ) si annullano al bordo ($\delta\phi_r \rightarrow 0$ per $x \rightarrow \infty$)

$$F^0(t) = \int d^3\vec{x} f^0(\vec{x}, t) = c \int d^3\vec{x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\dot{\phi}_r)} \delta\phi_r = c \int d^3\vec{x} \pi_r(\vec{x}) \delta\phi_r$$

è una quantità conservata (nel tempo) $\frac{dF^0(t)}{dt} = 0$

che corrisponde all'operatore unitario $U = e^{i\alpha F^0}$

$f^0(\vec{x})$ è detta (densità) di quadricorrente conservata $\partial_\mu f^\mu(\vec{x}) = 0$ della quantità F^0

Applicando $\partial_\mu f^\mu = 0$ ad un volume "finito" Ω (non a tutto lo spazio) con superficie σ abbiamo che

$$\frac{1}{c} \frac{dF^0(t)}{dt} = - \oint_{\sigma} \vec{f} \cdot d\vec{\sigma}$$

La variazione di F^0 nel volume Ω per unità di tempo è pari al flusso della corrente \vec{f} che passa attraverso σ (nell'unità di tempo).

Consideriamo il caso di un campo complesso ϕ_r (i.e. un operatore non hermitiano nella teoria quantistica) $\phi_r \neq \phi_r^\dagger$. \mathcal{L} invariante sotto la trasformazione

$$\phi_r \rightarrow \phi_r' = \phi_r + \delta\phi_r = e^{i\varepsilon} \phi_r \stackrel{\varepsilon \rightarrow 0}{\approx} (1 + i\varepsilon) \phi_r$$

con $\varepsilon \in \mathbb{R}$

$$\phi_r^\dagger \rightarrow \phi_r^{\dagger'} = \phi_r^\dagger + \delta\phi_r^\dagger = e^{-i\varepsilon} \phi_r^\dagger \stackrel{\varepsilon \rightarrow 0}{\approx} (1 - i\varepsilon) \phi_r^\dagger$$

$$\Rightarrow \delta\phi_r = i\varepsilon \phi_r, \quad \delta\phi_r^\dagger = -i\varepsilon \phi_r^\dagger$$

$$F^0(t) = i\varepsilon \int d^3\vec{x} (\pi_r(\vec{x}) \phi_r(\vec{x}) - \pi_r^\dagger(\vec{x}) \phi_r^\dagger(\vec{x})) \quad \text{è una quantità conservata}$$

Poniamo $Q \equiv -\frac{q}{\hbar c \varepsilon} F^0 = -\frac{i q}{\hbar} \int d^3\vec{x} (\pi_r(\vec{x}) \phi_r(\vec{x}) - \pi_r^\dagger(\vec{x}) \phi_r^\dagger(\vec{x}))$

$$[Q(t), \phi_r(\vec{x}, t)] = -\frac{i q}{\hbar} \int d^3\vec{x}' [\pi_r(\vec{x}', t), \phi_r(\vec{x}, t)] \phi_r(\vec{x}', t) = -q \phi_r(\vec{x}, t) = -q \phi_r(\vec{x})$$

$$[\pi_r(\vec{x}', t), \phi_r(\vec{x}, t)] = i\hbar \delta_{rs} \delta(\vec{x} - \vec{x}')$$

La trasformazione di fase globale è quindi

$$U = e^{i\alpha Q} \quad UU^\dagger = 1$$

$$\phi'_r = U \phi_r U^\dagger = e^{i\alpha Q} \phi_r e^{-i\alpha Q} \stackrel{\alpha \rightarrow 0}{\approx} \phi_r + i\alpha [Q, \phi_r] = (1 - i\alpha g) \phi_r$$

dove g può essere la carica elettrica o di altro tipo.

Applichiamo ora il teorema di Noether per determinare le cariche conservate quando c'è invarianza del sistema sotto traslazioni e rotazioni.

Consideriamo traslazioni e rotazioni infinitesime $(\Lambda_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + \epsilon_{\mu\nu})$

$$x_\mu \rightarrow x'_\mu = x_\mu + \delta x_\mu = x_\mu + \epsilon_{\mu\nu} x^\nu + \delta_\mu = \Lambda_{\mu\nu} x^\nu + \delta_\mu$$

dove δ_μ è la traslat. infinitesima e $\epsilon_{\mu\nu}$ è il tensore di rotazione finitesimo

$$(\Lambda^\mu_\nu) = \delta^\mu_\nu - \epsilon_{\nu\mu} = \Lambda_{\nu\mu} = \delta_{\nu\mu} + \epsilon_{\nu\mu} \Rightarrow \epsilon_{\mu\nu} = -\epsilon_{\nu\mu} \text{ (antisimmetrico)}$$

Sotto trasformazioni di Lorentz omogenee ($\delta_\mu = 0$) $x'_\mu x'^\mu = (x_\mu + \epsilon_{\mu\nu} x^\nu)(x^\mu + \epsilon^{\mu\alpha} x_\alpha)$

Sotto trasformazioni di Poincaré ($\delta_\mu \neq 0$) è invariato l'intervallo $(x_\mu - x_{0,\mu})(x^\mu - x_0^\mu)$

$$= x_\mu x^\mu + \epsilon_{\mu\nu} x^\nu x^\mu + \epsilon^{\mu\alpha} x_\mu x_\alpha + \epsilon_{\mu\nu} \epsilon^{\mu\alpha} x^\nu x_\alpha$$

↓
ordine superiore

La corrispondente trasformazione sui campi $\phi_r(x)$

può essere scritta come \rightarrow variazione del campo quando varia anche l'argomento

$$\phi_r(x) \rightarrow \phi'_r(x') = \phi_r(x) + \delta_T \phi_r(x) = U(\Lambda, \delta) \phi_r(x') U^\dagger(\Lambda, \delta) = D_{rs}(\Lambda) \phi_s(x) = \phi_r(x) + \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu} S^{\mu\nu}_{rs} \phi_s(x)$$

e.g. $\phi_r(x) \rightarrow \phi'_r(x') = \phi_r(x)$ campo scalare ($D_{rs}(\Lambda) = \delta_{rs}$)

$A^\mu(x) \rightarrow A'^\mu(x') = \Lambda^{\mu\nu} A_\nu(x)$ campo vettoriale ($D_{rs}(\Lambda) = \Lambda_r^\sigma$) $\epsilon_{\mu\nu} = -\epsilon_{\nu\mu}$

(infatti, σ^μ generico: $\sigma'_\mu A'^\mu(x') = \sigma_\mu A^\mu(x) = \sigma_\mu A^\mu(\Lambda^{-1}x') \Rightarrow g_{\alpha\beta} \sigma'^\alpha A'^\beta(x') = g_{\mu\nu} \sigma^\mu A^\nu(\Lambda^{-1}x') = g_{\alpha\beta} \Lambda^\alpha_\mu \Lambda^\beta_\nu \sigma^\mu A^\nu(\Lambda^{-1}x')$

(dove $\delta^\nu_\lambda = \Lambda^{\mu\nu} \Lambda_{\mu\lambda} = \Lambda^{\mu\nu} \Lambda^\sigma_\lambda g_{\sigma\mu} \Rightarrow g_{\alpha\lambda} = \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\sigma_\lambda g_{\mu\sigma}$)

$$\Rightarrow \sigma'^\alpha A'^\beta(x') = \Lambda^\alpha_\mu \sigma^\mu \Lambda^\beta_\nu A^\nu(\Lambda^{-1}x') \Rightarrow A'^\beta(x') = \Lambda^\beta_\nu A^\nu(x)$$

per altri campi (e.g. campo spinoriale) la proprietà di trasform. ($D_{rs}(\Lambda)$) è determinata dalle condizioni di covarianza di Lorentz delle equazioni.

$$\phi'_r(x') = \phi_r(x' - \delta) = \phi_r(x)$$

N.B. Se $x_\mu \rightarrow x'_\mu = x_\mu + \delta_\mu$ (traslazione) $\phi'_r(x') = \phi_r(x)$ per ogni campo infatti x e x' rappresentano lo stesso punto dello spazio tempo in 2 sistemi di riferimento diversi.

Invarianza del sistema $\Rightarrow \mathcal{L}(\phi_r(x), \partial_\mu \phi_r(x)) = \mathcal{L}(\phi_r(x'), \partial_\mu \phi_r(x'))$ 35

$$\begin{aligned} \delta_T \phi_r(x) &= \phi_r'(x') - \phi_r(x) = (\phi_r'(x') - \phi_r(x)) + (\phi_r(x') - \phi_r(x)) = \\ &= \delta \phi_r(x) + \frac{\partial \phi_r}{\partial x_\mu} \delta x^\mu = \delta \phi_r(x) + \frac{\partial \phi_r}{\partial x_\mu} \delta x^\mu \end{aligned}$$

per transf. infinitesime

al I ordine

\mathcal{L} ha la stessa forma in ogni sistema

$$\left(\frac{\partial \phi_r}{\partial x^\mu}(x') = \frac{\partial \phi_r}{\partial x^\mu}(x) \right)$$

analogamente

$$0 = \delta_T \mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi_r(x'), \partial_\mu \phi_r(x')) - \mathcal{L}(\phi_r(x), \partial_\mu \phi_r(x)) = \delta \mathcal{L} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} \delta x^\mu$$

$$\text{ma } \delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_r} \delta \phi_r + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi_r} \delta \partial_\mu \phi_r = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi_r} \delta \phi_r \right) =$$

eq. Eulero-L.

$$= \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi_r} \left(\delta_T \phi_r - \frac{\partial \phi_r}{\partial x_\nu} \delta x^\nu \right) \right) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi_r} \delta \phi_r + \mathcal{L} \delta x^\mu \right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f^\mu}{\partial x^\mu} = 0 \quad \text{dove } f^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi_r} \delta_T \phi_r - \mathcal{L} \delta x^\mu$$

$$\text{con } \tau^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi_r} \frac{\partial \phi_r}{\partial x_\nu} - \mathcal{L} g^{\mu\nu} \quad \text{detto Tensore energia impulso}$$

$$\text{traslazioni } (\epsilon_{\mu\nu} = 0, \quad x_\mu \rightarrow x'_\mu = x_\mu + \delta_\mu, \quad \phi_r'(x') = \phi_r(x))$$

$$\Rightarrow \delta_T \phi_r(x) = 0 \quad \frac{\partial f^\mu}{\partial x^\mu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \tau^{\mu\nu} \delta x_\nu = 0 \Rightarrow \frac{\partial \tau^{\mu\nu}}{\partial x^\mu} = 0 \quad \forall \delta x_\nu$$

le "cariche" di Noether conservate sono:

$$C P^\mu = \int d^3 \vec{x} \tau^{0\mu} = \int d^3 \vec{x} \left(C \pi_r(x) \frac{\partial \phi_r}{\partial x_\mu} - \mathcal{L} g^{0\mu} \right) \quad \text{ovvero il vettore energia-impulso}$$

$$C P^0 = \int d^3 \vec{x} \left(\pi_r(x) \dot{\phi}_r(x) - \mathcal{L} g^{00} \right) = \int d^3 \vec{x} \mathcal{H} = H$$

$$\vec{P} = \int d^3 \vec{x} \pi_r(x) \vec{\nabla} \phi_r(x)$$

$$\text{rotazioni } (\delta_\alpha = 0) \quad \frac{\partial f^\mu}{\partial x^\mu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{1}{2} \epsilon_{\nu\sigma} M^{\mu\nu\sigma} = 0$$

$$\text{con } M^{\mu\nu\sigma} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi_r} S_{rs}^{\nu\sigma} \phi_r(x) + (x^\nu \tau^{\mu\sigma} - x^\sigma \tau^{\mu\nu}) = -M^{\mu\sigma\nu} \quad \text{e}$$

$$C M^{\nu\sigma} = \int d^3 \vec{x} M^{\nu\sigma} = \int d^3 \vec{x} \left((x^\nu \tau^{0\sigma} - x^\sigma \tau^{0\nu}) + C \pi_r(x) S_{rs}^{\nu\sigma} \phi_r(x) \right)$$

M^{ij} , $i, j = 1, 2, 3$ è il momento angolare (orbitale + spin)

Consideriamo le relazioni di commutazione fra campi in forma covariante

$$[\phi(x), \phi(y)] = i\hbar \Delta(x-y)$$

dove $\Delta(x) = \Delta^+(x) + \Delta^-(x) = \frac{-i}{(2\pi)^3} \int d^4k \delta(k^2 - \mu^2) \epsilon(k_0) e^{-ikx}$

con $\epsilon(k_0) = \frac{k_0}{|k_0|} = \begin{cases} +1 & \text{se } k_0 > 0 \\ -1 & \text{se } k_0 < 0 \end{cases}$

Le funzioni $\Delta(x)$, $\Delta^\pm(x)$ possono essere espresse come un integrale sul piano complesso della variabile k_0 .

$$\begin{aligned} \Delta^+(x) &= \frac{-1}{(2\pi)^4} \int_{C^+} d^4k \frac{e^{-ikx}}{k^2 - \mu^2} = \frac{-1}{(2\pi)^4} \int_{C^+} d^3\vec{k} \int dk^0 \frac{e^{-ikx}}{(k^0 - \frac{\omega}{c})(k^0 + \frac{\omega}{c})} \\ &= \frac{-i}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\vec{k}}{2\omega_{\vec{k}}} e^{i(\frac{\omega}{c}t - \vec{k} \cdot \vec{x})} = \frac{-i}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\vec{k}}{2\omega_{\vec{k}}} e^{\mp i kx} \end{aligned}$$

analogamente $\Delta^-(x) = \frac{-1}{(2\pi)^4} \int_C \frac{d^4k e^{-ikx}}{k^2 - \mu^2} = \dots = \frac{-i}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\vec{k}}{\omega_{\vec{k}}} \sin kx$

per il teorema dei residui infatti $\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}_{z_k}(f)$ (z_k zeri di $f(z)$)

Si come $\Delta^\pm(x)$ sono operatori proporzionali all'identità possiamo scrivere

$$i\hbar \Delta^+(x-x') = \langle 0 | [\phi^+(x), \phi^-(x')] | 0 \rangle = \langle 0 | \phi^+(x) \phi^-(x') | 0 \rangle = \langle 0 | \phi(x) \phi(x') | 0 \rangle$$

↳ valore di aspettazione nel vuoto $\phi^+(x)|0\rangle = 0$

definiamo quindi il prodotto cronologico (time-ordered) o T-ordinato

$$T(\phi_1(x) \phi_2(x')) = \begin{cases} \phi_1(x) \phi_2(x') & \text{se } t > t' \\ \phi_2(x') \phi_1(x) & \text{se } t' > t \end{cases} \quad (\phi_1 \text{ e } \phi_2 \text{ campi scalari})$$

ovvero gli operatori con $t = \frac{x^0}{c}$ minore agiscono prima (stanno a destra)

analogamente

sia

$$\theta(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t > 0 \\ 0 & \text{se } t < 0 \end{cases}$$

$$T(\phi_1(x) \phi_2(x')) = \theta(t-t') \phi_1(x) \phi_2(x') + \theta(t'-t) \phi_2(x') \phi_1(x)$$

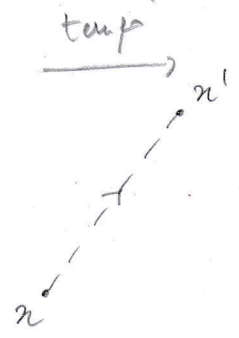
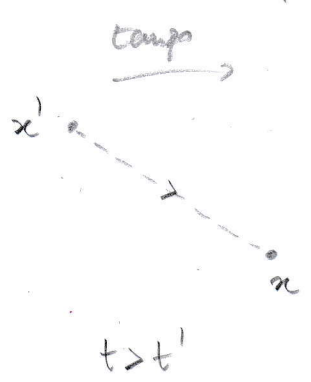
e definiamo il propagatore di Feynman (o delta di Feynman) come

$$i\hbar c \Delta_F(x-x') \equiv \langle 0 | T(\phi(x) \phi(x')) | 0 \rangle$$

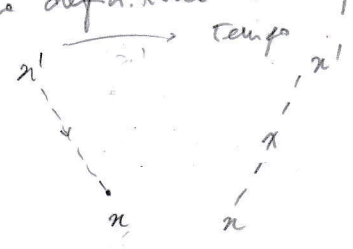
ovvero
$$\Delta_F(x) = \theta(t) \Delta^+(x) - \theta(-t) \Delta^-(x)$$

cioè
$$\Delta_F(x) = \begin{cases} \Delta^+(x) & \text{se } t > 0 \\ \Delta^-(x) & \text{se } t < 0 \end{cases}$$

Il propagatore di Feynman $\Delta_F(x-x')$ rappresenta quindi un campo scalare che viene creato dal vuoto nel punto dello spazio-tempo x' e viene annichito nel punto x e analogamente per $t' > t$.

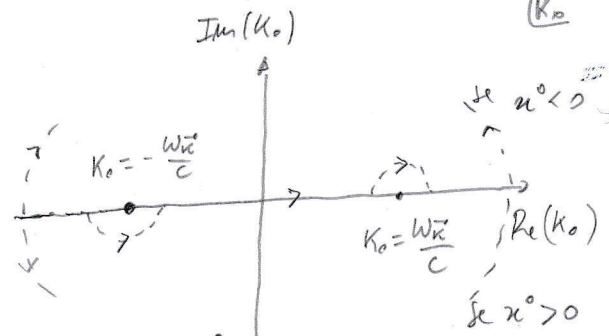


N.B. la separazione $t \geq t'$ non è invariante di Lorentz se $x-x'$ è un vettore di tipo spazio ($t \geq t'$ dipende dal sistema di riferimento).
 Quello che è covariante di Lorentz è la definizione del propagatore di F. con entrambi i casi $t \geq t'$, ovvero



Consideriamo quindi il propagatore nello spazio dei momenti e definiamo la rappresentazione integrale

$$\Delta_F(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{C_F} \frac{d^4 k e^{-ikx}}{k^2 - \mu^2}$$



Se $x^0 > 0$ C_F è chiuso nel semi-piano inferiore ($e^{ik_0 x^0} \rightarrow 0$ se $k_0 \rightarrow -i\infty$)

e otteniamo $\Delta_F(x) = \Delta^+(x)$

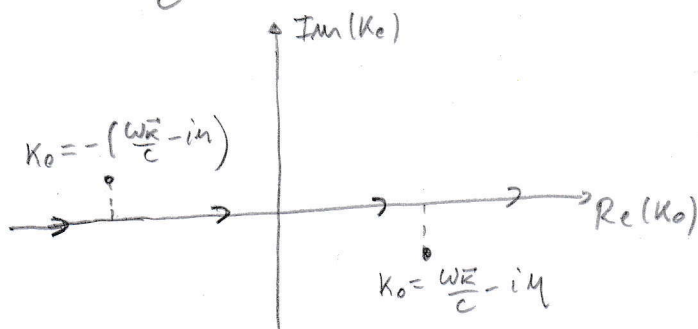
Se $x^0 < 0$ C_F è chiuso nel semi-piano superiore ($e^{-ik_0 x^0} \rightarrow 0$ se $k_0 \rightarrow +i\infty$)

e otteniamo $\Delta_F(x) = \Delta^-(x)$

Analogamente si possono spostare in maniera "infinitesimale" nel semipiano positivo/negativo e effettuare l'integrazione sull'asse k_0 reale

$$\Delta_F(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 k e^{-ikx}}{k_0^2 - \left(\frac{W\bar{x}}{c} - i\epsilon\right)^2} = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 k e^{-ikx}}{k^2 - \mu^2 + i\epsilon}$$

dove $\epsilon = 2M \frac{W\bar{x}}{c} > 0$ e $\epsilon, M \rightarrow 0$ (dopo l'integrazione)



Risultati analoghi si ottengono nel caso di un campo scalare complesso e il propagatore di Feynman per il campo scalare complesso è dato da

$$\langle 0 | T(\phi(x) \phi^\dagger(x')) | 0 \rangle = i \epsilon \Delta_F(x - x')$$

l'interpretazione in termini di creazione/annichilazione di campi è analoga con la differenza che per $t \geq t'$ corrispondono campi con carica opposta.

Ci poniamo il problema di ricavarne l'equivalente per il caso relativistico dell'equazione di Schrödinger per una particella libera $H = \frac{p^2}{2m}$

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\vec{x}, t)}{\partial t} = H \psi(\vec{x}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\vec{x}, t) \quad \text{dove } \vec{p} \rightarrow -i\hbar \vec{\nabla}$$

La funzione d'onda complessa $\psi(\vec{x}, t)$ è associata alla probabilità dP che una misura riveli la particella nell'elemento di volume $d^3\vec{x}$

$$dP = f(\vec{x}, t) d^3\vec{x}, \quad f(\vec{x}, t) = |\psi(\vec{x}, t)|^2$$

$$e. \quad \vec{j}(\vec{x}, t) = -\frac{i\hbar}{2m} (\psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^*)$$

è la densità di corrente di probabilità che soddisfa l'eq. di continuità

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \quad \left(\text{con } \int_{V \rightarrow \infty} f(\vec{x}, t) d^3\vec{x} = \text{const.} \right)$$

Partendo dall'hamiltoniana relativistica $H = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}$

si ha che $i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \sqrt{-\hbar^2 c^2 \nabla^2 + m^2 c^4} \psi$ ovvero una teoria NON-locale

(bisogna espandere la radice quadrata che include potenze di $\vec{\nabla}$ ad ogni ordine). Teorie NON-locali sono estremamente problematiche.

Partendo da $H^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$ abbiamo che

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi = (-\hbar^2 \nabla^2 c^2 + m^2 c^4) \psi$$

che corrisponde all'eq. di Klein-Gordon $(\square + \mu^2) \psi(x) = 0$, $\mu = \frac{mc}{\hbar}$

Le densità di quadri-corrente possono essere $\vec{j}_\mu = \frac{-i}{\hbar} (\psi^* \partial_\mu \psi - \partial_\mu \psi^* \psi)$

e $\partial_\mu j^\mu = 0$ tuttavia $\int j_0(\vec{x}, t) d^3\vec{x}$

con $cj_0 = j_0 = \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \psi$ NON può essere interpretato come una

densità di probabilità poiché NON è definita positiva

L'eq. di Schrödinger è lineare nella derivata Temporale

e il segno della frequenza di oscillazione dell'onda è dato

dall'autovalore dell'hamiltoniana $i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = E \psi \rightarrow \psi(x,t) = \psi(x,t_0) e^{-\frac{iEt}{\hbar}}$

L'eq. di Klein-Gordon quadratica nella derivata temporale

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = E^2 \psi \quad \text{e sono ammesse soluzioni del tipo}$$

$$\psi(x,t) = \psi(x,t_0) e^{-\frac{iEt}{\hbar}} \quad \text{e} \quad \psi^*(x,t) = \psi^*(x,t_0) e^{\frac{iEt}{\hbar}} \quad \text{con } E \geq 0$$

Per questo motivo l'eq. di K.G. (già derivata da Schrödinger) è stata abbandonata e poi "reinterpretata" correttamente da Pauli e Weisskopf.

$j^\mu(x)$ è infatti interpretato come una densità di corrente di carica e non come densità di corrente di "probabilità".

Nel caso di un campo scalare complesso le soluzioni ad "energia negativa" sono interpretate come particelle con carica negativa

$$j_\mu = \frac{-iq}{\hbar} (\phi^\dagger \partial_\mu \phi - (\partial_\mu \phi^\dagger) \phi) \quad \text{e} \quad \int j_0(\vec{x},t) d^3x = q \sum_{\vec{k}} (N_+(\vec{k}) - N_-(\vec{k}))$$

dove N_\pm sono gli operatori numero per le particelle di tipo + e - e quello di si conserva è la carica totale (positiva o negativa) del campo.

$j_\mu(x)$ è quindi correttamente associato alla densità di carica di un campo scalare e l'eq. di Klein-Gordon perfettamente consistente dal punto di vista della teoria dei campi.

Tuttavia l'eq. di K.G. non è in grado di descrivere una particella di spin $\frac{1}{2}$ come l'elettrone.

In MQ. non relativistica l'interazione fra lo spin (momento magnetico) e il campo magnetico è descritta dal termine nell'hamiltoniana

$$H_{spin} = -\frac{e\hbar}{2mc} \vec{\sigma} \cdot \vec{B} \quad (\text{Pauli})$$

dove $\vec{\sigma}$ è l'operatore di spin.

Il termine H_{spin} può essere introdotto partendo dall'hamiltoniana non relativistica

$$H = \frac{1}{2m} (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) = \frac{1}{2m} \vec{p}^2$$

da $\frac{1}{2} \{\sigma_i, \sigma_j\} = \frac{1}{2} [\sigma_i, \sigma_j]$
 $\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} + i \epsilon_{ijk} \sigma_k$ $(\vec{\sigma} \cdot \vec{A})(\vec{\sigma} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + i \vec{\sigma} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$

$$A_i \sigma_i B_j \sigma_j = A_i B_i + i \sigma_k (\epsilon_{kij} A_i B_j)$$

e applicando la sostituzione $\vec{p} \rightarrow \vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A}$ con \vec{A} potenziale vettore

$$H_0 \rightarrow \frac{1}{2m} \vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A}) \vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A}) = \frac{1}{2m} (\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A})^2 + \frac{i}{2m} \vec{\sigma} \cdot [(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A}) \times (\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A})]$$

$$= \frac{1}{2m} (\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A})^2 - \frac{e\hbar}{2m} \vec{\sigma} \cdot \vec{B} = \frac{1}{2m} (\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A})^2 + H_{spin}$$

$$\vec{p} \times \vec{A} = -i\hbar (\underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{A}}_{\vec{B}}) - \vec{A} \times \vec{p} \Rightarrow -\vec{p} \times \vec{A} + \vec{A} \times \vec{p} = -i\hbar (\vec{\nabla} \times \vec{A})$$

Vogliamo ora generalizzare questa procedura al caso relativistico

$$\frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 = m^2 c^2 \rightarrow \left(\frac{E}{c} - \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \right) \left(\frac{E}{c} + \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \right) = m^2 c^2$$

dove $E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$ e $\vec{p} \rightarrow -i\hbar \vec{\nabla}$

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial ct} + \vec{\sigma} \cdot i\hbar \vec{\nabla} \right) \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial ct} - \vec{\sigma} \cdot i\hbar \vec{\nabla} \right) \psi = (mc)^2 \psi$$

dove chiaramente ψ è uno spinore a 2 componenti

(σ_i è una matrice 2×2)

Vogliamo ora costruire una equazione lineare nell'operatore $\frac{\partial}{\partial t}$ e osserviamo l'analogia con la teoria di Maxwell dove l'equazione del II ordine per il potenziale vettore $\square A_\mu = 0$ può essere scritta come un'eq. del I ordine per il tensore elettromagnetico $\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$

con $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$

Definiamo le funzioni a due componenti

$$\psi_R = \frac{1}{mc} \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial ct} - i\hbar \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} \right) \psi, \quad \psi_L = \psi$$

possiamo scrivere 2 equazioni del I ordine in $\frac{\partial}{\partial t}$ accoppiate

$$\begin{cases} \left(i\hbar \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} - i\hbar \frac{\partial}{\partial ct} \right) \psi_L = -mc \psi_R \\ \left(-i\hbar \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} - i\hbar \frac{\partial}{\partial ct} \right) \psi_R = -mc \psi_L \end{cases}$$

è noto che le eq. accoppiano ψ_L e ψ_R come le eq. di Maxwell accoppiano \vec{E} e \vec{B} prendendo sia la somma e la differenza

$$-i\hbar (\vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla}) (\psi_R - \psi_L) - i\hbar \frac{\partial}{\partial ct} (\psi_R + \psi_L) = -mc (\psi_R + \psi_L)$$

$$i\hbar (\vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla}) (\psi_R + \psi_L) + i\hbar \frac{\partial}{\partial ct} (\psi_R - \psi_L) = -mc (\psi_R - \psi_L)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -i\hbar \frac{\partial}{\partial ct} & -i\hbar \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} \\ i\hbar \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} & i\hbar \frac{\partial}{\partial ct} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix} = -mc \begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix}$$

dove $\psi = \begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_R + \psi_L \\ \psi_R - \psi_L \end{pmatrix}$ spinore a 4 componenti

che possiamo riscrivere

$$(i\vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} - i\gamma_0 \frac{\partial}{\partial ct}) \psi + \frac{mc}{\hbar} \psi = 0$$

$$\boxed{\left(i\hbar \gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - mc \right) \psi(x) = 0}$$

Equazione di Dirac

ψ spinore a 4 componenti

dove γ^μ sono matrici 4×4 date da

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}, \quad \gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ -\sigma_k & 0 \end{pmatrix} \quad k=1,2,3$$

con $\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

e sono dette matrici di Dirac.

Esistono diverse rappresentazioni delle matrici di Dirac. la proprietà fondamentale che devono soddisfare è la relazione di anticommutazione

$$\{ \gamma^\mu, \gamma^\nu \} = \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}$$

e la condizione di hermiticità

$$\gamma^{0\dagger} = \gamma^0, \quad \gamma^{k\dagger} = -\gamma^k \quad (k=1,2,3) \quad \text{ovvero} \quad \gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0$$

Ad esempio $(\gamma^0)^2 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix} = \mathbb{1}$ $\{ \sigma_i, \sigma_j \} = 2\delta_{ij}$

$$\gamma^1 \gamma^2 + \gamma^2 \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 \\ -\sigma_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ -\sigma_2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ -\sigma_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 \\ -\sigma_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma_1 \sigma_2 - \sigma_2 \sigma_1 & 0 \\ 0 & -\sigma_2 \sigma_1 - \sigma_1 \sigma_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\gamma^{k\dagger} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ -\sigma_k & 0 \end{pmatrix}^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ -\sigma_k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} = \gamma^0 \gamma^k \gamma^0$$

Inoltre γ^μ sono a traccia nulla $\text{Tr}(\gamma^\mu) = 0$

Lo spinore di Dirac è un oggetto a 4-componenti.

44

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \quad \text{detto anche bispinore}$$

pertanto esplicitando le componenti l'eq. di Dirac è
(α, β) indici spinoriali (momento angolare intrinseco)

$$\sum_{\mu=0}^3 \sum_{\beta=1}^4 (i\hbar (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x^\mu} - mc \delta_{\alpha\beta}) \psi_\beta(x) = 0 \quad \alpha = 1, \dots, 4$$

μ indice di Lorentz (spazio-tempo)

Definiamo ora lo spinore di Dirac aggiunto

$$\bar{\psi}(x) = \psi^\dagger(x) \gamma^0$$

n.B. aggiunto \neq hermitiano coniugato

che può essere rappresentato da un bispinore riga

$$\psi^\dagger = (\psi_1^*, \psi_2^*, \psi_3^*, \psi_4^*)$$

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0 = (\psi_1^*, \psi_2^*, -\psi_3^*, -\psi_4^*)$$

partendo dall'eq. di Dirac hermitiana coniugata

$$(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x^\mu} \psi^\dagger \gamma^{\mu\dagger} - mc \psi^\dagger) = 0 \quad \text{e moltiplicando a dx per } \gamma^0$$

$$(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x^\mu} \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 - mc \psi^\dagger) \gamma^0 = (-i\hbar \frac{\partial}{\partial x^\mu} \bar{\psi} \gamma^\mu - mc \bar{\psi}) = 0$$

ovvero l'eq. di Dirac per il campo aggiunto $\bar{\psi}(x)$

$$(i\hbar \frac{\partial}{\partial x^\mu} \bar{\psi} \gamma^\mu + mc \bar{\psi}) = 0$$

L'eq. di Dirac può anche essere scritta in forma hamiltoniana: 45

come

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H \psi \quad \text{dove } H = c \gamma^0 \gamma^k p_k + mc^2 \gamma^0, \quad p_k \rightarrow -i\hbar \nabla_k$$

matrice 4x4

$$e \quad H^\dagger = c \gamma^{k\dagger} \gamma^0 p_k + mc^2 \gamma^0 = c \gamma^0 \gamma^k (\gamma^0)^\dagger p_k + mc^2 \gamma^0 = H$$

\downarrow
 $\gamma^{k\dagger} = \gamma^0 \gamma^k \gamma^0$

L'eq. di Dirac può essere derivata dalla seguente densità di Lagrangiana

$$\mathcal{L} = c \bar{\psi}(x) \left(i\hbar \gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - mc \right) \psi(x)$$

dove $\psi(x)$ e $\bar{\psi}(x)$ sono campi indipendenti; i due campi coniugati sono

$$\pi_\alpha(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}_\alpha} = i\hbar \psi_\alpha^\dagger \quad e \quad \bar{\pi}_\alpha(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\bar{\psi}}_\alpha} = 0$$

L'hamiltoniana e l'impulso del campo di Dirac sono quindi dati da

$$H = \int d^3\vec{x} \bar{\psi}(x) \left(-i\hbar c \gamma^k \frac{\partial}{\partial x^k} + mc^2 \right) \psi(x)$$

$$\vec{P} = -i\hbar \int d^3\vec{x} \psi^\dagger(x) \vec{\nabla} \psi(x)$$

La lagrangiana è invariante per trasformazioni di fase $\psi(x) \rightarrow e^{i\frac{q}{\hbar c} \chi} \psi(x)$

perciò esiste una quantità (carica) conservata

$$Q = q \int d^3\vec{x} \bar{\psi}(x) \gamma^0 \psi(x) = q \int d^3\vec{x} \psi^\dagger(x) \psi(x) \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{positive} \\ \text{definite} \end{array}$$

e la densità di corrente

$$j^\mu(x) = (c\rho(x), \vec{j}(x)) = cq \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x)$$

soddisfa l'eq. di continuità $i\hbar \gamma^0 \frac{\partial}{\partial x^0} = mc\psi, \quad i\hbar \frac{\partial}{\partial x^k} \bar{\psi} \gamma^k = -mc\bar{\psi}$

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} j^\mu(x) = cq \left(\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \bar{\psi} \right) \gamma^\mu \psi + \bar{\psi} \gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \psi \right) = cq \left(-\frac{mc}{i\hbar} \bar{\psi} \psi + \frac{mc}{i\hbar} \bar{\psi} \psi \right) = 0$$

Indipendenza dell'eq. di Dirac dalla rappresentazione delle matrici γ^{46}
 Consideriamo un set di matrici γ^{μ} ^(4x4) tali che $\{\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}\} = 2g^{\mu\nu}$

$$(i\hbar \gamma^{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} - mc) \psi(x) = 0$$

è equivalente all'eq. di Dirac con γ^{μ} e ψ .

Esiste infatti (teorema fondamentale di Pauli) una matrice S ^(invertibile) 4×4
 (unica a meno di costante) tale che

$$S \gamma^{\mu} S^{-1} = \gamma^{\mu}$$

per cui $(i\hbar S \gamma^{\mu} S^{-1} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} - mc) S S^{-1} \psi' = 0$

moltiplicando a sx per S^{-1} $(i\hbar \gamma^{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} - mc) S^{-1} \psi' = 0$

che corrisponde all'eq. di Dirac originale con $\psi' = S\psi$

Inoltre $\bar{\psi}' \gamma^{\mu} \psi' = \psi'^{\dagger} \gamma^0 \gamma^{\mu} \psi' = \psi^{\dagger} S^{\dagger} S \gamma^0 S^{-1} S \gamma^{\mu} S^{-1} S \psi = \bar{\psi} \gamma^{\mu} \psi$

se $S^{\dagger} = S^{-1} \Rightarrow S$ unitario

Diverse rappresentazioni corrispondono quindi alla stessa situazione fisica
 (ma hanno funzioni d'onda differenti!)

Moltiplicando l'eq. di Dirac a sx per $\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\nu}$ otteniamo 47

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \gamma^\nu \gamma^\mu - mc \frac{\partial}{\partial x^\nu} \gamma^\nu \right) \psi = \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \gamma^\nu \gamma^\mu + \frac{i}{\hbar} m^2 c^2 \right) \psi = 0$$

Scambiando $\mu \leftrightarrow \nu$ e sommando

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \underbrace{(\gamma^\nu \gamma^\mu + \gamma^\mu \gamma^\nu)}_{2g^{\mu\nu}} \psi + 2 \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \psi = 0$$

$$\Rightarrow \square \psi_r + \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \psi_r = 0$$

4 eq. di Klein-Gordon
disaccoppiate ($r=1, \dots, 4$)

Scriviamo le soluzioni in termini di uno spinore a 4-componenti $U_r(\vec{p})$

$$\psi(x) \sim U(\vec{p}) e^{-\frac{i}{\hbar} p x} \quad \text{con} \quad E = \pm \sqrt{|\vec{p}|^2 c^2 + m^2 c^4}$$

Nel caso di una particella a riposo $\vec{p}=0$ $\nabla \psi(x) = 0$ ($E > 0$)
e abbiamo $i\hbar \gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} \psi = mc \psi$ e scriviamo le soluzioni come

$$\frac{1}{\hbar} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i mc^2 t \\ -i mc^2 t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_A(0) \\ X_B(0) \end{pmatrix} e^{-\frac{i}{\hbar} mc^2 t} = mc \begin{pmatrix} X_A(0) \\ X_B(0) \end{pmatrix} e^{-\frac{i}{\hbar} mc^2 t}$$

che è soluzione se lo spinore $X_B(0) = 0$.

Analogamente possiamo risolvere nel caso $E < 0$ richiedendo che $X_A(0) = 0$
Dove $X_A(0)$ e $X_B(0)$ sono spinori di Pauli a due componenti $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Abbiamo quindi 4 soluzioni dell'eq. di Dirac

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-\frac{i}{\hbar} mc^2 t} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-\frac{i}{\hbar} mc^2 t} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{\frac{i}{\hbar} mc^2 t} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{\frac{i}{\hbar} mc^2 t}$$

e otteniamo 2 soluzioni a "energia positiva" e 2 a "energia negativa"

Nel limite non-relativistico $E \approx mc^2$ le soluzioni a energia positiva
corrispondono alle soluzioni dell'eq. di Schrödinger $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{x}, t) = E \psi(\vec{x}, t)$

Nel caso $\vec{p} \neq 0$ abbiamo

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \chi_A(x) \\ \chi_B(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi_A(\vec{p}) \\ \chi_B(\vec{p}) \end{pmatrix} e^{-i p x}$$

\swarrow spinore 1-componente
 \downarrow spinori a 2 componenti

le un' soluz. si possono scrivere

$$\begin{cases} \chi_A(\vec{p}) = \frac{c}{E - mc^2} (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) \chi_B(\vec{p}) \\ \chi_B(\vec{p}) = \frac{c}{E + mc^2} (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) \chi_A(\vec{p}) \end{cases}$$

e usando $\vec{\sigma} \cdot \vec{p} = \begin{pmatrix} p^{(3)} & p^{(1)} - i p^{(2)} \\ p^{(1)} + i p^{(2)} & -p^{(3)} \end{pmatrix}$

$$u_{\pm}(\vec{p}) = A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ B p^{(3)} \\ B(p^{(1)} + i p^{(2)}) \end{pmatrix}, \quad u_{\pm}(\vec{p}) = A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ B(p^{(1)} - i p^{(2)}) \\ -B p^{(3)} \end{pmatrix}$$

$$A = \sqrt{\frac{E + mc^2}{2mc^2}}$$

$$B = \frac{c}{E + mc^2}$$

$$v_1(\vec{p}) = A \begin{pmatrix} B(p^{(1)} - i p^{(2)}) \\ -B p^{(3)} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2(\vec{p}) = A \begin{pmatrix} B p^{(3)} \\ B(p^{(1)} + i p^{(2)}) \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

con $u_r(\vec{p}) = A \begin{pmatrix} \chi_A(\vec{p}) \\ B \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \chi_A(\vec{p}) \end{pmatrix}$ e $v_r(\vec{p}) = A \begin{pmatrix} B \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \chi_B(\vec{p}) \\ \chi_B(\vec{p}) \end{pmatrix}$ $r = 1, 2$

Siccome $u_r(\vec{p}) e^{-\frac{i}{\hbar} p x}$ e $v_r(\vec{p}) e^{+\frac{i}{\hbar} p x}$ soddisfano l'eq. di Dirac

introduciamo la notazione $\not{A} \equiv \gamma^\mu A_\mu$

abbiamo due $(\not{p} - mc) u_r(\vec{p}) = 0$ e $(\not{p} + mc) v_r(\vec{p}) = 0$, $r = 1, 2$

$$e \quad u_r(0) = \begin{pmatrix} \chi_A(0) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_r(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \chi_B(0) \end{pmatrix}$$

$$\not{p} = \gamma^\mu A_\mu$$

$$u_1(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_1(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Data la dipendenza del tempo le soluzioni $\psi_r(\vec{p})$ e $\psi_r(\vec{p})$ sono dette soluzioni a energia positive e negativa, rispettivamente. -49

Nel caso della teoria quantizzata esse saranno interpretate in termini di particelle e antiparticelle.

Nel caso della teoria "classica" (non quantizzata) di singola particella le soluz. di energia negativa pongono ovviamente problemi dal essere interpretate dal punto di vista fisico.

Ad esempio un atomo eccitato può emettere spontaneamente fotoni e passare ad uno stato energetico inferiore fino a raggiungere il ground state.

Ma con la presenza di stati ad energia negativa sarebbe possibile continuare a emettere fotoni e passare ad energie negative che non sono limitate dal basso!

Per superare questo problema (presente solo nella teoria non quantizzata) Dirac (nel 1930) propose la "hole theory", assumendo che tutti gli stati a energia negativa fossero occupati in condizioni normali (ground state).

Per il principio di esclusione di Pauli non sono quindi possibili transizioni a stati di energia negativa.

Lo stato di vuoto (ground state) è quindi formato da un numero (infinito!) di elettroni di energia negativa: il cosiddetto MARE di Dirac.

Quando un elettrone del "mare" assorbe un fotone e si converte in un elettrone di $E > 0$ viene creata una buca (hole) nel mare. Di conseguenza la differenza di energia del mare (osservabile!) sarà l'energia del vuoto (negativa) MENO l'energia negativa dell'elettrone del mare ossia un'energia positiva! L'assenza di un elettrone di $E < 0$ viene quindi interpretata come la presenza di una buca di $E > 0$.

$$Q_{sea} = Q_{vacuum} - \underbrace{(-e)}_{\text{carica } e^-} = Q_{vacuum} + e \quad (e > 0)$$

$$\Rightarrow \Delta Q = Q_{sea} - Q_{vacuum} = e > 0 \quad \text{buca a carica positiva}$$

\Rightarrow elettrone energia negativa \Leftrightarrow buca energia positiva (positrone)
osservazione sperimentale, Anderson 1932

Possiamo considerare le matrici γ^M come un oggetto matematico utile a descrivere come sono accoppiate le componenti di un 4-spinore nell'eq. di Dirac. Esse sono pertanto invarianti rispetto alle transf. di Lorentz (variano però a seconda della rappresentazione usata).

Sotto transf. di Lorentz abbiamo quindi che

$$i\hbar \gamma^M \frac{\partial}{\partial x'^M} \psi'(x') - mc \psi'(x') = 0 \quad (\text{covarianza di Lorentz})$$

sia S la matrice della rappresentazione spinoriale del gruppo di Lorentz

$$\psi'_r(x') = S_{rs} \psi_s(x) \quad S_{rs} = S_{rs}(\Lambda) \quad \text{indipendente da } x$$

$$i\hbar \gamma^M \Lambda_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} S \psi - mc S \psi = 0$$

$$\Rightarrow i\hbar S^{-1} \gamma^M S \Lambda_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \psi - mc \psi = 0$$

è equivalente all'eq. di Dirac non trasformata se

$$S^{-1} \gamma^M S \Lambda_{\mu\nu} = \gamma_\nu \quad \text{ovvero} \quad S^{-1} \gamma^M S = \gamma_\nu \Lambda^{\mu\nu} =$$

N.b. $\Lambda_{\mu\nu}$ mescola le componenti di Lorentz, S_{rs} mescola quelle spinoriali e appartengono a spazi diversi! In componenti $\sum_{\beta,\delta} (S^{-1})_{\alpha\beta} (\gamma^M)_{\beta\gamma} (S)_{\gamma\delta} = \sum_{\beta} (\gamma_\nu)_{\alpha\beta} \Lambda^{\mu\nu}$

Per trasformazioni di Lorentz infinitesime $\Lambda_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \epsilon_{\mu\nu}$

$$\text{abbiamo che} \quad S_{rs}(\Lambda) = \delta_{rs} - \frac{i}{4} \epsilon_{\mu\nu} \sigma_{rs}^{\mu\nu} \quad (\text{somma su } \mu, \nu \text{ sottintesa})$$

$$\text{dove} \quad \sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu].$$

Per transf. di Lorentz (proprie) si conserva quindi

$$\vec{M} = \int d^3\vec{x} \psi^\dagger(x) (\vec{x} \times (-i\hbar \vec{\nabla})) \psi(x) + \int d^3\vec{x} \psi^\dagger(x) \left(\frac{\hbar}{2} \vec{\sigma} \right) \psi(x)$$

momento angolare orbitale

mom. ang. intrinseco di spin $\frac{1}{2}$

con $\vec{\sigma} = (\sigma^{23}, \sigma^{31}, \sigma^{12})$ e la generalizz. 4×4 delle matrici di Pauli 2×2

Le due soluzioni ad energia negativa/positiva e \vec{p} fissato sono legate alle possibili orientazioni dello spin $\frac{1}{2}$.

Definiamo $\vec{v}_{\vec{p}} = \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|}$ che è detto operatore di elicità
 $\vec{v} = (\sigma^{23}, \sigma^{31}, \sigma^{12})$
 ← matrici 4x4

$v_{\vec{p}}$ commuta con l'hamiltoniana di Dirac (particella libera).

Possiamo quindi diagonalizzare $v_{\vec{p}}$ simultaneamente alla hamiltoniana e abbiamo che

$$v_{\vec{p}} u_r(\vec{p}) = (-1)^{r+1} u_r(\vec{p}), \quad v_{\vec{p}} v_r(\vec{p}) = (-1)^r v_r(\vec{p}), \quad r=1,2$$

gli stati con autovalore $+1$ (-1) sono detti stati di elicità positiva (negativa) e rappresentano polarizzazioni longitudinali positive e negative rispetto alla direzione \vec{p} (parallele/antiparallele a \vec{p}). Sono anche detti stati right-handed e left-handed.

Si può verificare facilmente che

$$u_r(\vec{p}) u_{r'}(\vec{p}) = v_r(\vec{p}) v_{r'}(\vec{p}) = 0 \quad \text{se } r \neq r' \quad (\text{ortogonalità})$$

$$u_r^+(\vec{p}) u_r(\vec{p}) = v_r^+(\vec{p}) v_r(\vec{p}) = \frac{E}{mc^2} \quad (\text{normalizzazione})$$


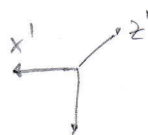
$$\rightarrow (=1 \quad \text{se } \vec{p}=0)$$

$$\text{infine } u_r^+(\vec{p}) v_s(-\vec{p}) = v_r^+(\vec{p}) u_s(-\vec{p}) = 0$$

Consideriamo ora le trasformazioni di Lorentz improprie, ovvero che soddisfanno la richiesta di invarianza dell'intervallo spazio-temporale ma che NON possono essere ottenute con continuità partendo dall'identità:

Si definisce trasformazione di parità (o riflessione spaziale) tale che

$$\vec{x}' = -\vec{x}, \quad t' = t$$

che quindi modifica una terna "destrorsa"  in una "sinistrorsa" 

L'eq. di Dirac è invariante sotto parità e esiste una soluzione di

$$S_p^{-1} \gamma^\mu S_p = \gamma^\nu \Lambda^\mu{}_\nu = \gamma^\nu \Lambda^\mu{}_\nu \quad \text{dove} \quad \Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} = \gamma^{\mu\nu}$$

è la trasformazione di Lorentz della parità e S_p è la matrice della rappresentazione della transf. di Lorentz nello spazio spinoriale.

Abbiamo quindi che $S_p^{-1} \gamma^0 S_p = \gamma^0$ e $S_p^{-1} \gamma^k S_p = -\gamma^k \quad (k=1,2,3)$

Si come $[\gamma^0, \gamma^0] = 0$ e $\{\gamma^0, \gamma^k\} = 0 \Rightarrow S_p = e^{i\phi} \gamma^0$, poiché $\phi = 0$

$$\Rightarrow S_p = S_p^{-1} = S_p^\dagger = \gamma^0$$

Varianti bilineari

Abbiamo che $\psi'(x') = S \psi(x) \Rightarrow \bar{\psi}'(x') = \psi^\dagger(x) S^\dagger \gamma^0 = \bar{\psi}(x) \gamma^0 S^\dagger \gamma^0 = \bar{\psi}(x) S^{-1}$
(S o S_p)

Per cui $\bar{\psi}'(x') \psi'(x') = \bar{\psi}(x) \psi(x) \Rightarrow$ è un invariante (scalare) di Lorentz

o) $\bar{\psi}'(x') \gamma^\mu \psi'(x') = \bar{\psi}(x) S^{-1} \gamma^\mu S \psi(x) = \Lambda^\mu{}_\nu \bar{\psi}(x) \gamma^\nu \psi(x)$ per tr. di Lorentz proprie

e $\bar{\psi}'(x') \gamma^5 \psi'(x') = \bar{\psi}(x) S_p^{-1} \gamma^5 S_p \psi(x) = \begin{cases} \bar{\psi} \gamma^0 \psi \\ -\bar{\psi} \gamma^k \psi \end{cases} \Rightarrow$ è un vettore di Lorentz

o) analogamente $\bar{\psi}(x) \sigma^{\mu\nu} \psi(x) = \frac{i}{2} \bar{\psi}(x) [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \psi(x)$ è un tensore di Lorentz ^{antisimmetrico}

Definiamo ora $i \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 = \gamma^5 = \gamma_5$ con $\{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0, \gamma^{5\dagger} = \gamma^5, (\gamma^5)^2 = 1$

Nella rappresentazione Dirac-Pauli di γ^μ abbiamo che $\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

o) $S^{-1} \gamma^5 S = \gamma^5$, $S_p^{-1} \gamma^5 S_p = -\gamma^5 \Rightarrow \bar{\psi} \gamma^5 \psi$ è uno pseudo-scalare ⁵³
 di Lorentz (cambia segno sotto
 transf. di parità)

o) $\bar{\psi} \gamma^5 \gamma^\mu \psi$ è uno pseudo-vettore di Lorentz (trasforma come l'opposto di
 un vettore sotto parità)

Esistono altri densità bilineari, ovvero oggetti del tipo $\bar{\psi}(x) \Gamma \psi(x)$
 con Γ prodotto di matrici γ^μ con proprietà di transf. definite?

No. Prodotto di due matrici γ è $(\gamma^\mu)^2 = 1$ oppure $\gamma^\mu \gamma^\nu = -\gamma^\nu \gamma^\mu = +i \sigma^{\mu\nu}$

Tre matrici γ differenti si possono sempre scrivere come $\gamma^5 \gamma^\mu$

Quattro matrici γ danno γ^5 .

$1, \gamma^\mu, \sigma^{\mu\nu}, \gamma^5 \gamma^\mu, \gamma^5$ formano una base di $1+4+6+4+1 = 16$
 matrici 4×4

Ogni matrice 4×4 può essere espressa come combinazione lineare delle matrici di base.

Ricapitolando

$\bar{\psi} \psi \leftrightarrow$ scalare

$\bar{\psi} \gamma^\mu \psi \leftrightarrow$ vettore

$\bar{\psi} \sigma^{\mu\nu} \psi \leftrightarrow$ tensore antisimm. (di rango 2)

$\bar{\psi} \gamma^5 \gamma^\mu \psi \leftrightarrow$ pseudo-vettore

$\bar{\psi} \gamma^5 \psi \leftrightarrow$ pseudo-scalare

Quantizzazione del campo di Dirac (seconda quantizzazione) 5.4

Abbiamo visto che la generalizzazione relativistica della MQ porta a dover interpretare le soluz. ad energia negativa che nella teoria di Dirac vengono interpretate con la teoria delle buche.

Consideriamo ora la quantizzazione del campo di Dirac che ci permetterà di interpretare elettroni e positroni tramite gli operatori di creazione e distruzione.

Espandiamo dunque il campo di Dirac in serie di Fourier

$$\psi(x) = \psi_+(x) + \psi_-(x) = \sum_{\vec{r}, \vec{p}} \left(\frac{mc^2}{VE_{\vec{p}}} \right)^{1/2} \left(c_r(\vec{p}) u_r(\vec{p}) e^{-\frac{i}{\hbar} p x} + d_r^+(\vec{p}) v_r(\vec{p}) e^{\frac{i}{\hbar} p x} \right)$$

\downarrow operatori
 \downarrow normalizzati
 \downarrow coefficienti spinoriali

analogamente

$$\bar{\psi}(x) = \bar{\psi}_+(x) + \bar{\psi}_-(x) = \sum_{\vec{r}, \vec{p}} \left(\frac{mc^2}{VE_{\vec{p}}} \right)^{1/2} \left(d_r(\vec{p}) \bar{v}_r(\vec{p}) e^{-\frac{i}{\hbar} p x} + c_r^+(\vec{p}) \bar{u}_r(\vec{p}) e^{\frac{i}{\hbar} p x} \right)$$

dove $\bar{u}_r = u_r^\dagger \gamma^0$, $\bar{v}_r = v_r^\dagger \gamma^0$ e $r=1,2$

Il campo di Dirac descrive particelle di spin $\frac{1}{2}$ che obbediscono alla statistica di Fermi-Dirac. Che regole di commutazione dobbiamo imporre?

Abbiamo visto che imponendo regole di commutazione $[a_r, a_s^\dagger] = \delta_{rs}$
 $[a_r, a_s] = [a_r^\dagger, a_s^\dagger] = 0$ otteniamo stati $(a_{r_1}^\dagger)^{n_1} (a_{r_2}^\dagger)^{n_2} \dots |0\rangle$ che soddisfano la stat. di Bose-Einstein, poiché $[a_r^\dagger, a_s^\dagger] = 0$.

Sia $r=1,2$ e imponiamo la condizione di anticommutazione

$$\{a_r, a_s^\dagger\} = \delta_{rs}, \quad \{a_r, a_s\} = \{a_r^\dagger, a_s^\dagger\} = 0$$

da cui otteniamo $(a_r)^2 = (a_r^\dagger)^2 = 0$.

Definendo $N_r = a_r^\dagger a_r$ e sfruttando l'identità $[AB, C] = A\{B, C\} - \{A, C\}B$

otteniamo $[N_r, a_s] = a_r^\dagger \{a_r, a_s\} - \{a_r^\dagger, a_s\} a_r = -\delta_{rs} a_r$

$$[N_r, a_s^\dagger] = a_r^\dagger \{a_r, a_s^\dagger\} - \{a_r^\dagger, a_s^\dagger\} a_r = \delta_{rs} a_r^\dagger$$

$\Rightarrow a_r^\dagger, a_r$ sono operatori di creazione e distruzione

$$N_r a_r^\dagger |m_r\rangle = (a_r^\dagger N_r + a_r^\dagger) |m_r\rangle = (m_r + 1) a_r^\dagger |m_r\rangle$$

$$N_r a_r |m_r\rangle = (a_r N_r - a_r) |m_r\rangle = (m_r - 1) a_r |m_r\rangle$$

Tuttavia $N_r^2 = a_r^\dagger a_r a_r^\dagger a_r = a_r^\dagger (1 - a_r^\dagger a_r) a_r = a_r^\dagger a_r = N_r$: 55

$\Rightarrow N_r(N_r - 1) = 0 \Rightarrow$ gli unici autovalori ammessi per l'operatore numero sono $N_r = 0$ e $N_r = 1$.

Le regole di anticommutazione conducono a soddisfare la statistica di Fermi-Dirac

$$|1_r\rangle = a_r^\dagger |0\rangle, \quad |2_r\rangle = a_r^\dagger |1_r\rangle = a_r^\dagger a_r^\dagger |0\rangle = 0 \rightarrow \text{2 particelle Non possono occupare lo stesso stato}$$

$$|1_r 1_s\rangle = a_r^\dagger a_s^\dagger |0\rangle = -a_s^\dagger a_r^\dagger |0\rangle = -|1_s 1_r\rangle \rightarrow \text{lo stato è ANTISIMMETRICO per scambio di particelle}$$

Imponiamo quindi le seguenti regole di anticommutazione per gli operatori: $c_r(\vec{p})$ e $d_r(\vec{p})$

$$\{c_r(\vec{p}), c_s^\dagger(\vec{p}')\} = \{d_r(\vec{p}), d_s^\dagger(\vec{p}')\} = \delta_{rs} \delta_{\vec{p}\vec{p}'}$$

$$e \quad \{c_r(\vec{p}), c_s(\vec{p}')\} = \{c_r^\dagger(\vec{p}), c_s^\dagger(\vec{p}')\} = \{d_r(\vec{p}), d_s(\vec{p}')\} = \{d_r^\dagger(\vec{p}), d_s^\dagger(\vec{p}')\} = 0$$

$$\{c_r(\vec{p}), d_s(\vec{p}')\} = \{c_r(\vec{p}), d_s^\dagger(\vec{p}')\} = \{c_r^\dagger(\vec{p}), d_s(\vec{p}')\} = \{c_r^\dagger(\vec{p}), d_s^\dagger(\vec{p}')\} = 0$$

Definiamo quindi $N_r(\vec{p}) = c_r^\dagger(\vec{p}) c_r(\vec{p})$, $\bar{N}_r(\vec{p}) = d_r^\dagger(\vec{p}) d_r(\vec{p})$

Lo stato di vuoto $|0\rangle$ è definito da $c_r(\vec{p})|0\rangle = d_r(\vec{p})|0\rangle = 0 \quad \forall \vec{p}, r=1,2$

equivalentemente $\psi_+(x)|0\rangle = \bar{\psi}_+(x)|0\rangle = 0 \quad \forall x$

Nel caso fermionico, poiché si annullano gli anticommutatori e non i commutatori, dobbiamo ridefinire il "prodotto normale"

$$N(\psi_\alpha(x) \psi_\beta(x')) = N((\psi_{+\alpha} + \psi_{-\alpha})(\psi_{+\beta} + \psi_{-\beta})) =$$

$$= N(\psi_{+\alpha} \psi_{+\beta} + \psi_{+\alpha} \psi_{-\beta} + \psi_{-\alpha} \psi_{+\beta} + \psi_{-\alpha} \psi_{-\beta}) = \psi_{+\alpha} \psi_{+\beta} - \psi_{-\beta} \psi_{+\alpha} + \psi_{-\alpha} \psi_{+\beta} + \psi_{-\alpha} \psi_{-\beta}$$

N.B.

$$N(\bar{\psi} \psi) = \bar{\psi}_+ \psi_+ - \psi_- \psi_+ + \bar{\psi}_- \psi_+ + \bar{\psi}_- \psi_-$$

$$\bar{\psi}_+ \psi_+ \quad \bar{\psi}_+ \psi_- \quad \bar{\psi}_- \psi_+ \quad \bar{\psi}_- \psi_-$$

operatori di costruzione sempre a dx rispettando le regole di anticommutazione

Le costanti del moto che otteniamo dall'invarianza della lagrangiana sono quindi:

$$H = \int d^3x N(\bar{\psi}(x) (-i\hbar c \gamma_j \frac{\partial}{\partial x_j} + mc^2) \psi(x)), \quad \vec{P} = -i\hbar \int d^3x N(\psi^+ \nabla \psi)$$

da cui sostituendo $\psi(x)$ e $\bar{\psi}(x)$

$$\left\{ \begin{aligned} H &= \sum_{r, \vec{p}} \frac{E}{\hbar} (N_r(\vec{p}) + \bar{N}_r(\vec{p})) \\ \vec{P} &= \sum_{r, \vec{p}} \vec{p} (N_r(\vec{p}) + \bar{N}_r(\vec{p})) \\ Q &= -e \sum_{r, \vec{p}} (N_r(\vec{p}) - \bar{N}_r(\vec{p})) \end{aligned} \right.$$

spin lungo la direzione del moto \vec{p} 4x4 matrix

L'operatore di elicità è dato da $S_{\vec{p}} = \frac{\hbar}{2} \int d^3x N(\psi^+(x) \sigma_{\vec{p}} \psi(x))$

da cui $S_p C_r^+(\vec{p})|0\rangle = (-1)^{r+1} \frac{\hbar}{2} C_r^+(\vec{p})|0\rangle \rightarrow$ elettrone } autovettore di S_p

$S_p d_r^+(\vec{p})|0\rangle = (-1)^{r+1} \frac{\hbar}{2} d_r^+(\vec{p})|0\rangle \rightarrow$ positrone } $\pm \frac{\hbar}{2}$

elicità positiva/negativa destro/sinistra

Anche in questo caso abbiamo completa simmetria fra stati di carica positiva e negativa.

Un modo per apprezzare la simmetria fra cariche positive e negative è quello di considerare la rappresentazione di Majorana delle matrici di Dirac

Dalle regole di anticommutazione per gli operatori di creazione e distruzione del campo fermionico $\left(\{ C_r(\vec{p}), C_s^+(\vec{p}') \} = \{ d_r(\vec{p}), d_s^+(\vec{p}') \} = \delta_{rs} \delta_{\vec{p}\vec{p}'} \right)$

otteniamo

$$\{ \Psi_\alpha(x), \Psi_\beta(y) \} = \{ \bar{\Psi}_\alpha(x), \bar{\Psi}_\beta(y) \} = 0$$

$$\{ \Psi_{+\alpha}(x), \bar{\Psi}_{-\beta}(y) \} = i \left(i \gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + \frac{mc}{\hbar} \right) \Delta^+(x-y) = i S^+(x-y)$$

$$\{ \Psi_{-\alpha}(x), \bar{\Psi}_{+\beta}(y) \} = i \left(i \gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + \frac{mc}{\hbar} \right) \Delta^-(x-y) = i S^-(x-y)$$

dove ricordiamo che $\Delta^+(x) = \frac{-ic}{2(2\pi)^3} \int \frac{d^3\vec{k}}{\omega_{\vec{k}}} e^{-ikx}$

$$\Delta^-(x) = -\Delta^+(-x)$$

Infatti
$$\{ \Psi_{+\alpha}(x), \bar{\Psi}_{-\beta}(y) \} = \sum_{\vec{p}} \sum_{\vec{p}'} \frac{mc^2}{V \sqrt{E_{\vec{p}} E_{\vec{p}'}}} \overbrace{\{ C_r(\vec{p}), C_s^+(\vec{p}') \}}^{\delta_{rs} \delta_{\vec{p}\vec{p}'}} u_{r\alpha}(\vec{p}) \bar{u}_{s\beta}(\vec{p}') e^{-i\vec{p}(x-y)}$$

$$= \int \frac{d^3\vec{p}}{\omega_{\vec{p}}} mc^2 \left(\frac{\not{p} + m}{2m} \right)_{\alpha\beta} e^{-i\vec{p}(x-y)} = \left(i \not{\partial} + \frac{mc}{\hbar} \right) \Delta^+(x-y)$$

dove abbiamo usato che $\sum_r u_{r\alpha}(\vec{p}) \bar{u}_{r\beta}(\vec{p}) = \left(\frac{\not{p} + m}{2m} \right)_{\alpha\beta}$ (dalla definizione dei u -spinores)

e analogamente per $\{ \Psi_{-\alpha}(x), \bar{\Psi}_{+\beta}(y) \}$

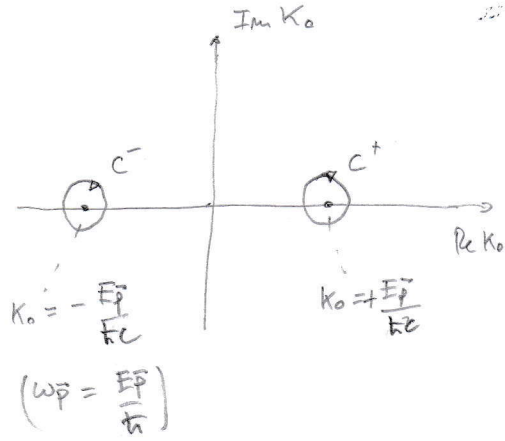
Perciò $S^\pm(x) = \left(i \gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + \frac{mc}{\hbar} \right) \Delta^\pm(x)$

e $\{ \Psi(x), \bar{\Psi}(y) \} = i S(x-y)$

dove $S(x) = S^+(x) + S^-(x) = \left(i \gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + \frac{mc}{\hbar} \right) \Delta(x)$

In analogia con la rappresentazione delle funzioni $\Delta(x)$ possiamo scrivere la rappresentazione integrale delle funzioni $S(x)$ come

$$S^\pm(x) = \frac{-i}{(2\pi\hbar)^4} \int_{C^\pm} d^4p e^{-\frac{i}{\hbar} p x} \frac{\not{p} + m c}{p^2 - m^2 c^2}$$



Poiché $(\not{p} + m c)(\not{p} - m c) = (\not{p} - m c)(\not{p} + m c) = p^2 - m^2 c^2$ possiamo riscrivere

$$S^\pm(x) = \frac{-i}{(2\pi\hbar)^4} \int_{C^\pm} d^4p \frac{e^{-\frac{i}{\hbar} p x}}{\not{p} - m c}$$

Relazione fra spin e statistica

Abbiamo visto che la quantizzazione del:

- campi di Dirac con regole di anticommutazione \rightarrow statistica di Fermi-Dirac
 - " Klein-Gordon " " commutazione \rightarrow " " Bose-Einstein
- e possibile quantizzare diversamente? No!

Se utilizzassimo regole di commutazione per quantizzare il campo di Dirac otterremmo

$$H = \sum_{\vec{p}} E_p (N_r(\vec{p}) + \bar{N}_r(\vec{p})) \rightarrow \sum_{\vec{p}} E_p (N_r(\vec{p}) - \bar{N}_r(\vec{p}))$$

regole anticommut. regole comm.

ma nel caso della stat. di B.E. N e \bar{N} possono assumere qualsiasi valore $(0, 1, 2, \dots)$
 $\Rightarrow H$ non sarebbe limitata inferiormente. La richiesta di un hamiltoniano limitato inferiormente (stato di vuoto stabile) impone le regole di anticommutazione per il campo di Dirac.

Viceversa se utilizzassimo regole di anticommutazione per il campo di Klein-Gordon otteniamo

$$H = \sum_{\vec{k}} \frac{\hbar \omega_{\vec{k}}}{2} (a^\dagger(\vec{k}) a(\vec{k}) + a(\vec{k}) a^\dagger(\vec{k})) = \sum_{\vec{k}} \frac{\hbar \omega_{\vec{k}}}{2} \mathbb{1}$$

multiplo dell'identità

\Rightarrow ogni osservabile è una costante del moto! se $\{a^\dagger, a\} = 1$

Teorema spin-statistica (Pauli) (non esistono eccezioni note in Natura!!!)
 Particelle identiche con spin intero obbediscono la statistica di Fermi-Dirac
 " " " " semi-intero " " " " Bose-Einstein

Introduciamo ora il propagatore fermionico di Feynman come

$$\langle 0 | T(\psi(x) \bar{\psi}(x')) | 0 \rangle$$

dove definiamo il prodotto T-ordinato per campi fermionici come

$$T(\psi(x) \bar{\psi}(x')) = \theta(t-t') \psi(x) \bar{\psi}(x') - \theta(t'-t) \bar{\psi}(x') \psi(x) = \begin{cases} \psi(x) \bar{\psi}(x') & \text{se } t < t' \\ -\bar{\psi}(x') \psi(x) & \text{se } t' < t \end{cases}$$

↳ antisimmetrizzazione dei campi fermionici.

abbiamo che

$$\begin{aligned} \langle 0 | \psi(x) \bar{\psi}(x') | 0 \rangle &= \langle 0 | \psi_+(x) \bar{\psi}_-(x') | 0 \rangle = \\ &= \langle 0 | \{ \psi_+(x), \bar{\psi}_-(x') \} | 0 \rangle = i S^+(x-x') \end{aligned}$$

e analogamente

$$\langle 0 | \bar{\psi}(x') \psi(x) | 0 \rangle = \langle 0 | \bar{\psi}_+(x') \psi_-(x) | 0 \rangle = \langle 0 | \{ \bar{\psi}_+(x'), \psi_-(x) \} | 0 \rangle = i S^-(x-x')$$

da cui

$$\langle 0 | T(\psi(x) \bar{\psi}(x')) | 0 \rangle = i S_F(x-x')$$

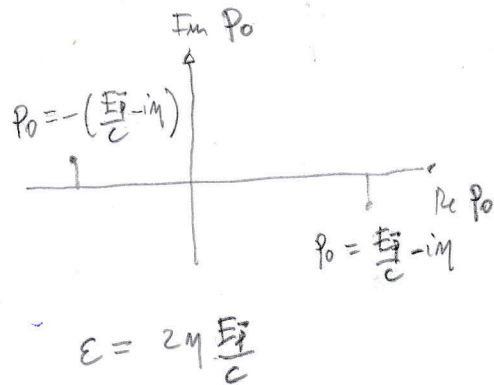
dove $S_F(x) = \theta(t) S^+(x) - \theta(-t) S^-(x) = \left(i \gamma^0 \frac{\partial}{\partial x^0} + \frac{m c}{\hbar} \right) \Delta_F(x)$

la cui rappresentazione integrale è data da

$$S_F(x) = \frac{\hbar}{(2\pi\hbar)^4} \int d^4 p e^{-\frac{i}{\hbar} p x} \frac{\not{p} + m c}{p^2 - m^2 c^2 + i\epsilon}$$

e ricordiamo che $\Delta_F(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 k e^{-i k x}}{k^2 - \mu^2 + i\epsilon}$

dove l'integrale è sull'asse reale $-\infty < p_0 < \infty$

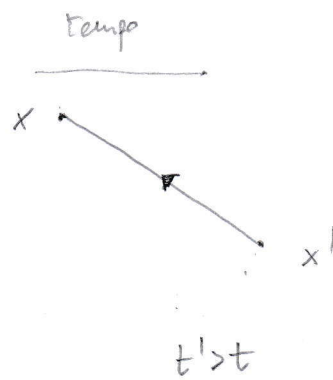
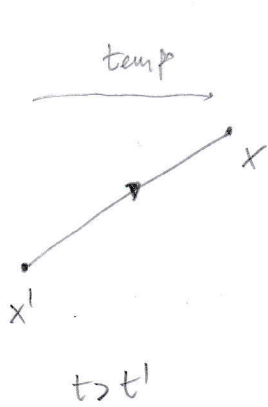


In termini di diagrammi (di Feynman) il propagatore fermionico: =64

può essere interpretato come:

creazione di un fermione in x' e annichilazione in x per $t > t'$

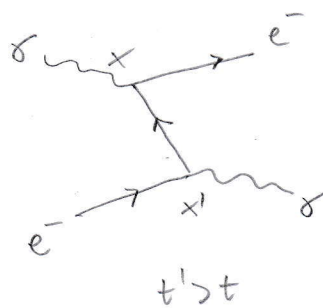
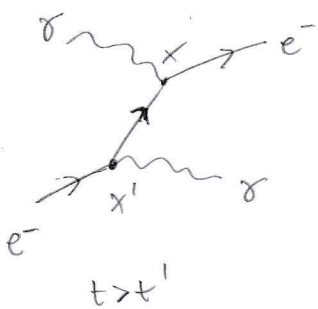
creazione di un anti-fermione in x e annichilazione in x' per $t' > t$



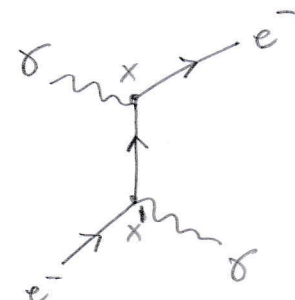
N.B. la freccia del propagatore (legata alla direzione dell'impulso p) è sempre nella stesso verso di propagazione dei fermioni (verso opposto degli anti-fermioni).

Esempio: scattering Compton elettrone-fotone

$$e^- \gamma \rightarrow e^- \gamma$$



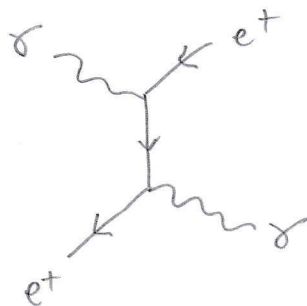
=



"No time ordering"

Analogamente

$$e^+ \gamma \rightarrow e^+ \gamma$$



N.B. per i γ non è necessario specificare il verso di propagazione (non c'è ambiguità particella/antiparticella)

L'interazione elettromagnetica elettrone-fotone può essere introdotta analogamente al caso non-relativistico tramite la "sostituzione minimale"

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - q\phi(x), \quad -i\hbar \vec{\nabla} \rightarrow -i\hbar \vec{\nabla} - \frac{q}{c} \vec{A}(x)$$

Nel caso relativistico dobbiamo la sostituzione minimale covariante

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} \rightarrow D_\mu = \partial_\mu + \frac{iq}{\hbar c} A_\mu(x)$$

dove $q = -e < 0$ nel caso degli elettroni

Possiamo scrivere la lagrangiana e l'equazione di Dirac nel caso interagente come

$$\mathcal{L} = c \bar{\psi}(x) (i\hbar \gamma^\mu D_\mu - mc) \psi(x) = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I$$

dove $\mathcal{L}_0 = c \bar{\psi}(x) (i\hbar \gamma^\mu \partial_\mu - mc) \psi(x)$ lagrangiana non interagente (campo libero)

$$\mathcal{L}_I = e \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) A_\mu(x) = -\frac{1}{c} S^\mu(x) A_\mu(x) \quad \text{termine di interazione}$$

con $S^\mu(x) = -ce \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x)$ corrente elettromagnetica conservata
 $S^\mu(x) = j^\mu(x) = (c\rho(x), \vec{j}(x))$

da cui si deriva l'equazione di Dirac

$$(i\hbar \gamma^\mu \partial_\mu - mc) \psi(x) = -\frac{e}{c} \gamma^\mu A_\mu(x) \psi(x)$$

$$\text{ovvero } (i\hbar \gamma^\mu D_\mu - mc) \psi(x) = 0$$

Per avere la lagrangiana completa per l'elettrodinamica relativistica dobbiamo considerare anche il termine di densità lagrangiana del campo di radiazione A_μ (campo A_μ libero in assenza di cariche), $\mathcal{L}_{rad.} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x)$

Dallo studio delle equazioni di Maxwell sappiamo che il potenziale A_μ non ha significato fisico ma che la teoria dell'essere invariante per trasformazioni di gauge (che lasciano invariate i campi \vec{E} e \vec{B})

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu f(x) \quad (f(x) \text{ arbitraria})$$

Notiamo che sotto trasformazioni di gauge

$$\mathcal{L}_I \rightarrow \mathcal{L}'_I = \mathcal{L}_I + e \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) \partial_\mu f(x)$$

\mathcal{L} Non è gauge invariante a meno di richiedere che il campo di Dirac trasformi come

$$\begin{cases} \psi(x) \rightarrow \psi'(x) = \psi(x) e^{i\frac{e}{\hbar c} f(x)} \\ \bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}'(x) = \bar{\psi}(x) e^{-i\frac{e}{\hbar c} f(x)} \end{cases}$$

$$\mathcal{L}_0 \rightarrow \mathcal{L}'_0 = \mathcal{L}_0 - e \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) \partial_\mu f(x)$$

e di conseguenza \mathcal{L} è gauge invariante sotto trasformazioni di gauge "locali" $f = f(x)$ (nel caso f sia indipendente da x si dice trasformazione di gauge "globale").

Abbiamo visto che solamente le componenti trasverse del campo $A_\mu(x)$ del fotone corrispondono a gradi di libertà fisici e abbiamo pertanto quantizzato il campo vettoriale $\vec{A}(\vec{x}, t)$ con la condizione di Coulomb $\nabla \cdot \vec{A} = 0$, tuttavia la decomposizione in componenti trasverse e longitudinali è "frame dependent" e siamo pertanto interessati ad avere una formulazione covariante di Lorentz. Quantizzeremo quindi il campo A_μ imponendo successivamente per eliminare i gradi di libertà non-fisici.

Partiamo quindi dal campo $A^\mu(x)$ che soddisfa la condizione di Lorentz $\partial_\mu A^\mu = 0$ (Lorentz-invariante) con equazioni del campo $\square A^\mu = 0$ (campo libero).

Sviluppiamo il campo in serie di Fourier

$$A^\mu(x) = A_+^\mu(x) + A_-^\mu(x) \quad \text{dove}$$

$$A_+^\mu(x) = \sum_{\vec{k}} \left(\frac{\hbar c^2}{2V\omega_{\vec{k}}} \right)^{1/2} \epsilon_r^\mu(\vec{k}) a_r(\vec{k}) e^{-ikx}$$

$$A_-^\mu(x) = \sum_{\vec{k}} \left(\frac{\hbar c^2}{2V\omega_{\vec{k}}} \right)^{1/2} \epsilon_r^\mu(\vec{k}) a_r^\dagger(\vec{k}) e^{ikx} \quad \text{con } k^0 = \frac{\omega_{\vec{k}}}{c} = |\vec{k}|$$

I 4 stati di polarizzazione $\epsilon_r^\mu(\vec{k})$, $r=0, \dots, 3$ possono essere scelti reali (\vec{E} e \vec{B} sono reali) e soddisfanno le condizioni di ortogonalità

$$\epsilon_r^\mu(\vec{k}) \epsilon_s^\mu(\vec{k}) = \epsilon_{r\mu}(\vec{k}) \epsilon_s^\mu(\vec{k}) = -\sum_r \delta_{rs} \quad r, s = 0, \dots, 3$$

$$\sum_r \sum_\mu \epsilon_r^\mu(\vec{k}) \epsilon_r^\mu(\vec{k}) = -g^{\mu\nu} \quad \text{dove } \epsilon_0^\mu = -1, \quad \epsilon_1^\mu = \epsilon_2^\mu = \epsilon_3^\mu = 1$$

Fissando un frame specifico si può scegliere $\epsilon_0^\mu(\vec{k}) = n^\mu = (1, \vec{0})$; $\epsilon_r^\mu(\vec{k}) = (0, \vec{e}_r(\vec{k}))$ $r=1,2,3$ dove $\vec{e}_1(\vec{k})$ e $\vec{e}_2(\vec{k})$ sono le componenti trasverse a \vec{k} e $\vec{e}_3(\vec{k}) = \vec{k}/|\vec{k}|$

$$\vec{k} \cdot \vec{e}_r(\vec{k}) = 0, \quad r=1,2; \quad \vec{e}_r(\vec{k}) \cdot \vec{e}_s(\vec{k}) = \delta_{rs}, \quad r, s=1,2,3$$

ϵ_1^μ e ϵ_2^μ , ϵ_3^μ e ϵ_0^μ sono dette componenti trasverse, longitudinali e scalari

La forme covariante di $\epsilon_3^\mu(\vec{k})$ è
$$\epsilon_3^\mu(\vec{k}) = \frac{k^\mu - (k_\mu) n^\mu}{((k_\mu)^2 - k^2)^{1/2}} \quad (= \frac{(0, \vec{k})}{|\vec{k}|})$$

$$\epsilon_{3\mu} \epsilon_3^\mu = 1$$

Le condizioni di quantizzazione a tempi uguali sono date da 65

$$\left. \begin{aligned} [A^\mu(\vec{x}, t), A^\nu(\vec{x}', t)] &= 0, & [\dot{A}^\mu(\vec{x}, t), \dot{A}^\nu(\vec{x}', t)] &= 0 \\ [A^\mu(\vec{x}, t), \dot{A}^\nu(\vec{x}', t)] &= -i\hbar c^2 g^{\mu\nu} \delta(\vec{x} - \vec{x}') \end{aligned} \right\}$$

che sono analoghe alle condizioni di quantizzazione del campo di Klein-Gordon per un (massless)

$$[A^\mu(x), A^\nu(x')] = i\hbar c D^{\mu\nu}(x-x')$$

dove $D^{\mu\nu}(x) = \lim_{m \rightarrow 0} (-g^{\mu\nu} \Delta(x))$

Il propagatore di Feynman è dato da

$$\langle 0 | T \{ A^\mu(x) A^\nu(x') \} | 0 \rangle = i\hbar c D_F^{\mu\nu}(x-x')$$

dove $D_F^{\mu\nu}(x) = \lim_{m \rightarrow 0} (-g^{\mu\nu} \Delta_F(x)) = -\frac{g^{\mu\nu}}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k e^{-ikx}}{k^2 + i\epsilon}$

Le condizioni di quantizzazione per gli operatori $a_r(\vec{k})$ e $a_r^\dagger(\vec{k})$ sono

$$\left. \begin{aligned} [a_r(\vec{k}), a_s^\dagger(\vec{k}')] &= \zeta_r \delta_{rs} \delta_{\vec{k}\vec{k}'} \\ [a_r(\vec{k}), a_s(\vec{k}')] &= [a_r^\dagger(\vec{k}), a_s^\dagger(\vec{k}')] = 0 \end{aligned} \right\}$$

$a_r(\vec{k})$ e $a_r^\dagger(\vec{k})$ sono gli operatori di distruzione e creazione per le componenti trasverse ($r=1,2$), longitudinali ($r=3$) e scalari ($r=0$) del fotone.

Lo stato di vuoto è definito da $|0\rangle$ tale che

$$a_r(\vec{k}) |0\rangle = 0 \quad \forall \vec{k}, r=0,1,2,3$$

equivalentemente $A_\mu^\dagger(x) |0\rangle = 0 \quad \forall x, \mu=0,1,2,3$

e $|1_{\vec{k}r}\rangle = a_r^\dagger(\vec{k}) |0\rangle$ i.e. $a_r^\dagger(\vec{k})$ è un operatore di creazione

$$H = \int d^3\vec{x} N [\pi^\mu(x) \dot{A}_\mu(x) - \mathcal{L}(x)] = \sum_{r\vec{k}} \hbar \omega_{\vec{k}} \zeta_r a_r^\dagger(\vec{k}) a_r(\vec{k})$$

dove $\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{2} (\partial_\nu A_\mu(x)) (\partial^\nu A^\mu(x))$ e $\pi^\mu(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\mu} = -\frac{1}{c^2} \dot{A}^\mu(x)$

e H è definita positiva. E.g.

$$\begin{aligned}
 \langle 1_{\vec{k}r} | 1_{\vec{k}r} \rangle &= \sum_{\vec{q}S} \hbar \omega_{\vec{q}} \sum_S \langle 0 | \underbrace{Q_S^+(\vec{q}) Q_S(\vec{q}) Q_r^+(\vec{k})}_{\int_V d^3r' d^3q'} | 0 \rangle \\
 &= \sum_{\vec{q}S} \hbar \omega_{\vec{q}} \sum_S \langle 0 | Q_S^+(\vec{q}) [Q_S(\vec{q}), Q_r^+(\vec{k})] | 0 \rangle \\
 &= \hbar \omega_{\vec{k}} \sum_r^2 \langle 0 | Q_r^+(\vec{k}) | 0 \rangle = \hbar \omega_{\vec{k}} \langle 0 | Q_r^+(\vec{k}) | 0 \rangle
 \end{aligned}$$

e $N_r(\vec{k}) = \sum_r Q_r^+(\vec{k}) Q_r(\vec{k})$

tuttavia

$$\langle 1_{\vec{k}r} | 1_{\vec{k}r} \rangle = \langle 0 | Q_r(\vec{k}) Q_r^+(\vec{k}) | 0 \rangle = \sum_r \langle 0 | 0 \rangle = \sum_r$$

e la norma dello stato $r=0$ (componente scalare) è negativa.

È un disastro per la teoria? No! Le componenti scalari e longitudinali Non sono fisiche! Fin'ora abbiamo ignorato la condizione di Lorentz $\partial_\mu A^\mu(x) = 0$. Introduciamo la condiz. di Lorentz attraverso la condizione di Gupta-Bleuler

$$\partial_\mu A^\mu_+(x) | \psi \rangle = 0 \quad \text{ovvero} \quad \langle \psi | \partial_\mu A^\mu_-(x) = 0$$

di vincolo solamente $A^\mu_+(x)$ (altrimenti $[\partial_\mu A^\mu_+(x), A^\mu(x')] = i\hbar c \partial_\mu D^{\mu\nu}(x-x') = 0$)
 Lorentz. cond.

$$\Rightarrow \langle \psi | \partial_\mu A^\mu(x) | \psi \rangle = \langle \psi | (\partial_\mu A^\mu_+(x) + \partial_\mu A^\mu_-(x)) | \psi \rangle = 0$$

La condizione di Lorentz vale per i valori medi sugli stati (limite classico)

Nello spazio degli impulsi la condizione di Gupta-Bleuler equivale a

$$\partial_\mu A^\mu_+(x) | \psi \rangle = \partial_\mu \sum_{r,\vec{k}} \left(\frac{\hbar c^2}{2V\omega_{\vec{k}}} \right)^{1/2} \epsilon_r^\mu(\vec{k}) Q_r(\vec{k}) e^{-ikx} | \psi \rangle = -i \sum_{r,\vec{k}} \left(\frac{\hbar c^2}{2V\omega_{\vec{k}}} \right)^{1/2} k_\mu \epsilon_r^\mu(\vec{k}) Q_r(\vec{k}) e^{-ikx} | \psi \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{r,\vec{k}} k_\mu \epsilon_r^\mu(\vec{k}) Q_r(\vec{k}) | \psi \rangle = 0 \quad \text{ma} \quad k_\mu \epsilon_r^\mu(\vec{k}) = 0 \quad \text{per} \quad r=1,2$$

$$\Rightarrow \sum_{\vec{k}} \left(k_\mu \epsilon_0^\mu(\vec{k}) Q_0(\vec{k}) + k_\mu \epsilon_3^\mu(\vec{k}) Q_3(\vec{k}) \right) | \psi \rangle = \sum_{\vec{k}} \left(k_0 Q_0(\vec{k}) - \frac{k_0^2}{|\vec{k}|} Q_3(\vec{k}) \right) | \psi \rangle = 0$$

$$\Rightarrow (Q_0(\vec{k}) - Q_3(\vec{k})) | \psi \rangle = 0 = (Q_3(\vec{k}) - Q_0(\vec{k})) | \psi \rangle \quad \forall \vec{k}$$

Questa condizione lega gli stati di polarizzazione longitudinali e scalari dei fotoni in ogni stato fisico. Analogamente $0 = \langle \psi | \partial_\mu A^\mu_-(x) \Rightarrow \dots \langle \psi | (Q_3^+(\vec{k}) - Q_0^+(\vec{k})) = 0$

$$\langle \psi | Q_3^+(\vec{k}) Q_3(\vec{k}) + Q_0^+(\vec{k}) Q_0(\vec{k}) - Q_3^+(\vec{k}) Q_0(\vec{k}) - Q_0^+(\vec{k}) Q_3(\vec{k}) | \psi \rangle =$$

$$= \langle \psi | Q_3^+(\vec{k}) Q_3(\vec{k}) - Q_0^+(\vec{k}) Q_0(\vec{k}) | \psi \rangle = 0 \quad \forall \vec{k}$$

$$\langle \psi | Q_0^+(\vec{k}) = \langle \psi | Q_3^+(\vec{k}), Q_0(\vec{k}) | \psi \rangle = Q_3(\vec{k}) | \psi \rangle$$

$$\Rightarrow \langle \psi | H | \psi \rangle = \langle \psi | \sum_{\vec{k}} \sum_{r=0}^3 \hbar \omega_k a_r^\dagger(\vec{k}) a_r(\vec{k}) | \psi \rangle = \langle \psi | \sum_{\vec{k}} \sum_{r=1}^2 \hbar \omega_k a_r^\dagger(\vec{k}) a_r(\vec{k}) | \psi \rangle$$

Solo le polarizzazioni trasverse del fotone contribuiscono al valore di aspettazione della teoria (le polarizzazioni longitudinali e scalari si cancellano).

(Questo è vero per ogni osservabile fisica: le polarizzazioni longitudinali e scalari NON sono osservabili).

Il propagatore del fotone

Definiamo il propagatore nello spazio delle coordinate come

$$D_F^{\mu\nu}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k D_F^{\mu\nu}(k) e^{-ikx}$$

dove $D_F^{\mu\nu}(k) = \frac{-g^{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon} = \frac{1}{k^2 + i\epsilon} \sum_r \sum_{r'} \epsilon_r^\mu(\vec{k}) \epsilon_{r'}^\nu(\vec{k}) =$

$$= \frac{1}{k^2 + i\epsilon} \left\{ \sum_{r=1}^2 \epsilon_r^\mu(\vec{k}) \epsilon_r^\nu(\vec{k}) + \epsilon_3^\mu(\vec{k}) \epsilon_3^\nu(\vec{k}) + \epsilon_0^\mu(\vec{k}) \epsilon_0^\nu(\vec{k}) \right\}$$

frame in cui $\epsilon_0^\mu(\vec{k}) = m^\mu$

$$= \frac{1}{k^2 + i\epsilon} \left\{ \sum_{r=1}^2 \epsilon_r^\mu(\vec{k}) \epsilon_r^\nu(\vec{k}) + \frac{(k^\mu - (k \cdot m) m^\mu)(k^\nu - (k \cdot m) m^\nu)}{(k \cdot m)^2 - k^2} + (-1) m^\mu m^\nu \right\}$$

sums: transverse pol. longitudinal pol. scalar pol.

$$= T D_F^{\mu\nu}(\vec{k}) + c D_F^{\mu\nu}(\vec{k}) + R D_F^{\mu\nu}(\vec{k})$$

con $T D_F^{\mu\nu}(k) = \frac{1}{k^2 + i\epsilon} \sum_{r=1}^2 \epsilon_r^\mu(\vec{k}) \epsilon_r^\nu(\vec{k})$; $c D_F^{\mu\nu}(k) = \frac{m^\mu m^\nu}{(k \cdot m)^2 - k^2}$

$$R D_F^{\mu\nu}(k) = \frac{1}{k^2 + i\epsilon} \frac{k^\mu k^\nu - (k \cdot m)(k^\mu m^\nu + k^\nu m^\mu)}{(k \cdot m)^2 - k^2}$$

dove $c D_F^{\mu\nu}(x) = \frac{g^{\mu 0} g^{\nu 0}}{(2\pi)^4} \int d^3\vec{k} \frac{e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}}}{|\vec{k}|^2} \underbrace{\int dk^0 e^{-ik^0 x^0}}_{2\pi \delta(x^0)} = g^{\mu 0} g^{\nu 0} \frac{1}{4\pi|\vec{x}|} \delta(x^0)$

↓
potenziale di Coulomb

$$\int \frac{d^3\vec{k}}{|\vec{k}|^2} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} = \iiint d\phi d\cos\theta \frac{k^2}{k^2} dr e^{i|\vec{x}| \cos\theta} = 2\pi \int dr \frac{e^{i|\vec{x}|r} - e^{-i|\vec{x}|r}}{i|\vec{x}|r} = \frac{4\pi}{|\vec{x}|} \int_0^\infty dr \frac{\sin r|\vec{x}|}{r|\vec{x}|} = \frac{2\pi}{|\vec{x}|}$$

le polarizzazioni longitudinali e scalare contribuiscono al propagatore!

Il termine $R_{DF}^{\mu\nu}(k)$ invece non contribuisce, infatti dalle

conservazioni della carica abbiamo che $\partial_\mu j^\mu(x) = 0$

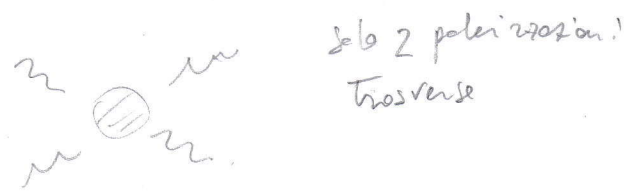
che nella spazio degli impulsi equivale $k_\mu j^\mu(\vec{k}) = 0$

dove $j^\mu(k) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4x j^\mu(x) e^{-ikx}$

Siccome $R_{DF}^{\mu\nu}(k)$ è proporzionale a $k^\mu k^\nu \Rightarrow R_{DF}^{\mu\nu}(k)$ da contributo nullo nell'accoppiamento fra cariche (correnti).

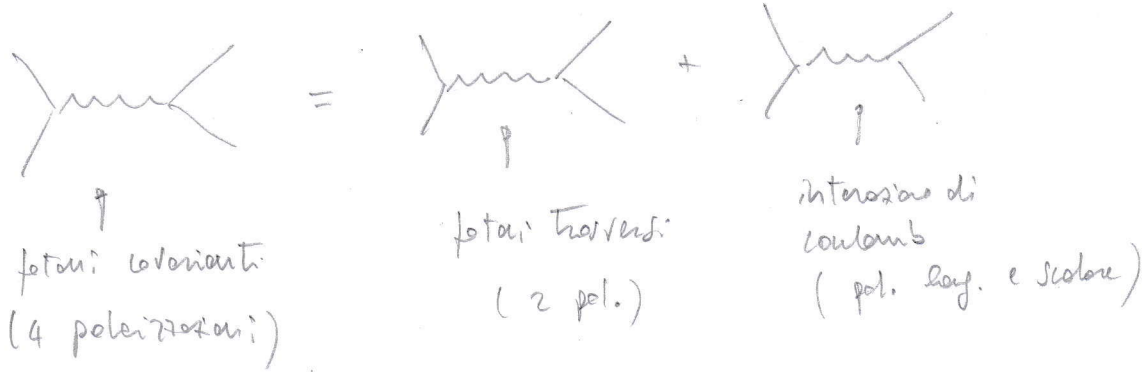
In definitiva possiamo quantizzare il campo del fotone in maniera covariante, senza specificare un particolare sistema di riferimento.

Per un per fotone: Reali $k^2=0$
(stati iniziali o finali)



solo 2 polarizzazioni trasverse

Per fotone che si propagano (virtuali)



Vogliamo ora discutere il caso in cui i campi non sono liberi ma interagiscono. Questo problema non è risolvibile esattamente e deve essere affrontato tramite tecniche approssimate e.g. teoria delle perturbazioni. In elettrodinamica l'approccio perturbativo è giustificato dal valore della costante di struttura fine $\alpha \approx \frac{1}{137}$ che può essere usata come parametro per l'espansione perturbativa.

Unità naturali

In meccanica quantistica relativistica è particolarmente comodo usare le cosiddette unità naturali (u.n.) in cui si misura "energia x tempo" (azione) in unità di \hbar e velocità in unità di c (ovvero si pone $\hbar = c = 1$).

In questo modo tutte le unità hanno le dimensioni di potenze di una massa.

$$\text{lunghezza} \quad [L] = \left[\frac{M V^2 \cdot T}{M V} \right] = \left[\frac{A}{M V} \right] \xrightarrow{\text{u.n.}} [M^{-1}] \text{ in unità naturali}$$

↑ tempo
↑ azione

↓
↓
↓

massa
velocità

$$[T] = \left[\frac{A}{M V^2} \right] \xrightarrow{\text{u.n.}} [M^{-1}] \quad \Rightarrow \quad [M^p L^q T^r] \xrightarrow{\text{u.n.}} [M^{p-q-r}]$$

c.g.s.
↓
u.n.

In u.n. la costante di struttura fine vale

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi} \approx \frac{1}{137} \quad \left(\alpha = \frac{e^2}{4\pi\hbar c} \approx \frac{1}{137} \text{ in c.g.s.} \right)$$

La massa dell'elettrone è $m_e = 0.511 \text{ MeV}$ ($m_e = 0.511 \text{ MeV}/c^2$ in c.g.s.)

Oramai alla fine di un calcolo possiamo i valori di \hbar e c in

unità c.g.s. $\hbar = 6.58 \times 10^{-22} \text{ MeV} \cdot \text{sc}$

$\hbar c = 1.973 \times 10^{-11} \text{ MeV} \cdot \text{cm}$

sfruttando semplicemente l'analisi dimensionale.

Ad esempio tramite analisi dimensionale è possibile calcolare le dimensioni 70 degli operatori di campo:

• Densità di hamiltoniana \mathcal{H} e lagrangiana \mathcal{L}

$$[\mathcal{H}] = [\mathcal{L}] = \left[\frac{E}{L^3} \right] = \left[\frac{A}{L^3 T} \right] \xrightarrow{\text{u.n.}} [M^4]$$

• Campo scalare ϕ e vettoriale A^μ compaiono nella \mathcal{L} come $(\partial_\mu \phi)^2$, $\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 \phi^2$, $\partial_\mu A_\nu$

$$[\phi] = [A^\mu] = \left[\left(\frac{E}{L^3} \cdot L^2 \right)^{1/2} \right] \xrightarrow{\text{u.n.}} [M]$$

infatti il fattore di normalizzazione del comp è $\left[c \sqrt{\frac{\hbar}{2EL^3}} \right] \xrightarrow{\text{u.n.}} [M]$
e quindi gli operatori di creazione e distruzione sono adimensionali

• Campo di Dirac ψ compare nella \mathcal{L} come $\bar{\psi} \not{\partial} \psi$, $mc^2 \bar{\psi} \psi$

$$[\psi] = \left[\left(\frac{1}{L^3} \right)^{1/2} \right] \xrightarrow{\text{u.n.}} [M^{3/2}]$$

e il fattore di normalizzazione è infatti $\left[\sqrt{\frac{mc^2}{EL^3}} \right] \xrightarrow{\text{u.n.}} [M^{3/2}]$

Lo schema di evoluzione di interazione

Per trattare le interazioni fra campi è particolarmente utile utilizzare lo "schema di interazione". Consideriamo $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{O}}{\partial t} = 0$

• Schema di Schrodinger: l'evoluzione temporale è associata allo stato

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\alpha, t\rangle_S = H |\alpha, t\rangle_S, \quad |\alpha, t\rangle_S = U(t, t_0) |\alpha, t_0\rangle_S$$

$$\text{dove } U(t, t_0) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)\right) \quad \frac{dO^S}{dt} = \frac{\partial O^S}{\partial t} = 0$$

• Schema di Heisenberg: $U^\dagger(t, t_0) |\alpha, t\rangle_S = |\alpha, t_0\rangle_S \equiv |\alpha\rangle_H$

$$O^H(t) = U^\dagger(t, t_0) O^S U(t, t_0) \quad \text{e} \quad O^H(t_0) = O^S \quad (H^H = H^S = H)$$

abbiamo che ${}_H \langle \alpha | O^H(t) | \alpha \rangle_H = {}_S \langle \alpha, t | U^\dagger O^S U | \alpha, t \rangle_S = {}_S \langle \alpha, t | O^S | \alpha, t \rangle_S$

$$i\hbar \frac{d}{dt} O^H(t) = i\hbar \frac{d}{dt} (U^\dagger O^S U) = \dots = [O^H(t), H] \quad \text{eq. di Heisenberg}$$

evoluzione temporale associata agli operatori (stati indep. dal temp)

Schema di interazione

separiamo H in due termini: $H = H_0 + H_I$ e definiamo

$$U_0(t, t_0) = \exp(-i H_0 (t - t_0)) \quad , \quad O^I(t) = U_0^\dagger(t - t_0) O^S U_0(t - t_0)$$

dove $H_0^I = H_0^S = H_0$. Abbiamo che

$$i\hbar \frac{d}{dt} O^I(t) = [O^I(t), H_0] \quad \text{e} \quad i\hbar \frac{d}{dt} |\alpha, t\rangle_I = H_I^I(t) |\alpha, t\rangle_I$$

$$\text{dove} \quad H_I^I(t) = U_0^\dagger H_I^S U_0 = e^{\frac{i}{\hbar} H_0 (t - t_0)} H_I^S e^{-\frac{i}{\hbar} H_0 (t - t_0)}$$

L'evoluzione temporale dovuta a H_0 (hamiltoniana non interagente) è associata agli operatori (Heisenberg), quella dovuta a H_I (hamiltoniana interagente) è associata agli stati (Schrödinger).

N.B. gli operatori di campo nello schema di interazione soddisfano la stessa eq. di Heisenberg dei campi non interagenti. $H_0^I = H_0$, quindi possiamo utilizzare le soluzioni per i campi liberi ottenute in precedenza!

Sia $|\phi(t)\rangle$ un vettore di stato nella repr. di int. (primario $\hbar=1$ e sottointendiamo l'apice I):

$$i \frac{d}{dt} |\phi(t)\rangle = H_I(t) |\phi(t)\rangle \quad \text{e} \quad |\phi(t)\rangle = U(t, t_0) |\phi(t_0)\rangle$$

dove quindi
$$i \frac{d}{dt} U(t, t_0) |\phi(t_0)\rangle = H_I(t) U(t, t_0) |\phi(t_0)\rangle$$

$$\Rightarrow i U(t, t_0) = \int_{t_0}^t dt H_I(t) U(t, t_0) + K \quad \text{ma} \quad U(t_0, t_0) = \mathbb{1}$$

$$\Rightarrow U(t, t_0) = \mathbb{1} - i \int_{t_0}^t dt H_I(t) U(t, t_0) \quad \text{che può essere risolta iterativamente}$$

$$U(t, t_0) = \mathbb{1} - i \int_{t_0}^t dt_1 H_I(t_1) \left(\mathbb{1} - i \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_I(t_2) U(t_2, t_0) \right) =$$

$$= \mathbb{1} - i \int_{t_0}^t dt_1 H_I(t_1) + (-i)^2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_I(t_1) H_I(t_2) + \dots$$

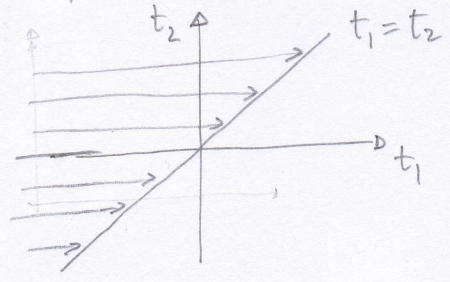
$$+ (-i)^m \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_{m-1}} dt_m H_I(t_1) H_I(t_2) \dots H_I(t_m) + \dots$$

È possibile dimostrare che (se $H_I(t)$ non contiene un # dispari di campi fermionici) (comp. fermionici)
fermion

$$\int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_I(t_1) H_I(t_2) = \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_1}^t dt_2 H_I(t_2) H_I(t_1)$$

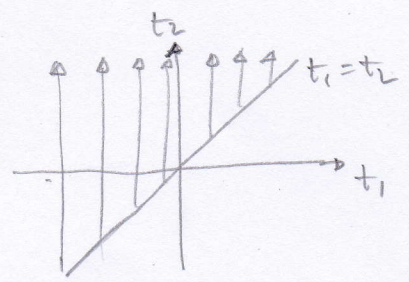
infatti cambiando le variabili di integrazione nel primo membro

$$\int_{t_0}^t dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_1 H_I(t_2) H_I(t_1) \rightarrow$$



che è equivalente a

$$\int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_1}^t dt_2 H_I(t_2) H_I(t_1) \rightarrow$$



per cui

$$\int_{t_0}^{t_0} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_I(t_1) H_I(t_2) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_0} dt_1 \int_{t_0}^{t_0} dt_2 T(H_I(t_1) H_I(t_2))$$

dove $T(A(t_1) B(t_2)) = \theta(t_1 - t_2) A(t_1) B(t_2) + \theta(t_2 - t_1) B(t_2) A(t_1) = \begin{cases} A(t_1) B(t_2) & \text{se } t_1 > t_2 \\ B(t_2) A(t_1) & \text{se } t_2 > t_1 \end{cases}$

generalizzando a più operatori $T(A, B, \dots, N)$ ordina temporalmente il prodotto di operatori.

Iterando questo argomento si può mostrare che

$$\int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n H_I(t_1) \dots H_I(t_n) = \frac{1}{n!} \int_{t_0}^t dt_1 \dots \int_{t_0}^t dt_n T(H_I(t_1) \dots H_I(t_n))$$

e quindi, introducendo lo sviluppo in serie di Hamiltoniana H_I

$$U(t, t_0) \equiv \mathbb{1} - \int_{t_0}^t dt_1 H_I(t_1) + \frac{(-i)^2}{2} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 T(H_I(t_1) H_I(t_2)) + \dots + \frac{(-i)^n}{n!} \int_{t_0}^t dt_1 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n T(H_I(t_1) \dots H_I(t_n)) + \dots$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-i)^m}{m!} \int_{t_0}^t dt_1 \dots \int_{t_0}^{t_{m-1}} dt_m T(H_I(t_1) \dots H_I(t_m)) = T \left(\exp \left(-i \int_{t_0}^t dt' H_I(t') \right) \right)$$

ed è dunque nota come "serie di Dyson"

è anche $|\phi(t)\rangle = T \left(\exp \left(-i \int_{t_0}^t dt' H_I(t') \right) \right) |\phi(t_0)\rangle$

73

Dato uno stato iniziale $|i\rangle = |\phi(t_0)\rangle$ la probabilità di trovare lo stato $|f\rangle$ al tempo t generico è dato da

$$P_{fi} = |\langle f | U(t, t_0) | i \rangle|^2 \equiv |U_{fi}(t, t_0)|^2$$

La probabilità di "transizione" da i a f per unità di tempo è

$$W = \frac{1}{t - t_0} |U_{fi}(t, t_0) - \delta_{fi}|^2$$

consideriamo il limite in cui $t_0 \rightarrow -\infty$ e $t \rightarrow +\infty$ e definiamo

$$S \equiv U(-\infty, +\infty) \quad e \quad |\phi(+\infty)\rangle = S |\phi(-\infty)\rangle$$

$$\langle f | \phi(+\infty)\rangle = \langle f | S | i \rangle \equiv S_{fi}$$

Espandendo $|\phi(+\infty)\rangle$ su una base ortonormale abbiamo che

$$|\phi(+\infty)\rangle = \sum_f |f\rangle \langle f | \phi(+\infty)\rangle = \sum_f |f\rangle S_{fi}$$

$$\langle \phi(+\infty) | \phi(+\infty) \rangle = \sum_{f, f'} \underbrace{\langle f' | f \rangle}_{\delta_{ff'}} S_{f'i}^* S_{fi} = \sum_f |S_{fi}|^2 = 1$$

unitarietà della
matrice S (U)
conservazione della
probabilità

Possiamo quindi espandere S come

$$S = S^{(0)} + S^{(1)} + \dots + S^{(n)} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} dt_n T(H_I(t_1) \dots H_I(t_n)) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int d^4x_1 \dots \int d^4x_n T(\mathcal{H}_I(x_1) \dots \mathcal{H}_I(x_n)) = T\left(\exp\left(-i \int d^4x \mathcal{H}_I(x)\right)\right)$$

A seconda dell'intensità dell'interazione $H_I(t)$ a primi ordini di questa espansione perturbativa possono essere una buona approssimazione del risultato esatto. Per le intera. elettrom. H_I è proporzionale a $\alpha \approx \frac{1}{137}$, accordo al % fin' al 1° ordine perturbativo, per le interazioni forti $\alpha \approx 1$, in generale lo sviluppo perturbativo non è applicabile.

Gli stati iniziali e finali $|i\rangle$ e $|f\rangle$ vanno trattati con attenzione. = 74

In generale non possono essere considerati come autostati dell'hamiltoniana non-interagente H_0 (i.e. $H_I=0$). In teoria dei campi una particella può autointeragire creando dal vuoto coppie di particelle e antiparticelle $\Rightarrow H_I \neq 0$. Gli autostati di H_0 , o stati bare, sono un'idealizzazione non fisica (e.g. un elettrone isolato è sempre circondato da una "nuvola" di fotoni con cui interagisce). La soluzione è considerare la cosiddetta "ipotesi adiabatica" in cui l'interazione H_I viene mandata a 0 lentamente $H_I(t) \rightarrow f(t) H_I(t)$ con $f(t) = 1$ per $-T < t < T$ e $f(t) = 0$ per $t \rightarrow \pm\infty$. L'interazione mediata da $H_I(t)$ avviene per $-T < t < T$, con $T \ll T$.

Per cui:

- o) $-\infty < t < -T$ transizione da stati bare ($H_I=0$) a stati "fisici" (le perturbazioni adiabatiche non cambiano l'energia dello stato)

- o) $-T < t < T$ interazione fra stati fisici con $H_I(t)$ effettiva per $-T < t < T$

- o) $T < t < +\infty$ transizione stati fisici a stati bare.

Alla fine si può considerare il limite formale $T \rightarrow \infty$

N.B. L'autointerazione (che differenzia stati bare e fisici) non può avvenire all'ordine più basso in teoria delle perturbazioni. In generale la matrice S all'ordine zero riproduce la teoria libera in cui $\langle f | 1 | i \rangle = \delta_{if}$

Il teorema di Wick

Dobbiamo quindi calcolare esplicitamente gli elementi di matrice della matrice S , ovvero $S_{fi} = \langle f | S | i \rangle$ per la transizione $|i\rangle \rightarrow |f\rangle$ in teoria delle perturbazioni.

La densità $\mathcal{H}_I(x)$ contiene prodotti di campi, ciascuno dei quali dipende linearmente dagli operatori di creazione e distruzione. S_{fi} è non nullo se il prodotto di tali operatori annichila le particelle presenti in $|i\rangle$ e crea quelle presenti in $|f\rangle$.

Il teorema di Wick permette di riscrivere un T -prodotto misto del tipo $T(\mathcal{H}_I(x_1) \dots \mathcal{H}_I(x_n))$ (ovvero un T -prodotto di N -prodotti) in termini di un unico N -prodotto.

Partiamo dal caso esplicito di un prodotto di campi bosonici $\phi(x)$ e $\phi(y)$. 75

Caso $x^0 > y^0$:

$$\begin{aligned} T(\phi(x)\phi(y)) &= \phi(x)\phi(y) = (\phi_+(x) + \phi_-(x))(\phi_+(y) + \phi_-(y)) = \\ &= \phi_+(x)\phi_+(y) + \phi_+(x)\phi_-(y) + \phi_-(x)\phi_+(y) + \phi_-(x)\phi_-(y) = \\ &= \quad \quad \quad + \phi_-(y)\phi_+(x) + \quad \quad \quad + \quad \quad \quad + [\phi_+(x), \phi_-(y)] \\ &= N(\phi(x)\phi(y)) + [\phi_+(x), \phi_-(y)] \end{aligned}$$

Caso $x^0 < y^0$: $T(\phi(x)\phi(y)) = \phi(y)\phi(x) = \dots = N(\phi(x)\phi(y)) + [\phi_+(y), \phi_-(x)]$

introducendo la "contrazione" fra campi

$$\underbrace{\phi(x)\phi(y)} \equiv \begin{cases} [\phi_+(x), \phi_-(y)] & \text{se } x^0 > y^0 \\ [\phi_+(y), \phi_-(x)] & \text{se } y^0 > x^0 \end{cases} \quad \text{ovvero } \underbrace{\phi(x)\phi(y)} \equiv \langle 0 | T(\phi(x)\phi(y)) | 0 \rangle$$

Lo sono c-numeri

propagatore di Feynman

possiamo scrivere

$$T(\phi(x)\phi(y)) = N(\phi(x)\phi(y)) + \underbrace{\phi(x)\phi(y)}$$

Nel caso di un prodotto di due campi fermionici $\psi(x)$ e $\psi(y)$ analogamente

$$T(\psi(x)\psi(y)) = N(\psi(x)\psi(y)) + \{\psi_+(x), \psi_-(y)\} \quad \text{se } x^0 > y^0$$

$$T(\psi(x)\psi(y)) = N(\psi(x)\psi(y)) + \{\psi_+(y), \psi_-(x)\} \quad \text{se } y^0 > x^0$$

o.e. $T(\psi(x)\psi(y)) = N(\psi(x)\psi(y)) + \underbrace{\psi(x)\psi(y)}$

dove $\underbrace{\psi(x)\psi(y)} \equiv \langle 0 | T(\psi(x)\psi(y)) | 0 \rangle = \begin{cases} \{\psi_+(x), \psi_-(y)\} & \text{se } x^0 > y^0 \\ \{\psi_+(y), \psi_-(x)\} & \text{se } y^0 > x^0 \end{cases}$

generalizzando il teorema di Wick ad un numero orbitario di campi e usando la proprietà distributiva del prodotto normale

$$N(A_1 B_1 C_1 \dots + A_2 B_2 C_2 \dots) = N(A_1 B_1 C_1 \dots) + N(A_2 B_2 C_2 \dots)$$

abbiamo che

$$T(A_1(x_1) A_2(x_2) \dots A_n(x_n)) = N(A_1(x_1) A_2(x_2) \dots A_n(x_n)) +$$

no contractions

1-contraction

$$\left(\int + N(\underbrace{A_1(x_1) A_2(x_2)} A_3(x_3) \dots A_n(x_n)) + N(\underbrace{A_1(x_1) A_2(x_2) A_3(x_3)} \dots A_n(x_n)) + \dots \right)$$

$$+ \dots + N(A_1(x_1) \dots \underbrace{A_{n-1}(x_{n-1}) A_n(x_n)} + \dots +$$

2 contractions

$$\int + N(\underbrace{A_1(x_1) A_2(x_2)} \underbrace{A_3(x_3) A_4(x_4)} \dots A_n(x_n)) + \dots$$

+ ...

\int + ...

3, 4, ... n/2 contractions

Ossero il T-prodotto di n campi (fermioni) è esprimibile come somma di N-prodotti degli n campi nello stesso ordine con tutte le possibili contrazioni fra campi (solo di T-prodotto "misto")

$$T(N(A_1(x_1) B_1(x_1) \dots) \dots N(A_n(x_n) B_n(x_n) \dots)) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} T((A_1(\xi_1) B_1(\xi_1) \dots) \dots (A_n(\xi_n) B_n(\xi_n) \dots))$$

dove $\xi_i = (x_i^0 \pm \epsilon, \vec{x}_i)$ \forall con $+\epsilon$ ($-\epsilon$) negli operatori di creazione (distruzione),

in questo modo $x_i \rightarrow \xi_i$, T-prodotto include anche l'N-prodotto.

In questo modo si può applicare il Teorema di Wick senza considerare le contrazioni fra campi di uno stesso gruppo $(A_i(\xi_i) B_i(\xi_i) \dots)$ (operatori a tempi uguali)

perché essi hanno già l'ordinamento normale $([A(x), B(x)] \stackrel{\text{bosoni}}{=} 0 \text{ o } \{A(x), B(x)\} \stackrel{\text{fermioni}}{=} 0)$

per cui $\underbrace{A(x) B(x)} = 0$

"Wick theorem no equal-time contractions"

$$\Rightarrow T(N(A_1(x_1) B_1(x_1) \dots) \dots N(A_n(x_n) B_n(x_n) \dots)) = T((A_1(x_1) B_1(x_1) \dots) \dots (A_n(x_n) B_n(x_n) \dots)) \Big|_{\text{NO ETC.}}$$

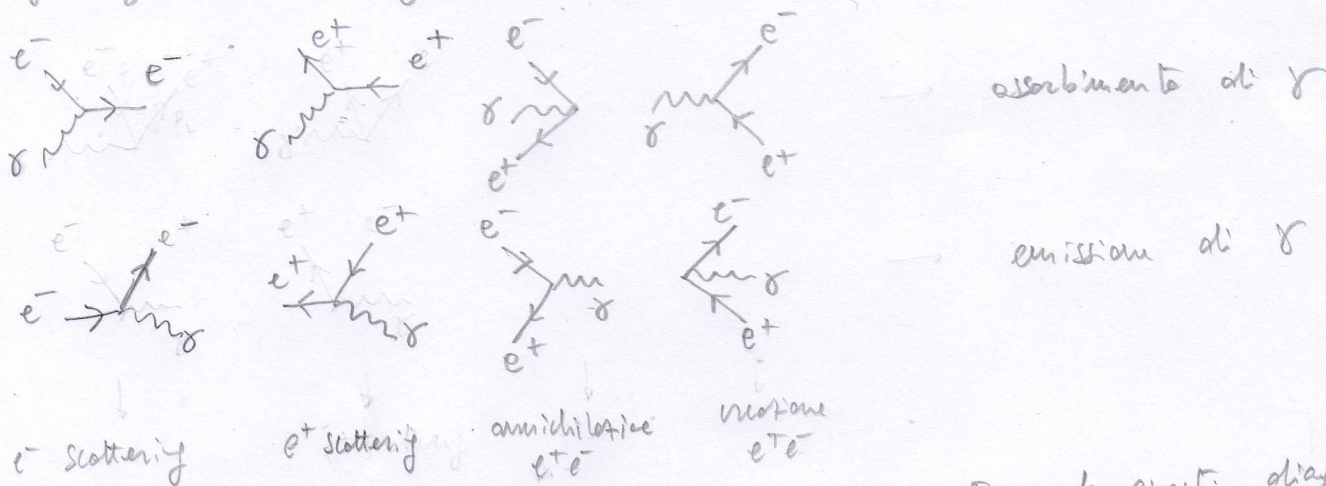
Abbiamo visto che l'espansione perturbativa della matrice S è data da

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} S^{(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int \dots \int d^4x_1 \dots d^4x_n T(\mathcal{H}_I(x_1) \dots \mathcal{H}_I(x_n))$$

dove nel caso della QED abbiamo che

$$\mathcal{H}_I(x) = -e N(\bar{\Psi}(x) A(x) \Psi(x)) = -e N((\bar{\Psi}_+(x) + \bar{\Psi}_-(x))(A_+(x) + A_-(x))(\Psi_+(x) + \Psi_-(x)))$$

abbiamo quindi 8 possibili combinazioni degli operatori di creazione/distruzione di e^+, e^-, γ ($\bar{\Psi}_{\pm}, \Psi_{\pm}, A_{\pm}$) che possono essere rappresentate graficamente attraverso 8 diagrammi di Feynman



Tutti i vertici della QED possono essere costruiti a partire da questi diagrammi. Tuttavia questi vertici NON rappresentano processi fisici perché essi non soddisfano la conservazione del 4-impulso. E.g. $\gamma(k) \rightarrow e^-(p_1) + e^+(p_2)$ con $k^2=0, p_1^2=p_2^2=m^2$ ma $k = p_1 + p_2$, nel sistema del c.m. della coppia e^+e^- , $p_1 + p_2 = (2E, \vec{0}) = k$

ma $k^2=0 \Rightarrow E=0 \Rightarrow k=0$.

Per un'analisi al I ordine in "e" abbiamo $S^{(1)} = -ie \int d^4x T(N(\bar{\Psi}(x) A(x) \Psi(x)))$

ne $\langle f | S^{(1)} | i \rangle = 0 = 0$ (in generale per ogni processo non fisico $\langle f | S^{(1)} | i \rangle = 0$)

Al II ordine in "e" abbiamo $S^{(2)} = \frac{-e^2}{2} \int d^4x_1 \int d^4x_2 T(N(\bar{\Psi}(x_1) A(x_1) \Psi(x_1)) N(\bar{\Psi}(x_2) A(x_2) \Psi(x_2)))$

e utilizzando il teorema di Wick possiamo scrivere

Utilizzando il teorema di Wick possiamo scrivere

$$S^{(2)} = \sum_{i=A}^F S_i^{(2)} \quad \text{dove} \quad ((\bar{\Psi} A \Psi)_x = \bar{\Psi}(x) A(x) \Psi(x))$$

$$S_A^{(2)} = -\frac{e^2}{2} \int d^4x_1 d^4x_2 N((\bar{\Psi} A \Psi)_{x_1} (\bar{\Psi} A \Psi)_{x_2}) \quad \rightarrow \text{No contraction}$$

$$S_B^{(2)} = -\frac{e^2}{2} \int d^4x_1 d^4x_2 \left(N(\underbrace{(\bar{\Psi} A \Psi)_{x_1}}_1 \underbrace{(\bar{\Psi} A \Psi)_{x_2}}_2) + N(\underbrace{(\bar{\Psi} A \Psi)_{x_1}}_1 \underbrace{(\bar{\Psi} A \Psi)_{x_2}}_2) \right) \quad \rightarrow \text{one contraction}$$

$$S_C^{(2)} = -\frac{e^2}{2} \int d^4x_1 d^4x_2 N(\underbrace{(\bar{\Psi} \gamma^\alpha A_\alpha \Psi)_{x_1}}_1 \underbrace{(\bar{\Psi} \gamma^\beta A_\beta \Psi)_{x_2}}_2)$$

$$S_D^{(2)} = -\frac{e^2}{2} \int d^4x_1 d^4x_2 \left(N(\underbrace{(\bar{\Psi} \gamma^\alpha A_\alpha \Psi)_{x_1}}_1 \underbrace{(\bar{\Psi} \gamma^\beta A_\beta \Psi)_{x_2}}_2) + N(\underbrace{(\bar{\Psi} \gamma^\alpha A_\alpha \Psi)_{x_1}}_1 \underbrace{(\bar{\Psi} \gamma^\beta A_\beta \Psi)_{x_2}}_2) \right) \quad \rightarrow \text{two contractions}$$

$$S_E^{(2)} = -\frac{e^2}{2} \int d^4x_1 d^4x_2 N(\underbrace{(\bar{\Psi} A \Psi)_{x_1}}_1 \underbrace{(\bar{\Psi} A \Psi)_{x_2}}_2) \quad \rightarrow \text{two contractions}$$

$$S_F^{(2)} = -\frac{e^2}{2} \int d^4x_1 d^4x_2 N(\underbrace{(\bar{\Psi} \gamma^\alpha A_\alpha \Psi)_{x_1}}_1 \underbrace{(\bar{\Psi} \gamma^\beta A_\beta \Psi)_{x_2}}_2) \quad \rightarrow \text{three contractions}$$

dove ricordiamo che $\underbrace{A(x_1) B(x_2)}_1 \equiv \langle 0 | T(A(x_1) B(x_2)) | 0 \rangle$

Abbiamo che $\langle 0 | S_A^{(2)} | 0 \rangle = 0$ (due diagrammi: indipendenti del tipo $S^{(1)}$ e 2 anticommutazioni)

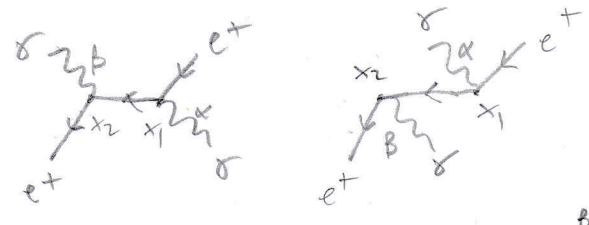
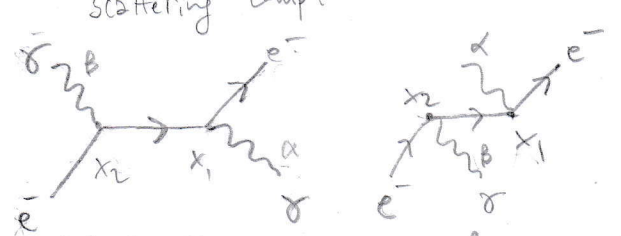
Per $S_B^{(2)}$ abbiamo che $N(\underbrace{(\bar{\Psi} A \Psi)_{x_1}}_1 \underbrace{(\bar{\Psi} A \Psi)_{x_2}}_2) = N(\underbrace{(\bar{\Psi} A \Psi)_{x_2}}_2 \underbrace{(\bar{\Psi} A \Psi)_{x_1}}_1)$

$$\Rightarrow S_B^{(2)} = -e \int d^4x_1 d^4x_2 N(\underbrace{(\bar{\Psi} A \Psi)_{x_1}}_1 \underbrace{(\bar{\Psi} A \Psi)_{x_2}}_2) \quad \rightarrow \text{propagatore fermionico}$$

I processi fisici a cui $S_B^{(2)}$ contribuisce sono:

$\gamma + e^- \rightarrow \gamma + e^-$
scattering Compton (e^-)

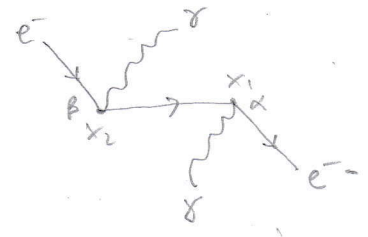
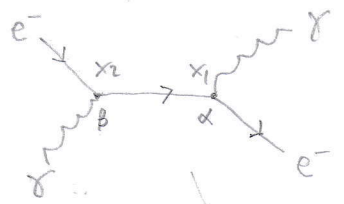
$\gamma + e^+ \rightarrow \gamma + e^+$
scattering Compton (e^+)



$$-e^2 \int d^4x_1 d^4x_2 \bar{\Psi}(x_1) \gamma^\alpha i S_F(x_1 - x_2) \gamma^\beta A_\alpha(x_1) A_\beta(x_2) \Psi(x_2); \quad -e^2 \int d^4x_1 d^4x_2 \bar{\Psi}(x_1) \gamma^\alpha i S_F(x_1 - x_2) \gamma^\beta \Psi(x_2) A_\alpha(x_2)$$

I processi fisici a cui $S_B^{(2)}$ contribuisce sono:

1) $\gamma + e^- \rightarrow \gamma + e^-$ scattering Compton (e^-)



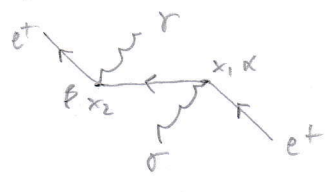
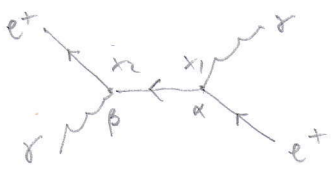
$$S_1^{(2)} = -e^2 \int d^4x_1 d^4x_2 \bar{\psi}(x_1) \gamma^\alpha i S_F(x_1 - x_2) \gamma^\beta \psi(x_2) A_{-\alpha}(x_1) A_{+\beta}(x_2)$$

$$S_2^{(2)} = -e^2 \int d^4x_1 d^4x_2 \bar{\psi}(x_1) \gamma^\alpha i S_F(x_1 - x_2) \gamma^\beta \psi(x_2) A_{-\beta}(x_2) A_{-\alpha}(x_1)$$

crea e^- in x_1
 propaga e^- da x_2 a x_1
 annichila e^- in x_2
 crea/annichila γ in x_1 / x_2

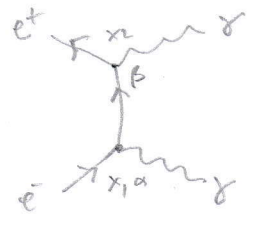
$$S_{\gamma e^- \rightarrow \gamma e^-}^{(2)} = S_1^{(2)} + S_2^{(2)}$$

2) $\gamma + e^+ \rightarrow \gamma + e^+$ scattering Compton (e^+)

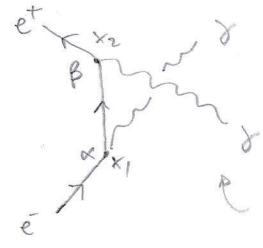


$S^{(2)}$ per esercizio

3) $e^+ + e^- \rightarrow \gamma + \gamma$



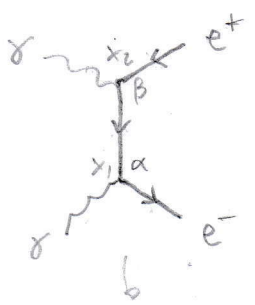
diphoton production in e^+e^- annihilation



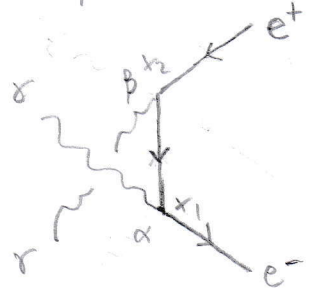
$S^{(2)}$ per esercizio

particelle identiche

4) $\gamma + \gamma \rightarrow e^+ + e^-$



e^+e^- production in $\gamma\gamma$ annihilation

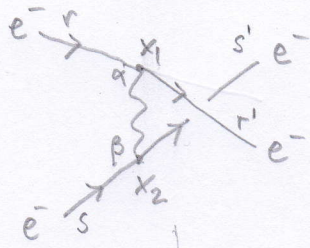
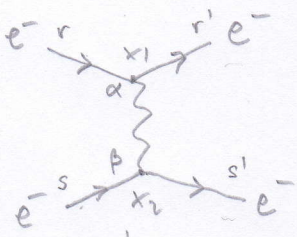


$$S_1^{(2)} = -e^2 \int d^4x_1 d^4x_2 \bar{\psi}(x_1) \gamma^\alpha i S_F(x_1 - x_2) \gamma^\beta \psi(x_2) A_{+\alpha}(x_1) A_{+\beta}(x_2)$$

$$S_2^{(2)} = S_1^{(2)}$$

Nel caso di $S_c^{(2)}$ abbiamo un propagatore del fotone e contribuisce ai processi: 80

o) $e^+ + e^- \rightarrow e^+ + e^-$ scattering Moeller (e^-)



2 particelle identiche nello stato iniziale e 2 nello stato finale

$$S_2^{(2)} = -e^2 \int d^4x_1 d^4x_2 N \left((\bar{\Psi}_{r'}(x_1) \gamma^\alpha \Psi_r(x_1)) (\bar{\Psi}_{s'}(x_2) \gamma^\beta \Psi_s(x_2)) \right) i D_{F\alpha\beta}(x_1 - x_2)$$

$$S_2^{(2)} = -e^2 \int d^4x_1 d^4x_2 N \left((\bar{\Psi}_{s'}(x_1) \gamma^\alpha \Psi_r(x_1)) (\bar{\Psi}_{r'}(x_2) \gamma^\beta \Psi_s(x_2)) \right) i D_{F\alpha\beta}(x_1 - x_2)$$

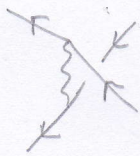
N.B. Scambiare le particelle nello stato iniziale E dello stato finale equivale a NON fare scambi

N.B. le due ampiezze hanno un segno "-" overall di differenza $S_2^{(2)} = -S_1^{(2)} (r' \leftrightarrow s')$

⇒ principio di Pauli: ampiezza antisimmetrica per scambio di fermioni:

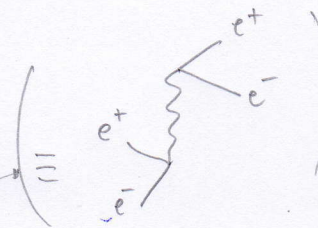
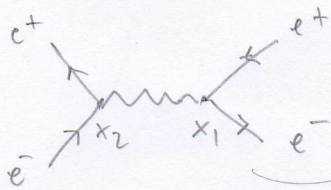
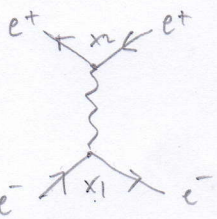
In generale un'ampiezza che contiene S fermioni identici nello stato finale (iniziale) è completamente antisimmetrica per scambio di fermioni:

o) $e^+ + e^+ \rightarrow e^+ + e^+$ scattering Moeller (e^+)



Scattering Bhabha

o) $e^+ + e^- \rightarrow e^+ + e^-$



$$S_1^{(2)} = -e^2 \int d^4x_1 d^4x_2 N \left(\bar{\Psi}_-(x_1) \gamma^\alpha \Psi_+(x_1) \bar{\Psi}_+(x_2) \gamma^\beta \Psi_-(x_2) \right) i D_{F\alpha\beta}(x_1 - x_2)$$

$$S_2^{(2)} = -e^2 \int d^4x_1 d^4x_2 N \left(\bar{\Psi}_-(x_1) \gamma^\alpha \Psi_-(x_1) \bar{\Psi}_+(x_2) \gamma^\beta \Psi_+(x_2) \right) i D_{F\alpha\beta}(x_1 - x_2)$$

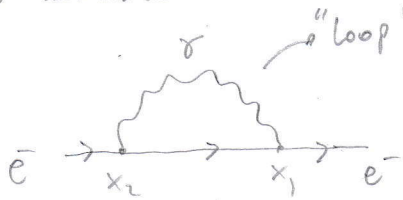
N.B. $\psi(x)$ annich. e^- / crea e^+ ⇒ antisimmetrica scambio e^- iniziale ↔ e^+ finale
 $\bar{\psi}$ " e^+ / " e^- ⇒ " " " e^+ finale ↔ e^- iniziale

$S_D^{(2)}$ contiene un propagatore fermionico e uno del fotone 81

$$N\left(\underbrace{(\bar{\Psi} \gamma^\alpha A_\alpha \Psi)_{x_1}}_{\text{fermion}} (\bar{\Psi} \gamma^\beta A_\beta \Psi)_{x_2}\right) = N\left((\bar{\Psi} \gamma^\beta A_\beta \Psi)_{x_2} (\bar{\Psi} \gamma^\alpha A_\alpha \Psi)_{x_1}\right)$$

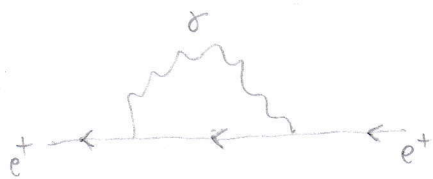
$$\Rightarrow S_D^{(2)} = -e^2 \int d^4x_1, d^4x_2 N\left((\bar{\Psi} \gamma^\alpha A_\alpha \Psi)_{x_1} (\bar{\Psi} \gamma^\beta A_\beta \Psi)_{x_2}\right)$$

e contribuisce all'autointerazione di un elettrone (positrone) con se stesso



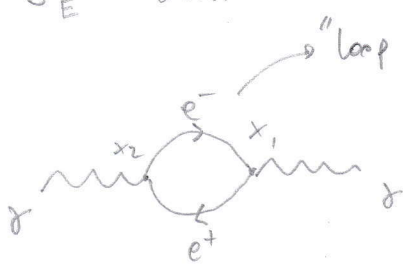
$$S^{(2)} = -e^2 \int d^4x_1, d^4x_2 \bar{\Psi}_-(x_1) \gamma^\alpha i S_F(x_1-x_2) \gamma^\beta \Psi_+(x_2) i D_{F\alpha\beta}(x_1-x_2)$$

self energia dell' e⁻



self energia del e⁺

$S_E^{(2)}$ contiene due propagatori fermionici e contribuisce all'auto interazione del γ



$$S^{(2)} = -e^2 \int d^4x_1, d^4x_2 N\left(\underbrace{(\bar{\Psi} A_- \Psi)_{x_1}}_{\text{fermion}} (\bar{\Psi} A_+ \Psi)_{x_2}\right)$$

self-energia del fotone

dove $N\left(\underbrace{(\bar{\Psi}_r A_{-rr'} \Psi_{r'})_{x_1}}_{\text{fermion}} (\bar{\Psi}_s A_{+ss'} \Psi_{s'})_{x_2}\right) = (-1) \underbrace{\Psi_{s'}(x_2) \bar{\Psi}_r(x_1) A_{-rr'}(x_1) \Psi_{r'}(x_1)}_{\text{fermion}} \underbrace{\bar{\Psi}_s(x_2) A_{+ss'}(x_2)}_{\text{photon}}$

$$= (-1) \text{Tr} \left[i S_F(x_2-x_1) A_-(x_1) i S_F(x_1-x_2) A_+(x_2) \right] \sum_{s'} M_{s's'} = \text{Tr}(M)$$

$S_E^{(2)}$ contiene 3 propagatori (senza linee esterne)

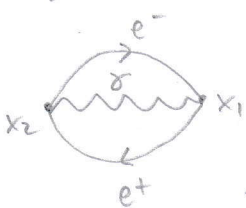


diagramma di vuoto

Non contribuisce a nessuna transizione fisica

dispari di commutazioni fra operatori fermionici (tipica dei closed-loop fermionici)

Allo stesso modo si possono scrivere i termini di ordine superiore $S^{(3)}, S^{(4)}, \dots$ senza che compaiano nuove caratteristiche dei diagrammi.

Le particelle di stato iniziale e finale ($|i\rangle$ e $|f\rangle$) sono tipicamente note in termini di impulsi (e polarizzazioni) noti. È quindi necessario considerando lo sviluppo della matrice S (e i diagrammi di Feynman ad essa associati) nello spazio degli impulsi.

$$\underbrace{\psi(x_1) \bar{\psi}(x_2)} = i S_F(x_1 - x_2) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 p \ i S_F(p) e^{-ip(x_1 - x_2)} = \langle 0 | T(\psi(x_1) \bar{\psi}(x_2)) | 0 \rangle$$

$$\underbrace{A^\alpha(x_1) A^\beta(x_2)} = i D_F^{\alpha\beta}(x_1 - x_2) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 k \ i D_F^{\alpha\beta}(k) e^{-ik(x_1 - x_2)} = \langle 0 | T(A^\alpha(x_1) A^\beta(x_2)) | 0 \rangle$$

dove

$$S_F(p) = \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \equiv \frac{1}{\not{p} - m + i\epsilon}$$

propagatori

$$D_F^{\alpha\beta}(k) = \frac{-g^{\alpha\beta}}{k^2 + i\epsilon}$$

L'effetto degli operatori non-contratti sulla stato $|i\rangle$ produce lo stato $|0\rangle$

$$\psi_+(x) |e^{-\vec{p}r}\rangle = \left(\frac{m}{VE_p}\right)^{1/2} u_r(\vec{p}) e^{-ipx} c_r(\vec{p}) |e^{-\vec{p}r}\rangle = |0\rangle \left(\frac{m}{VE_p}\right)^{1/2} u_r(\vec{p}) e^{-ipx}$$

$$\bar{\psi}_+(x) |e^{+\vec{p}r}\rangle = \left(\frac{m}{VE_p}\right)^{1/2} \bar{v}_r(\vec{p}) e^{-ipx} d_r(\vec{p}) |e^{+\vec{p}r}\rangle = |0\rangle \left(\frac{m}{VE_p}\right)^{1/2} \bar{v}_r(\vec{p}) e^{-ipx}$$

$$A_{+x}^\alpha(x) |\delta \vec{k}r\rangle = \left(\frac{1}{2V\omega_k}\right)^{1/2} \epsilon_r^\alpha(\vec{k}) e^{-ikx} a_r(\vec{k}) |\delta \vec{k}r\rangle = |0\rangle \left(\frac{1}{2V\omega_k}\right)^{1/2} \epsilon_r^\alpha(\vec{k}) e^{-ikx}$$

L'effetto degli operatori non-contratti sulla stato $|f\rangle$ produce lo stato $|0\rangle$

$$\bar{\psi}_-(x) |0\rangle = \sum_{r\vec{p}} |e^{-\vec{p}r}\rangle \left(\frac{m}{VE_p}\right)^{1/2} \bar{u}_r(\vec{p}) e^{ipx}$$

$$\psi_-(x) |0\rangle = \sum_{r\vec{p}} |e^{+\vec{p}r}\rangle \left(\frac{m}{VE_p}\right)^{1/2} v_r(\vec{p}) e^{ipx}$$

$$A_-^\alpha(x) |0\rangle = \sum_{r\vec{k}} |\delta \vec{k}r\rangle \left(\frac{1}{2V\omega_k}\right)^{1/2} \epsilon_r^\alpha(\vec{k}) e^{ikx}$$

Gli elementi di matrice $S \langle f|S|i \rangle$ hanno una struttura definita che può essere messa in relazione con la visualizzazione grafica dei diagrammi di Feynman tramite le "regole di Feynman".

È quindi possibile scrivere direttamente gli elementi $\langle f|S|i \rangle$ utilizzando l'ausilio dei diagrammi e delle seguenti regole di Feynman

Sia $|i\rangle \rightarrow |f\rangle$ una transizione dove sono definite gli impulsi e le polarizzazioni (Spin) delle particelle nello stato iniziale e finale
fattori normalizzazione campi esterne

$$\langle f|S|i \rangle = \delta_{fi} + (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\sum_f P_f - \sum_i P_i) \prod_{\text{ext.}} \left(\frac{m}{VE}\right)^{1/2} \prod_{\text{ext.}} \left(\frac{1}{2VW}\right)^{1/2} \mathcal{M}$$

dove P_f e P_i sono la somma dei 4-impulsi finale e iniziale che soddisfano la conservazione del 4-impulso che si ottiene in ogni vertice

$$\int d^4x \exp(i x (\sum_i P_i - \sum_f P_f)) = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\sum_i P_i - \sum_f P_f)$$

con $P_i = \sum_i p_i$ e $P_f = \sum_f p_f$ dove $p^2 = m^2$ per e^+ e e^- , $p^2 = 0$ per γ


e \mathcal{M} è detta ampiezza di Feynman ed è data dall'espansione

$$\mathcal{M} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}^{(n)}$$


e $\mathcal{M}^{(n)}$ è legato all'ordine n -esimo della matrice $S^{(n)}$ e si ottiene "disegnando" tutti i possibili diagrammi di Feynman (topologicamente differenti) connessi nello spazio degli impulsi e che quindi contengono n vertici (e^+) e le corrette linee di campi esterni.

Il contributo a $M^{(n)}$ da ogni grafico è ottenuto dalle seguenti regole di Feynman: 84







1. Per ogni vertice è associato un fattore $i e \gamma^\alpha$
2. Per ogni linea interna fotonica con impulso k associare un fattore:

$$i D_{F\alpha\beta} = i \frac{-g_{\alpha\beta}}{k^2 + i\epsilon}$$


3. Per ogni linea interna fermionica con impulso p associare un fattore:

$$i S_F(p) = \frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon}$$


4. Per ogni linea esterna associare i seguenti fattori:

- | | | | |
|----|------------------------------|-------------------------------|---|
| a) | per ogni elettrone iniziale: | $u_r(\vec{p})$ |  |
| b) | " " " finale: | $\bar{u}_r(\vec{p})$ |  |
| c) | " " positrone iniziale: | $\bar{v}_r(\vec{p})$ |  |
| d) | " " " finale: | $v_r(\vec{p})$ |  |
| e) | " " fotone iniziale: | $\epsilon_{r\alpha}(\vec{k})$ |  |
| f) | " " " finale: | $\epsilon_{r\alpha}(\vec{k})$ |  |

5. I fattori spinoriali (matrici γ , propagatori S_F , 4-spinori) per ogni linea fermionica sono ordinati in modo che partendo da dx a sx appaiono nello stesso ordine che appare seguendo la direzione della freccia.

6. Per ogni loop chiuso fermionico associare la traccia moltiplicata da un fattore (-1)

7. Per ogni 4-impulso di un loop chiuso con impulso q associare l'integrazione $\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4q$
(non c'è vincolo dalla conservazione del 4-impulso totale).

8. Associare un fattore $\delta_p = \pm 1$ per scrivere l'espressione N-ordinata (+1(-1) # scambi per (dispari))

9. Associare un fattore $((2\pi)^4)^{m-f_i-b_i-1}$ con $m-f_i-b_i-1 = -l$
dove $m = \#$ vertici, $f_i = \#$ linee fermioniche interne, $b_i = \#$ linee bosoniche interne
 $l = \#$ loop chiusi, che equivale ad associare ad ogni loop chiuso il fattore $\frac{1}{(2\pi)^4}$

Leptoni

In Natura esistono particelle che hanno le stesse caratteristiche dell'elettrone ma massa differente e sono dette "leptoni". Sono i muoni (μ) e i tauoni (τ)

$$e^\pm, \mu^\pm, \tau^\pm \quad \text{con } m_e = 0.511 \text{ MeV}, m_\mu = 106 \text{ MeV}, m_\tau = 1777 \text{ MeV}$$

L'interazione fra μ e τ con il campo elettromagnetico è la stessa dell'elettrone per cui abbiamo

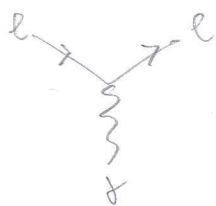
$$L_0 = \sum_l \bar{\psi}_l(x) (i \gamma^\alpha \partial_\alpha - m_l) \psi_l(x) \quad \text{con } l = e, \mu, \tau$$

$$e \quad H_I(x) = -L_I(x) = -e \sum_l N(\bar{\psi}_l(x) \gamma^\alpha A_\alpha(x) \psi_l(x))$$

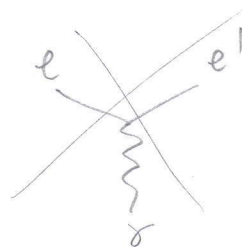
dove $\psi_l(x)$ è lo spinore di Dirac per il leptone l

Osservazione importante: l'interazione NON mescola leptoni di tipo diverso "sapore" (flavour) differente. Pertanto abbiamo i seguenti

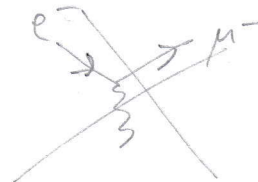
diagrammi di Feynman



$l = e^\pm, \mu^\pm, \tau^\pm$ ma NON



correnti neutre (Non cambiano il sapore)

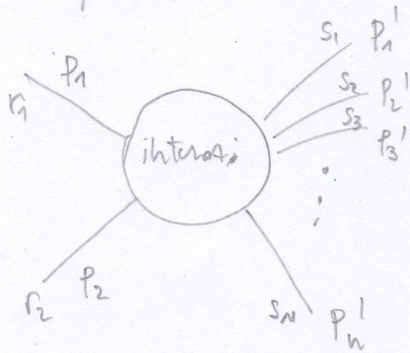


~~$e^- + \mu^+ \rightarrow e^+ + \mu^-$~~

L'espansione della matrice S è pertanto

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ie)^n}{n!} \int \dots \int d^4x_1 \dots d^4x_n \sum_{l_1} \dots \sum_{l_n} T(N(\bar{\psi}_{l_1} A \psi_{l_1})_{x_1} \dots N(\bar{\psi}_{l_n} A \psi_{l_n})_{x_n})$$

Consideriamo il processo di diffusione (scattering) in cui 2 particelle nello stato iniziale collidano (interagiscono) e producono N particelle nello stato finale



$P_i = (E_i, \vec{P}_i)$, s_i , con $i=1,2$
 4-impulsi e polarizzazioni iniziali

$P'_f = (E_f, \vec{P}_f)$, s_f , con $f=1..N$
 4-impulsi e polarizzazioni finali

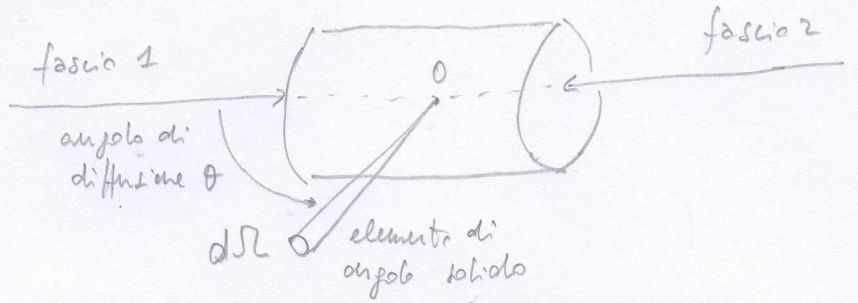
L'elemento di matrice S è dato da

$$S_{fi} = \delta_{fi} + (2\pi)^4 \delta^{(4)}\left(\sum_{f=1}^N P'_f - \sum_{i=1}^2 P_i\right) \prod_{i=1}^2 \left(\frac{1}{2VE_i}\right)^{1/2} \prod_{f=1}^N \left(\frac{1}{2VE'_f}\right)^{1/2} \prod_e (2Me)^{1/2} M$$

\hookrightarrow leptoni nello stato iniziale e finale

Definiamo sezione d'urto di differenziale di un processo di diffusione la quantità

$$d\sigma = \frac{N_d(d\Omega)/T}{N_i/T \cdot N_b/A}$$



dove $N_d(d\Omega)/T$ è il numero di particelle diffuse in un elemento di angolo solido per unità di tempo, N_i/T è il numero di particelle incidenti per unità di tempo, N_b/A è il numero di centri diffusori per unità di superficie. σ ha quindi le dimensioni di un'area. Dato un flusso di particelle $N_i/T/A = \phi_i$ il numero di particelle diffuse per unità di tempo e di angolo solido è

$$\frac{N_d}{T} = L \cdot d\sigma = \phi_i \cdot N_b \cdot d\sigma = \frac{N_i}{TA} \cdot N_b \cdot \frac{N_d/T}{N_i/T \cdot N_b/A} \quad \text{e } L = \phi_i \cdot N_b \text{ è detta luminosità}$$

La sezione d'urto è quindi una quantità fisica misurabile sperimentalmente tramite il "conteggio" delle particelle. La probabilità infinitesima di una transizione quantistica fra uno stato iniziale $|i\rangle$ e uno stato finale $|f\rangle$ è data da

$$dR_{fi} = |\langle f | S - 1 | i \rangle|^2 \prod_f \frac{V d\vec{P}'_f}{(2\pi)^3}$$

dove $\frac{V d^3 \vec{p}_f'}{(2\pi)^3}$ è l'elemento di spazio delle fasi delle particelle f nello stato finale con impulsi nell'intervallo

$$(\vec{p}_f', \vec{p}_f' + d\vec{p}_f')$$

Per calcolare dW_{fi} dobbiamo calcolare $|\langle f | S-1 | i \rangle|^2$

$$\text{dove } (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\sum p_f' - \sum p_i) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_P d^4 x \exp(ix(\sum p_f' - \sum p_i))$$

dove P è il volume dello spazio tempo

Ma $\int_{-T/2}^{T/2} dt e^{i\omega t} = \frac{1}{\omega} \sin \omega t \Big|_{-T/2}^{T/2} = \frac{2}{\omega} \sin \frac{\omega T}{2}$ e $\lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} dt e^{i\omega t} = 2\pi \delta(\omega)$

infatti $\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{2}{\omega} \sin \frac{\omega T}{2} f(\omega) = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{\sin x}{x} f\left(\frac{2x}{T}\right) \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 2f(0) \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{\sin x}{x} = 2\pi f(0)$

perciò $\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{4}{\omega^2} \sin^2 \frac{\omega T}{2} f(\omega) = 2T \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{\sin^2 x}{x^2} f\left(\frac{2x}{T}\right) \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 2T f(0) \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{\sin^2 x}{x^2} = T \cdot 2\pi f(0)$

$$\Rightarrow \left| \int_{-T/2}^{T/2} dt e^{i\omega t} \right|^2 \xrightarrow{T \rightarrow \infty} T \cdot 2\pi \delta(\omega)$$

$$\left| \int_P d^4 x \exp(ix(\sum p_f' - \sum p_i)) \right|^2 \xrightarrow{P \rightarrow \infty} V \cdot T (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\sum p_f' - \sum p_i)$$

considerando il caso di 1 centro diffusore $N_b = 1$

$$d\sigma = dP \cdot S = \frac{V}{T \cdot v_{rel}} dP$$

probabilità di interazione unità di superficie velocità relativa particelle incidenti

$$\Rightarrow d\sigma = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\sum p_f' - \sum p_i) \frac{1}{4 E_1 E_2 v_{rel}} \left(\frac{\pi^2 2m_e}{e} \right)^2 \frac{\pi}{f} \frac{d^3 \vec{p}_f'}{(2\pi)^3 2E_f'} |M|^2$$

dove $v_{rel} = \frac{\vec{p}_2}{E_2} - \frac{\vec{p}_1}{E_1}$ è la velocità relativa lungo l'asse (x) di collisione

$$\Rightarrow E_1 E_2 v_{rel} = E_1 p_2^x - E_2 p_1^x \quad \text{invariante sotto boost lungo } x \text{ (dimostrare)}$$

Nel sistema del laboratorio $\vec{P}_2 = 0 \Rightarrow v_{rel} = \frac{|\vec{P}_1|}{E_1}$ (lab) 88

Nel sistema del centro di massa $\vec{P}_1 = -\vec{P}_2 \Rightarrow v_{rel} = |\vec{P}_1| \frac{E_1 + E_2}{E_1 E_2}$ (CM)

Inoltre $E_1, E_2 v_{rel} = ((\vec{P}_1 \cdot \vec{P}_2)^2 - m_1^2 m_2^2)^{1/2}$

e $\frac{d^3 \vec{p}}{2E} = d^4 p \delta(p^2 - m^2) \theta(p^0) \equiv d^4 p \delta_+(p^2 - m^2)$

\Rightarrow la sezione d'urto σ è invariante relativistica

Consideriamo uno scattering $2 \rightarrow 2$ per particelle

$$d\sigma = \frac{\pi_e (2me) |M|^2}{64\pi^2 v_{rel} E_1 E_2 E_1' E_2'} \delta^{(4)}(\vec{P}_1' + \vec{P}_2' - \vec{P}_1 - \vec{P}_2) d^3 \vec{P}_1' d^3 \vec{P}_2'$$

possiamo integrare sull'impulso finale \vec{P}_2' sfruttando lo $\delta^{(4)}$ di conservazione del 4-impulso nel sistema di centro di massa $\vec{P}_1 = -\vec{P}_2, \vec{P}_1' = -\vec{P}_2'$

$$d\sigma = \frac{\pi_e (2me) |M|^2}{64\pi^2 |\vec{P}_1| (E_1 + E_2) E_1' E_2'} \delta(E_1' + E_2' - E_1 - E_2) |\vec{P}_1'|^2 d|\vec{P}_1'| d\Omega_1' \quad \text{e integrando su } |\vec{P}_1'|$$

$E_1'^2 = |\vec{P}_1'|^2 + m_1'^2; E_2'^2 = |\vec{P}_1'|^2 + m_2'^2$
 poiché $|\vec{P}_2'| = |\vec{P}_1'|$
 $\Rightarrow \frac{\partial(E_1' + E_2' - E_1 - E_2)}{\partial |\vec{P}_1'|} = \frac{|\vec{P}_1'|}{E_1'} + \frac{|\vec{P}_1'|}{E_2'} = \frac{|\vec{P}_1'| (E_1 + E_2)}{E_1' E_2'}$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega_1'}\right)_{CM} = \frac{1}{64\pi^2 (E_1 + E_2)^2} \frac{|\vec{P}_1'|}{|\vec{P}_1|} \frac{\pi_e (2me) |M|^2}{|\vec{P}_1|}$$

$|\vec{P}_1| = \sqrt{E_1^2 - m_1^2}, |\vec{P}_1'| = \sqrt{E_1'^2 - m_1'^2} = \sqrt{(E_1 + E_2)^2 + |\vec{P}_1|^2 + m_2^2 - 2(E_1 + E_2)\sqrt{|\vec{P}_1|^2 + m_2^2} - m_1'^2}$

Tasso di decadimento

L'interazione può dare luogo al decadimento di una particella che sarebbe stabile in assenza di interazione. La probabilità di "decadimento" da uno stato iniziale $|i\rangle$ ad uno stato finale $|f\rangle$ è data da

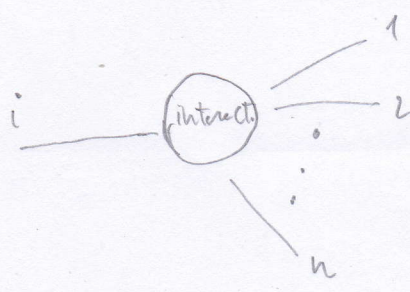
$$\Gamma_f = \frac{|\langle f | S | i \rangle|^2}{T}$$

e la probabilità totale di decadimento è data da

$$\Gamma_{tot} = \sum_f \Gamma_f$$

mentre la quantità $B_f = \frac{\Gamma_f}{\Gamma_{tot}}$ è detto rapporto di decadimento (branching ratio o branching fraction)

per cui $\sum_f B_f = \frac{\sum_f \Gamma_f}{\Gamma_{tot}} = 1$



Dato un numero N di particelle identiche instabili la variazione di N dovuta ai decadimenti è data da

$$\frac{dN(t)}{dt} = -\Gamma \cdot N(t)$$

↳ probabilità di decadimento

$$\Rightarrow N(t) = N(0) e^{-\Gamma t} \quad \text{e pertanto } \tau = \frac{1}{\Gamma} \text{ è la vita media}$$

(lifetime) della particella instabile.

Γ è anche detta larghezza di decadimento

$$[\Gamma] = [t^{-1}] = [E] \quad \text{ha le dimensioni di un'energia}$$

Per il principio di indeterminazione di Heisenberg, per una particella instabile

$$\Delta E \Delta t \sim \hbar \Rightarrow \Delta E \approx \frac{\hbar}{\Delta t} \Rightarrow \Gamma \sim \frac{\hbar}{\tau}$$

Per cui abbiamo

$$S_{fi} = \delta_{fi} + (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\sum p_f - p) \frac{1}{(2VE)^{1/2}} \frac{\pi}{f} \frac{1}{(2VE'_f)^{1/2}} \frac{\pi (2m_e)^{1/2} |M|^2}{e}$$

dove $p = (E, \vec{p})$ è il 4-impulso della particella iniziale

$$d\Gamma = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\sum p_f - p) \frac{1}{2E} \frac{\pi (2m_e)}{e} \frac{\pi}{f} \frac{d^3\vec{p}'_f}{(2\pi)^3 2E'_f} |M|^2$$

dove nel sistema in cui la particella iniziale è a riposo $\vec{p} = (m, \vec{0})$.

Nei calcoli in QED è necessario calcolare espressioni con prodotti di matrici γ .

Ricordiamo che $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \cdot \mathbb{1}$, $\text{Tr}(\gamma^\mu) = 0$, $\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0$

$$\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3, \quad \{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0, \quad (\gamma^5)^2 = \mathbb{1}, \quad \gamma^{5\dagger} = \gamma^5$$

$$\sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu], \quad \sigma^{\mu\nu\dagger} = \gamma^0 \sigma^{\mu\nu} \gamma^0, \quad \text{N.B. } \gamma^M \equiv \gamma_{rs}^M \text{ con } r,s=1,\dots,4$$

Identità algebriche

$$\gamma_\mu \gamma^\mu = \frac{1}{2} \{\gamma_\mu, \gamma^\mu\} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \{\gamma^\nu, \gamma^\mu\} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} 2g^{\mu\nu} = 4 \cdot \mathbb{1}$$

$$\gamma_\mu \gamma^\alpha \gamma^\mu = \gamma_\mu (2g^{\alpha\mu} - \gamma^\mu \gamma^\alpha) = 2\gamma^\alpha - 4\gamma^\alpha = -2\gamma^\alpha$$

$$\gamma_\mu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\mu = \dots = 4g^{\alpha\beta}$$

$$\gamma_\mu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\delta \gamma^\mu = \dots = -2\gamma^\delta \gamma^\beta \gamma^\alpha$$

$$\gamma_\mu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\delta \gamma^\epsilon \gamma^\mu = \dots = 2(\gamma^\epsilon \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\delta + \gamma^\delta \gamma^\beta \gamma^\alpha \gamma^\epsilon)$$

quindi $\gamma_\mu A \gamma^\mu = -2A$; $\gamma_\mu AB \gamma^\mu = 4AB$; $\gamma_\mu A \not{B} \gamma^\mu = -2 \not{B} A$

$$\gamma_\mu A \not{B} \not{C} \gamma^\mu = 2(\not{C} A \not{B} + \not{B} A \not{C}) \quad \text{dove } A \equiv \gamma^\alpha A_\alpha, \dots$$

tracce di matrici γ

•) Date due matrici $n \times n$ U, V $\text{Tr}(UV) = U_{ij} V_{ji} = V_{ji} U_{ij} = \text{Tr}(VU)$

e in generale $\text{Tr}(U_1 U_2 \dots U_N) = \text{Tr}(U_N U_1 \dots U_{N-1}) = \dots$ (proprietà ciclica)

•) $\text{Tr}(\gamma^\alpha) = 0$, in generale $\text{Tr}(\underbrace{\gamma^\alpha \gamma^\beta \dots \gamma^\mu \gamma^\nu}_{\# \text{ dispari}}) = \text{Tr}((\gamma^5)^2 \gamma^\alpha \dots \gamma^\nu) =$

prop. ciclica

$$\stackrel{b}{=} \text{Tr}(\gamma^5 \gamma^\alpha \dots \gamma^\nu \gamma^5) = -\text{Tr}(\gamma^\alpha \dots \gamma^\nu (\gamma^5)^2) = 0$$

$$\hookrightarrow \{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0$$

•) $\text{Tr}(\gamma^\alpha \gamma^\beta) = \text{Tr}(\gamma^\beta \gamma^\alpha) = \frac{1}{2} \text{Tr}(\{\gamma^\alpha, \gamma^\beta\}) = g^{\alpha\beta} \text{Tr}(\mathbb{1}) = 4g^{\alpha\beta}$

$$\text{Tr} \sigma^{\alpha\beta} = \frac{i}{2} \text{Tr}(\gamma^{\alpha\beta} - \gamma^{\beta\alpha}) = 0, \quad \text{Tr}(\gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\delta \gamma^\epsilon) = \dots = 4(g^{\alpha\beta} g^{\delta\epsilon} - g^{\alpha\delta} g^{\beta\epsilon} + g^{\alpha\epsilon} g^{\beta\delta})$$

$$\Rightarrow \text{Tr}(AB) = 4AB; \quad \text{Tr}(A \not{B} \not{C} \not{D}) = 4((AB)(CD) - (AC)(BD) + (AD)(BC))$$

in generale \rightarrow # pari

$$\text{Tr}(A_1 A_2 \dots A_{2n}) = (A_1 A_2) \text{Tr}(A_3 \dots A_{2n}) - (A_1 A_3) \text{Tr}(A_2 A_4 \dots A_{2n}) + \dots + (A_1 A_{2n}) \text{Tr}(A_2 A_3 \dots A_{2n-1})$$

$$A\beta = A_\alpha \beta_\beta \gamma^\alpha \gamma^\beta = A_\alpha \beta_\beta \left(\frac{1}{2} (\underbrace{\gamma^\alpha \gamma^\beta - \gamma^\beta \gamma^\alpha}_{2g^{\alpha\beta}}) + \frac{1}{2} (\underbrace{\gamma^\alpha \gamma^\beta + \gamma^\beta \gamma^\alpha}_{-2i\sigma^{\alpha\beta}}) \right) = (A\beta) - i\sigma^{\alpha\beta} A_\alpha \beta_\beta = AB$$

$$\Rightarrow A^2 = A^2 ; \quad A\beta = -\beta A \quad \& \quad AB = 0$$

•) $\text{Tr}(\gamma^5) = \text{Tr}(\gamma^5 \gamma^\alpha) = \text{Tr}(\gamma^5 \gamma^\alpha \gamma^\beta) = \text{Tr}(\gamma^5 \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\delta) = 0$

$\text{Tr}(\gamma^5 \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\mu \gamma^\nu) = -4i \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}$

$\text{Tr}(\gamma^5) = \text{Tr}(\gamma^5 \gamma^0 \gamma^0) = -\text{Tr}(\gamma^0 \gamma^5 \gamma^0) = -\text{Tr}(\gamma^0 \gamma^0 \gamma^5) = -\text{Tr}(\gamma^5) = 0$

Operatori di proiezione

Definiamo gli operatori di proiezione dell'energia

$$\Lambda_{\alpha\beta}^\pm(\vec{p}) = \frac{\pm \not{p} + m}{2m} \quad \text{ricordando dall'eq. di Dirac nello spazio}$$

degli impulsi che $(\not{p} - m) u_r(\vec{p}) = (\not{p} + m) v_r(\vec{p}) = \bar{u}_r(\vec{p})(\not{p} - m) = \bar{v}_r(\vec{p})(\not{p} + m) = 0$

abbiamo che $\Lambda^+(\vec{p}) u_r(\vec{p}) = u_r(\vec{p})$, $\Lambda^-(\vec{p}) v_r(\vec{p}) = v_r(\vec{p})$
 $\bar{u}_r(\vec{p}) \Lambda^+(\vec{p}) = \bar{u}_r(\vec{p})$, $\bar{v}_r(\vec{p}) \Lambda^-(\vec{p}) = \bar{v}_r(\vec{p})$

mentre $\Lambda^+(\vec{p}) v_r(\vec{p}) = \Lambda^-(\vec{p}) u_r(\vec{p}) = \bar{v}_r(\vec{p}) \Lambda^+(\vec{p}) = \bar{u}_r(\vec{p}) \Lambda^-(\vec{p}) = 0$

inoltre $(\Lambda^\pm(\vec{p}))^2 = \left(\frac{\pm \not{p} + m}{2m} \right)^2 = \frac{p^2 + m^2 \pm 2\not{p}m}{4m^2} = \Lambda^\pm(\vec{p})$

$\Lambda^+(\vec{p}) \Lambda^-(\vec{p}) = \dots = 0$ e $\Lambda^+(\vec{p}) + \Lambda^-(\vec{p}) = \frac{2m}{2m} = 1$

e usando $\sum_{r=1}^2 (u_{r\alpha}(\vec{p}) \bar{u}_{r\beta}(\vec{p}) - v_{r\alpha}(\vec{p}) \bar{v}_{r\beta}(\vec{p})) = \delta_{\alpha\beta}$ (relazione di completezza per gli spinori)

$\Lambda_{\alpha\beta}^+(\vec{p}) = \sum_{r=1}^2 u_{r\alpha}(\vec{p}) \bar{u}_{r\beta}(\vec{p})$, $\Lambda_{\alpha\beta}^-(\vec{p}) = -\sum_{r=1}^2 v_{r\alpha}(\vec{p}) \bar{v}_{r\beta}(\vec{p})$

In molti casi avremo a che fare con stati iniziali e finali di cui NON conosciamo la polarizzazione: (stati con polarizzazione NON definita)

Dobbiamo quindi calcolare le corrispondenti sezioni d'urto NON polarizzate definite come la MEDIA sulle polarizzazioni iniziali e la SOMMA sulle polarizzazioni finali (miscela quantistica)

Sezione d'urto NON polarizzata: $\begin{cases} \text{MEDIA} & \text{polarizzazioni iniziali} \\ \text{SOMMA} & \text{finali} \end{cases}$
(amplicità di Feynman)

Ad esempio da $\mathcal{M} = \bar{u}_s(\vec{p}') \Gamma u_r(\vec{p})$ con Γ prodotto di matrici γ dobbiamo calcolare ($\tilde{\Gamma} \equiv \gamma^0 \Gamma^\dagger \gamma^0$)

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{2} \sum_{r=1}^2 \sum_{s=1}^2 |\mathcal{M}|^2 = \frac{1}{2} \sum_r \sum_s (\bar{u}_s(\vec{p}') \Gamma u_r(\vec{p})) (\bar{u}_r(\vec{p}) \tilde{\Gamma} u_s(\vec{p}')) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_s u_{s\beta}(\vec{p}') u_{s\alpha}(\vec{p}') \right) \Gamma_{\alpha\beta} \left(\sum_r u_{r\beta}(\vec{p}) \bar{u}_{r\alpha}(\vec{p}) \right) \tilde{\Gamma}_{\delta\delta} = \\ &= \frac{1}{2} \Lambda_{\delta\alpha}^+(\vec{p}') \Gamma_{\alpha\beta} \Lambda_{\beta\delta}^+(\vec{p}) \tilde{\Gamma}_{\delta\delta} = \frac{1}{2} \text{Tr} \left(\Lambda^+(\vec{p}') \Gamma \Lambda^+(\vec{p}) \tilde{\Gamma} \right) = \frac{1}{2} \text{Tr} \left(\frac{\not{p}' + m}{2m} \Gamma \frac{\not{p} + m}{2m} \tilde{\Gamma} \right) \end{aligned}$$

indici spinoriali

Se invece volessimo calcolare la sezione d'urto per un caso con polarizzazione definito avremmo ad esempio

$$\begin{aligned} X &= |\bar{u}_2(\vec{p}') \Gamma u_1(\vec{p})|^2 = (\bar{u}_2(\vec{p}') \Gamma u_1(\vec{p})) (\bar{u}_1(\vec{p}) \tilde{\Gamma} u_2(\vec{p}')) = \\ &= \sum_r \sum_s (\bar{u}_s(\vec{p}') \Gamma \Pi^+(\vec{p}) u_r(\vec{p})) (\bar{u}_r(\vec{p}) \tilde{\Gamma} \Pi^-(\vec{p}') u_s(\vec{p}')) = \\ &= \text{Tr} \left(\Lambda^+(\vec{p}') \Gamma \Pi^+(\vec{p}) \Lambda^+(\vec{p}) \tilde{\Gamma} \Pi^-(\vec{p}') \right) \end{aligned}$$

Somma sulle polarizzazioni: (fotoni)

94

Per un processo che coinvolge fotoni negli stati esterni (iniziali o finali) abbiamo che l'ampiezza di Feynman \mathcal{M} può essere scritta

$$\mathcal{M} = \epsilon_r^\alpha(\vec{k}_1) \epsilon_{r_2}^\beta(\vec{k}_2) \dots M_{\alpha\beta\dots}(\vec{k}_1, \vec{k}_2, \dots)$$

I vettori di polarizzazione $\epsilon_r^\alpha(\vec{k})$ sono gauge-dependent

$$A^\mu(x) \rightarrow A^\mu(x) + \partial^\mu f(x)$$

$$\Rightarrow \epsilon_r^\mu(\vec{k}) e^{\pm i\vec{k}\cdot\vec{x}} \rightarrow (\epsilon_r^\mu(\vec{k}) \pm i k^\mu \tilde{f}(k)) e^{\pm i\vec{k}\cdot\vec{x}}$$

$$\text{dove } f(x) = \int d^4k \tilde{f}(k) e^{\pm i\vec{k}\cdot\vec{x}}$$

L'invarianza di gauge della teoria (e quindi dell'ampiezza complessiva \mathcal{M} di un processo fisico) implica che

$$k_1^\alpha M_{\alpha\beta\dots}(\vec{k}_1, \vec{k}_2, \dots) = k_2^\beta M_{\alpha\beta\dots}(\vec{k}_1, \vec{k}_2, \dots) = \dots = 0$$

Sostituendo $\epsilon_r^\alpha(\vec{k})$ con k^α e l'ampiezza si annulla!

Ad esempio sia $\mathcal{M} = \epsilon_r^\alpha(\vec{k}) M_\alpha(\vec{k})$ con $k^\alpha M_\alpha(\vec{k}) = 0$

$$\text{calcoliamo } X = \sum_{r=1}^2 |\mathcal{M}|^2 = M_\alpha(\vec{k}) M_\beta^*(\vec{k}) \sum_{r=1}^2 \epsilon_r^\alpha(\vec{k}) \epsilon_r^\beta(\vec{k}) = -M^\alpha(\vec{k}) M_\alpha^*(\vec{k})$$

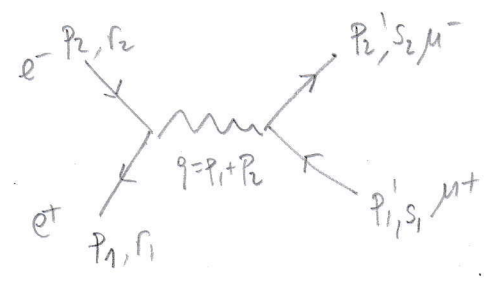
$$\text{dove abbiamo usato che } \sum_{r=1}^2 \epsilon_r^\alpha(\vec{k}) \epsilon_r^\beta(\vec{k}) = -g^{\alpha\beta} - \frac{1}{(kM)^2} (k^\alpha k^\beta - (kM)(k^\alpha M^\beta + k^\beta M^\alpha))$$

danno contributi nulli!

Il processo $e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$
 (creazione di coppie di muoni in annichilazione elettrone-positrone)

$$e^+(\vec{p}_1, r_1) + e^-(\vec{p}_2, r_2) \rightarrow \mu^+(\vec{p}'_1, s_1) + \mu^-(\vec{p}'_2, s_2)$$

abbiamo un unico diagramma di Feynman



$$p_1^2 = p_2^2 = m_e^2 ; \quad p_1'^2 = p_2'^2 = m_\mu^2$$

$$(p_1 + p_2)^2 = (p_1' + p_2')^2 = 2m_\mu^2 + 2p_1' p_2' > 0$$

la cui ampiezza corrispondente è data da

$$M = i e^2 \left(\bar{u}_{s_2}(\vec{p}'_2) \gamma_\alpha v_{s_1}(\vec{p}'_1) \right) \frac{1}{(p_1 + p_2)^2} \left(\bar{v}_{r_1}(\vec{p}_1) \gamma^\alpha u_{r_2}(\vec{p}_2) \right)_{e^\pm}$$

muoni:
elettroni:

$(p_1 + p_2)^2 > 0$

per il calcolo della sezione d'urto. Non polarizzate abbiamo che

$$X = \frac{1}{4} \sum_{r_1} \sum_{r_2} \sum_{s_1} \sum_{s_2} |M|^2 \quad \text{pertanto calcoliamo}$$

$$M^* = -i e^2 \left(\bar{v}_{s_1}(\vec{p}'_1) \gamma_\beta u_{s_2}(\vec{p}'_2) \right) \frac{1}{(p_1 + p_2)^2} \left(\bar{u}_{r_2}(\vec{p}_2) \gamma^\beta v_{r_1}(\vec{p}_1) \right)$$

pertanto

$$X = \frac{e^4}{4 (p_1 + p_2)^4} \sum_{s_1} \sum_{s_2} \left(\bar{u}_{s_2}(\vec{p}'_2) \gamma_\alpha v_{s_1}(\vec{p}'_1) \right) \left(\bar{v}_{s_1}(\vec{p}'_1) \gamma_\beta u_{s_2}(\vec{p}'_2) \right) \sum_{r_1} \sum_{r_2} \left(\bar{v}_{r_1}(\vec{p}_1) \gamma^\alpha u_{r_2}(\vec{p}_2) \right) \left(\bar{u}_{r_2}(\vec{p}_2) \gamma^\beta v_{r_1}(\vec{p}_1) \right)$$

$$= \frac{e^4}{4 (p_1 + p_2)^4} \text{Tr} \left(\frac{\not{p}'_2 + m_\mu}{2m_\mu} \gamma_\alpha \frac{\not{p}'_1 - m_\mu}{2m_\mu} \gamma_\beta \right) \text{Tr} \left(\frac{\not{p}_1 - m_e}{2m_e} \gamma^\alpha \frac{\not{p}_2 + m_e}{2m_e} \gamma^\beta \right)$$

ma
$$\text{Tr} \left(\frac{p_2' + m_\mu}{2m_\mu} \gamma_\alpha \frac{p_1' - m_\mu}{2m_\mu} \gamma_\beta \right) = \frac{1}{4m_\mu^2} \left(\text{Tr}(p_2' \gamma_\alpha p_1' \gamma_\beta) - m_\mu^2 \text{Tr}(\gamma_\alpha \gamma_\beta) \right)$$

$$= \frac{1}{m_\mu^2} \left(p_{1\alpha} p_{2\beta} + p_{2\alpha} p_{1\beta} - (m_\mu^2 + (p_1' p_2')) g_{\alpha\beta} \right)$$

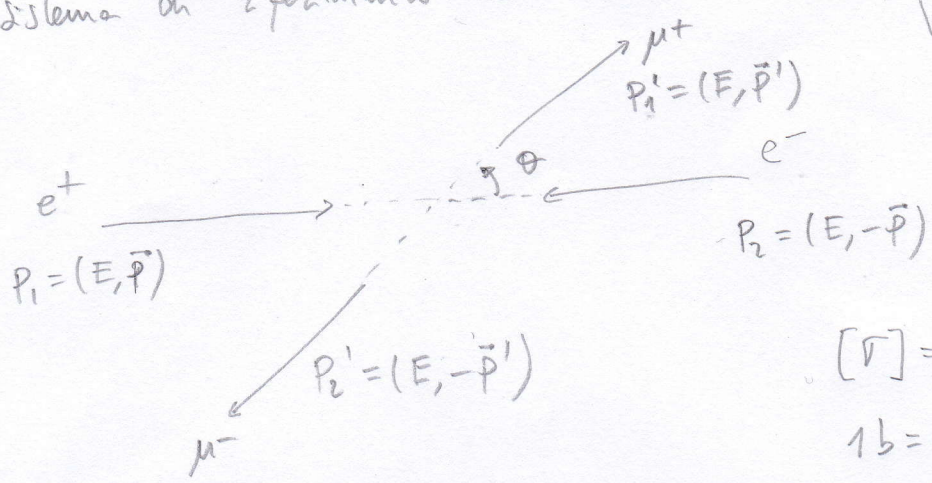
e analogamente

$$\text{Tr} \left(\frac{p_1 - m_e}{2m_e} \gamma_\alpha \frac{p_1' - m_e}{2m_e} \gamma_\beta \right) = \dots = \frac{1}{m_e^2} \left(p_1^\alpha p_2^\beta + p_2^\alpha p_1^\beta - (m_e^2 + (p_1 p_2)) g^{\alpha\beta} \right)$$

$$\Rightarrow X = \frac{e^4}{2m_e^2 m_\mu^2 (p_1 + p_2)^4} \left((p_1 p_1') (p_2 p_2') + (p_1 p_2') (p_2 p_1') + m_e^2 (p_1' p_2') + m_\mu^2 (p_1 p_2) + 2m_e^2 m_\mu^2 \right)$$

$$X \approx \frac{e^4}{8m_e^2 m_\mu^2} \frac{t^2 + u^2}{s^2}$$

Nel sistema di riferimento del centro di massa



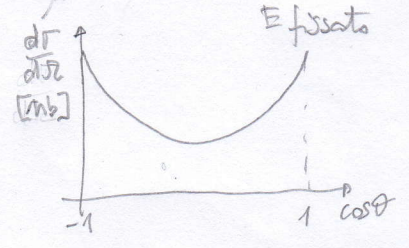
Invarianti di Mandelstam
 $s = (p_1 + p_2)^2 \approx 2p_1 p_2$ ($m \rightarrow 0$)
 $t = (p_1 - p_1')^2 = (p_2 - p_2')^2 \approx -2p_1 p_1'$
 $u = (p_1 - p_2')^2 = (p_2 - p_1')^2 \approx -2p_1 p_2'$

$[r] = [b] = [m^2]$ $b = \text{barn}$
 $1b = 10^{-28} m^2 \approx 2.6 \times 10^{-3} \text{ MeV}^{-2}$
 $0.39 \text{ mb} = 10^{-6} \text{ GeV}^{-2}$

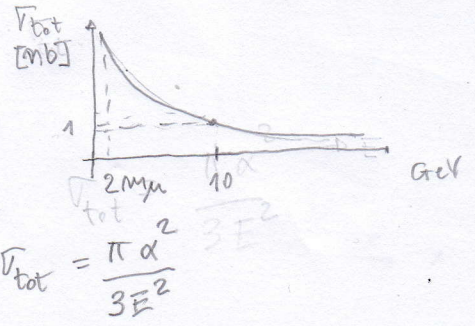
$$p_1 p_1' = p_2 p_2' = E^2 - |\vec{p}| |\vec{p}'| \cos \theta$$

$$p_1 p_2 = E^2 + |\vec{p}|^2$$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Com}} = \frac{\pi \alpha^2}{16 \pi^2 E^4} \frac{|\vec{p}'|}{|\vec{p}|} X^2 = \frac{\alpha^2}{16 E^4} \frac{|\vec{p}'|}{|\vec{p}|} (E^2 + m_\mu^2 + |\vec{p}'|^2 \cos^2 \theta)$$



$$\sigma_{\text{tot}} = \frac{\pi \alpha^2}{4E^4} \frac{|\vec{p}'|}{E} \left(E^2 + m_\mu^2 + \frac{|\vec{p}'|^2}{3} \right)$$



nel limite $E \gg m_\mu^2$

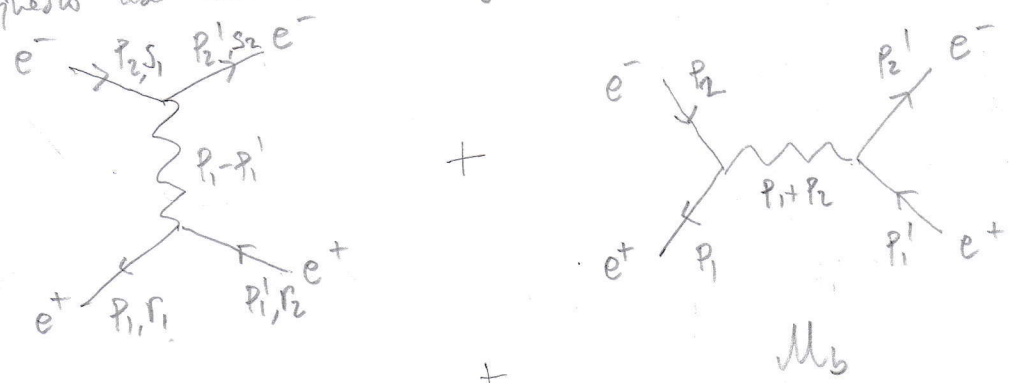
$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Com}} = \frac{\alpha^2}{16 E^2} (1 + \cos^2 \theta)$$

$$\sigma_{\text{tot}} = \frac{\pi \alpha^2}{3E^2}$$

La diffusione Bhabha : $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$
 (creazione di coppie elettrone positrone in annichilazione elettrone positrone)
 Stato finale è lo stesso dello stato iniziale.

$$e^+(\vec{p}_1, r_1) + e^-(\vec{p}_2, r_2) \rightarrow e^+(\vec{p}'_1, s_1) + e^-(\vec{p}'_2, s_2)$$

In questo caso abbiamo due diagrammi di Feynman



M_a sign (-) per "normal ordering"

$$M_a = -ie^2 \left(\bar{u}_{s_2}(\vec{p}'_2) \gamma_\alpha u_{r_1}(\vec{p}_1) \right) \frac{1}{(p_1 - p'_1)^2} \left(\bar{v}_{r_1}(\vec{p}_1) \gamma^\alpha v_{s_2}(\vec{p}'_2) \right)$$

$$M_b = ie^2 \left(\bar{u}_{s_2}(\vec{p}'_2) \gamma_\beta v_{r_1}(\vec{p}_1) \right) \frac{1}{(p_1 + p_2)^2} \left(\bar{v}_{r_1}(\vec{p}_1) \gamma^\beta u_{s_2}(\vec{p}'_2) \right)$$

Consideriamo il limite di alta energia $E \gg m_e$, abbiamo

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{com}} = \frac{m_e^4}{16\pi^2 E^2} (X_{aa} + X_{bb} + X_{ab} + X_{ab}^*)$$

termini "diretti"

$$X_{aa} = \frac{1}{4} \sum_{\text{spin}} |M_a|^2; \quad X_{bb} = \frac{1}{4} \sum_{\text{spin}} |M_b|^2$$

$$X_{ab} = \frac{1}{4} \sum_{\text{spin}} M_a M_b^* \quad (\text{interferenza})$$

$$X_{aa} = \frac{1}{4} \sum_{r_1, s_2, r'_1, s'_2} |M_a|^2 = \frac{e^4}{4(p_1 - p'_1)^4} \sum_{s_1, s_2} \left(\bar{u}_{s_2}(\vec{p}'_2) \gamma_\alpha u_{r_1}(\vec{p}_1) \right) \left(\bar{v}_{r_1}(\vec{p}_1) \gamma^\alpha v_{s_2}(\vec{p}'_2) \right) \sum_{r'_1, s'_2} \left(\bar{v}_{r'_1}(\vec{p}'_1) \gamma^\beta u_{s'_2}(\vec{p}'_2) \right) \left(\bar{u}_{s'_2}(\vec{p}'_2) \gamma_\beta v_{r'_1}(\vec{p}'_1) \right)$$

$$= \frac{e^4}{4(p_1 - p'_1)^4} \frac{1}{16m_e^4} \text{Tr}(\not{p}'_2 \gamma_\alpha \not{p}_1 \gamma_\beta) \text{Tr}(\not{p}_1 \gamma^\alpha \not{p}'_1 \gamma^\beta) = \frac{e^4}{4m_e^2 (p_1 - p'_1)^2} (p_{2\alpha} p_{2\beta} + p_{2\alpha} p'_{1\beta} + p'_{1\alpha} p_{2\beta} + p'_{1\alpha} p'_{1\beta})$$

$$= \frac{e^4}{8m_e^4 (p_1 p'_1)^2} \left((p_1 p_2)(p'_1 p'_2) + (p_1 p'_2)(p'_1 p_2) \right) = \frac{e^4}{8m_e^4 (1 - \cos\theta)^2} (4 + (1 + \cos\theta)^2) =$$

$$= \frac{e^4}{8m_e^4 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \left(1 + \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \quad \frac{s^2 + u^2}{t^2}$$

$$X_{bb} = \frac{e^4}{16m_e^4} (1 + \cos^2 \theta) \quad (\text{da } e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)$$

Per il termine di interferenza abbiamo

$$X_{ab} = \frac{-e^4}{4(p_1 - p_1')^2 (p_1 + p_2)^2} \sum_{r_1, s_1, s_2} \bar{u}_{s_2}(p_2') \gamma_\alpha u_{s_1}(p_2) \bar{u}_{s_1}(p_2) \gamma_\beta v_{r_1}(p_1) \bar{v}_{r_1}(p_1) \gamma^\alpha v_{r_2}(p_1') \bar{v}_{r_2}(p_1') \gamma^\beta u_{s_2}(p_2')$$

$$= \frac{-e^4}{16(p_1 p_1')(p_1 p_2)} \frac{1}{16m_e^4} \text{Tr}(\not{p}_2' \gamma_\alpha \not{p}_2 \gamma_\beta \not{p}_1 \gamma^\alpha \not{p}_1' \gamma^\beta)$$

(matrici γ)

ricordiamo le contrazioni: $\gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_\delta \gamma^\mu = -2\gamma_\delta \gamma_\beta \gamma_\alpha$ e $\gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma^\mu = 4g_{\alpha\beta}$

$$\Rightarrow \text{Tr}(\not{p}_2' \gamma_\alpha \not{p}_2 \gamma_\beta \not{p}_1 \gamma^\alpha \not{p}_1' \gamma^\beta) = -2 \text{Tr}(\not{p}_2' \not{p}_1 \gamma_\beta \not{p}_2 \not{p}_1' \gamma^\beta) = -8 \text{Tr}(\not{p}_2' \not{p}_1) (\not{p}_2 \not{p}_1') = -32 (p_2' p_1) (p_2 p_1')$$

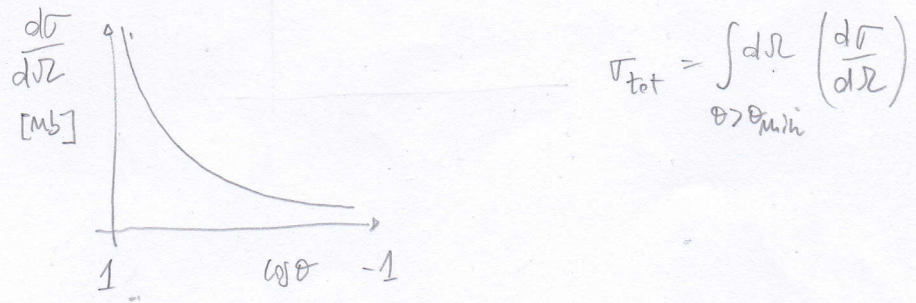
da cui $\frac{u^2}{st}$

$$X_{ab} = \frac{-e^4}{16m_e^4 (1 - \cos\theta)} (1 + \cos\theta)^2 = \frac{-e^4}{8m_e^4 \sin^2 \frac{\theta}{2}} \cos^4 \frac{\theta}{2} \quad (\text{reale}) \quad \left(\alpha = \frac{e^2}{4\pi} \right)$$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{COM}} = \frac{\alpha^2}{8E^2} \left(\frac{1 + \cos^4 \frac{\theta}{2}}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} + \frac{1 + \cos^2 \theta}{2} - \frac{2 \cos^4 \frac{\theta}{2}}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} \right) = \frac{\alpha^2}{8} \left(\frac{u^2 + s^2}{t^2} + \frac{t^2 + u^2}{s^2} + 2 \frac{u^2}{ts} \right)$$

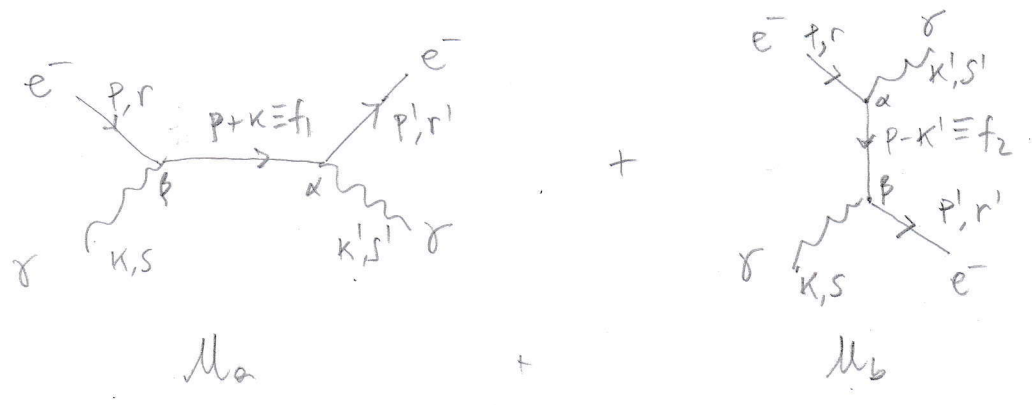
$\left| \frac{1 + \cos^4 \frac{\theta}{2}}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} \right|^2$ $\left| \frac{1 + \cos^2 \theta}{2} \right|^2$ interference

Nel limite $\theta \rightarrow 0$ il contributo X_{aa} domina e la sezione d'urto diverge.
 Infatti per $\theta \rightarrow 0$ $\frac{1}{p_1 - p_1'} \rightarrow \infty$ dove $k = p_1 - p_1'$ è il 4-impulso del fotone.
 Il fotone scambiato ha impulso tendente a zero, il processo è indistinguibile dal caso in cui non avviene lo scattering. Dobbiamo considerare un valore minimo dell'angolo di scattering $\theta > \theta_{\text{min}}$ che corrisponde alle risoluzioni angolare sperimentale accessibile.
 A grande θ tutti i contributi sono ugualmente importanti.



La diffusione Compton: $e^- + \gamma \rightarrow e^- + \gamma$

$$e^-(\vec{p}, r) + \gamma(\vec{k}, s) \rightarrow e^-(\vec{p}', r') + \gamma(\vec{k}', s')$$



$$M_a = -ie^2 \bar{u}' \not{\epsilon}' \frac{\not{f}_1 + m}{2pk} \not{\epsilon} u$$

dove $f_1 \equiv p+k$
 $f_2 \equiv p-k'$

$$M_b = ie^2 \bar{u}' \not{\epsilon}' \frac{\not{f}_2 + m}{2pk'} \not{\epsilon} u$$

Sappiamo che data $M = \epsilon_\alpha \epsilon'_\beta M^{\alpha\beta}$

$$\sum_{\text{polarizz.}} |M|^2 = M^{\alpha\beta} M_{\alpha\beta}^*$$

calcoliamo quindi ($M = M_a + M_b$)

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{pol.}} \sum_{\text{spin}} |M|^2 = \frac{1}{4} \sum_{\text{pol}} \sum_{\text{spin}} (|M_a|^2 + |M_b|^2 + M_a M_b^* + M_b M_a^*) =$$

$$= \frac{e^4}{64m^2} \left(\frac{X_{aa}}{(pk)^2} + \frac{X_{bb}}{(pk')^2} - \frac{X_{ab} + X_{ba}}{(pk)(pk')} \right) \quad \text{dove } m = m_e$$

$$X_{aa} = \text{Tr} \left(\gamma^\beta (\not{f}_1 + m) \gamma^\alpha (\not{p} + m) \gamma_\alpha (\not{f}_1 + m) \gamma_\beta (\not{p}' + m) \right)$$

tracce di γ matrici γ

$$X_{bb} = \text{Tr} \left(\gamma^\alpha (\not{f}_2 + m) \gamma^\beta (\not{p} + m) \gamma_\beta (\not{f}_2 + m) \gamma_\alpha (\not{p}' + m) \right)$$

$$X_{ab} = \text{Tr} \left(\gamma^\beta (\not{f}_1 + m) \gamma^\alpha (\not{p} + m) \gamma_\beta (\not{f}_2 + m) \gamma_\alpha (\not{p}' + m) \right)$$

$$X_{ba} = \text{Tr} \left(\gamma^\alpha (\not{f}_2 + m) \gamma^\beta (\not{p} + m) \gamma_\alpha (\not{f}_1 + m) \gamma_\beta (\not{p}' + m) \right)$$

$$(k \leftrightarrow -k' \text{ e } \epsilon \leftrightarrow -\epsilon') \Rightarrow M_a \leftrightarrow M_b$$

Usiamo le identità: $\delta_\mu^\alpha \delta^\beta \gamma^\mu = -2\delta^\alpha \delta^\beta$, $\delta_\mu^\alpha \delta^\beta \gamma^\mu = 4\delta^{\alpha\beta}$, $\delta_\mu^\alpha \delta^\alpha \gamma^\mu = -2\delta^\alpha$, $\delta_\alpha \delta^\alpha = 4$ 100

$$\delta^\beta (f_1 + m) \overbrace{\delta^\alpha (f_1 + m) \delta_\alpha (f_1 + m)}^{-2f_1 + 4m} \delta_\beta = \delta^\beta (f_1 + m) (-2f_1 + 4m) (f_1 + m) \delta_\beta =$$

$$= 2\delta^\beta \left(-f_1 f_1 + \underline{f_1 p m} + 2f_1 m f_1 + \underline{2f_1 m^2} - \underline{m p f_1} - \underline{m^2 p} + \underline{2m^2 f_1} + \underline{2m^3} \right) \delta_\beta =$$

$$= 4 f_1 p f_1 - 16 m (p f_1) + 16 m^2 f_1^2 - 16 m^2 f_1 + 4 m^2 p + 16 m^3$$

$$\Rightarrow X_{aa} = 16 \left(2(f_1 p)(f_1 p') - f_1^2 (p p') + 4m^2 (-p f_1 + f_1^2) + m^2 (-4f_1 p_1 + p p') + 4m^4 \right)$$

$$= 32 \left(m^4 + m^2 (p k) + (p k)(p k') \right)$$

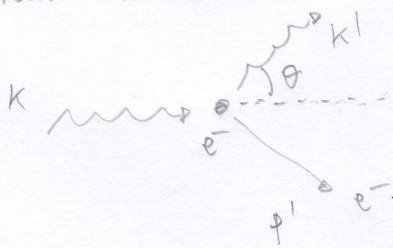
ovvero $p^2 = p'^2 = m^2$ $p k = p' k'$ $p k' = p' k$

da cui $X_{bb} = 32 \left(m^4 - m^2 (p k) + (p k)(p k') \right)$

Analogamente possiamo calcolare

$$X_{ab} = \dots = 16 m^2 \left(2m^2 + (p k) - (p k') \right) = X_{ba}$$

Consideriamo il sistema del laboratorio in cui $p = (m, \vec{0})$



$$p + k' = p' + k' \Rightarrow p - k' = p' - k \Rightarrow 2p k' = 2p' k$$

$$\Downarrow$$

$$p k = (p' + k' - k) k = p' k + k' k = p k' + k k'$$

$$k = (\omega, \vec{k}) ; \quad k' = (\omega', \vec{k}')$$

$$p = (E, \vec{p}) = (m, \vec{0}) \text{ (in lab frame)} ; \quad p' = (E', \vec{p}')$$

$$\Downarrow \text{ in Lab. fr.}$$

$$m\omega = m\omega' + \omega\omega'(1 - \cos\theta)$$

$$\Downarrow$$

$$\omega' = \frac{m\omega}{m + \omega(1 - \cos\theta)}$$

Ritroviamo che la sezione d'urto è data da

$$d\sigma = \frac{\pi (2me)^2 |\mathcal{M}|^2}{64\pi^2 v_{rel} E_1 E_2 E_1' E_2'}$$

$$|\vec{p}_1'|^2 d\mathcal{R}_1' \left(\frac{\partial(E_1' + E_2')}{\partial|\vec{p}_1'|} \right)^{-1}$$

$f(E_1, E_2)$

$$\begin{pmatrix} p_1' \rightarrow k' & p_1 \rightarrow k \\ p_2' \rightarrow p' & p_2 \rightarrow p \end{pmatrix}$$

Ab (tree) Lab

$$\frac{E_1' - |\vec{p}_1'| \omega - \omega'}{E_1} = 1$$

Nel caso della scattering Compton nel lab frame abbiamo

$$p = (m, \vec{0}) \quad p + k = p' + k' \Rightarrow \vec{p}' = \vec{k} - \vec{k}'$$

$$E' = (m^2 + (\vec{k} - \vec{k}')^2)^{1/2} = (m^2 + \omega^2 + \omega'^2 - 2\omega\omega'\cos\theta)^{1/2} = \omega + m - \omega'$$

$$\frac{\partial(E' + \omega')}{\partial\omega'} = \frac{1}{\omega'} (2\omega' - \omega\cos\theta) + 1 =$$

$$= \frac{\omega' - \omega\cos\theta + (\omega + m - \omega')}{\omega'} = \frac{m + \omega(1 - \cos\theta)}{\omega'} = \frac{m\omega}{E'\omega'} \quad \left(\omega' = \frac{m\omega}{m + \omega(1 - \cos\theta)} \right)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{lab}} = \frac{4\alpha^2 |\mathcal{M}|^2}{64\pi^2 \cdot 1 \cdot \omega\omega'E'\omega'} \quad \omega'^2 \frac{E'\omega'}{\omega\omega} = \frac{1}{16\pi^2} \left(\frac{\omega'}{\omega} \right)^2 |\mathcal{M}|^2$$

$$\frac{1}{\omega'} = \frac{1}{\omega} + \frac{1 - \cos\theta}{m}$$

dove $|\mathcal{M}|^2 = \overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{1}{m_r} \sum_{\text{pol. iniz. spin}} |\mathcal{M}|^2$
 polarizz. nello stato iniziale

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{1}{4} \sum_{\text{pol. spin}} |\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{2m^2} \left(\frac{pk}{pk'} + \frac{pk'}{pk} + 2m^2 \left(\frac{1}{pk} - \frac{1}{pk'} \right) + m^4 \left(\frac{1}{pk} - \frac{1}{pk'} \right)^2 \right)$$

$$= \frac{e^4}{2m^2} \left(\frac{\omega}{\omega'} + \frac{\omega'}{\omega} + \frac{2m^2}{\omega\omega'} \frac{\cos\theta - 1}{m} + \frac{m^4}{m^2} \frac{(\cos\theta - 1)^2}{\omega^2} \right) = \frac{e^4}{2m^2} \left(\frac{\omega}{\omega'} + \frac{\omega'}{\omega} - \sin^2\theta \right)$$

$$pk = m\omega$$

$$pk' = m\omega'$$

$$\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega'} = \frac{\cos\theta - 1}{m}$$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{lab}} = \frac{\alpha^2}{2m^2} \left(\frac{\omega'}{\omega} \right)^2 \left(\frac{\omega}{\omega'} + \frac{\omega'}{\omega} - \sin^2\theta \right)$$

dove $\frac{1}{\omega'} = \frac{1}{\omega} + \frac{1 - \cos\theta}{m}$ e nel limite $\omega \ll m \quad \omega' = \omega$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{lab}} \approx \frac{\alpha^2}{2m^2} (1 + \cos^2\theta)$$

sezione d'urto di diffusione classica Thomson

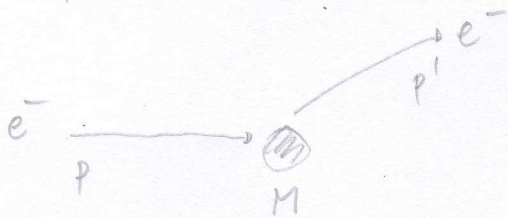
$$\sigma_{\text{tot}} = \frac{\alpha^2}{2m^2} \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^1 (1 + \cos^2\theta) d\cos\theta = \frac{8}{3} \pi \left(\frac{\alpha}{m} \right)^2 \approx 6.65 \times 10^{-25} \text{ cm}^2$$

dove $r_e = \frac{\alpha}{m} \approx 2.8 \times 10^{-15} \text{ m}$ è detto "raggio classico" dell'elettrone

$$\left(\alpha = \frac{e^2}{4\pi} \text{ costante di struttura fine} \right)$$

Consideriamo adesso il caso in cui un elettrone diffonde contro un nucleo pesante N . Lo scattering equivale ad una diffusione elastica di un elettrone nel campo elettromagnetico generato dal nucleo che può essere considerato una sorgente classica (non quantizzata) $P = (E, \vec{p})$, $P' = (E', \vec{p}')$

$$P + \underline{P} = P' + \underline{P}' \quad \text{dove } \underline{P} = (M, \vec{0}), \quad \underline{P}' = (E'_M, \vec{q})$$



$$\vec{p}' - \vec{p} = \vec{q} \quad \text{impulso trasferito}$$

Nell'ipotesi in cui $M \gg |\vec{q}|$

$$P'^2 = E'^2 - |\vec{q}|^2 = M^2 \Rightarrow E_M'^2 \approx M^2$$

$$\Rightarrow E + M = E' + M \Rightarrow E = E' \quad (|\vec{p}| = |\vec{p}'|)$$

l'energia dell'elettrone è conservata $\delta(E - E')$
scattering elastico

Possiamo quindi considerare le seguenti "regole di Feynman" per lo scattering in un campo esterno.

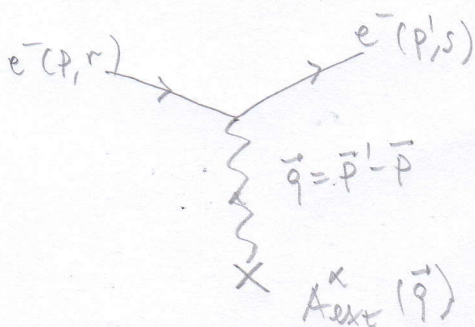
•) sostituiamo $(2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i)$ con $(2\pi) \delta(E_f - E_i)$

•) sostituiamo il campo quantizzato esterno $(\frac{1}{2V\omega})^{1/2} \epsilon^\alpha(\vec{q})$ con $A_{ext}^\alpha(\vec{q})$

dove nel caso di un campo statico (indipendente dal tempo)

$$A_{ext}^\alpha(x) = A_{ext}^\alpha(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{q} e^{i\vec{q} \cdot \vec{x}} A_{ext}^\alpha(\vec{q})$$

$$\left(\frac{1}{2\pi} \int d^0 q e^{i q^0 x^0} = \delta(q^0) \right)$$



della matrice S che dà luogo ad un termine $S_{ext}^{(1)} = ie \int d^4x \bar{\Psi}(x) A_{ext}(x) \Psi(x)$

con $\langle f | S_{ext}^{(1)} | i \rangle = (2\pi) \delta(E_f - E_i) \left(\prod_{f'} \left(\frac{1}{2VE_f} \right)^{1/2} \right) \left(\prod_{i'} \left(\frac{1}{2VE_i} \right)^{1/2} \right) \frac{1}{e} (2m_e)^{1/2} M$

nel caso di 1 elettrone nello stato iniziale e finale

$\langle e^- | S_{ext}^{(1)} | e^- \rangle = 2\pi \delta(E' - E) \frac{m}{VE} M$ e da

$dP = |\langle f | S_{ext}^{(1)} | i \rangle|^2 \frac{\pi}{f} \frac{d^3 \vec{p}'_f}{(2\pi)^3}$ $|\delta(E' - E)|^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} e^{i(E-E')t} dt \right|^2$
 $= \lim_{T \rightarrow \infty} \left| \frac{\sin[(E-E')T/2]}{\pi(E-E')} \right|^2 = \frac{T}{2\pi} \delta(E' - E)$

$\frac{d\sigma}{d\Omega'} = \left(\frac{m}{2\pi} \right)^2 |M|^2 = \left(\frac{me}{2\pi} \right)^2 |\bar{u}_s(\vec{p}') A_{ext}(\vec{q}) u_r(\vec{p})|^2$ $d^3 \vec{p}' = |\vec{p}'|^2 d|\vec{p}'| d\Omega'$
 $= |\vec{p}'| E' dE' d\Omega'$
 $(dE' = d|\vec{p}'|^2)$

Diffusione Mott

Consideriamo il campo elettromagnetico del nucleo (considerato puntiforme)

nella gauge di Coulomb $A_{ext}(x) = A_{ext}(\vec{x}) = \left(\frac{Ze}{4\pi|\vec{x}|}, \vec{0} \right)$

per cui $A_{ext}(\vec{q}) = \left(\frac{Ze}{|\vec{q}|^2}, \vec{0} \right)$

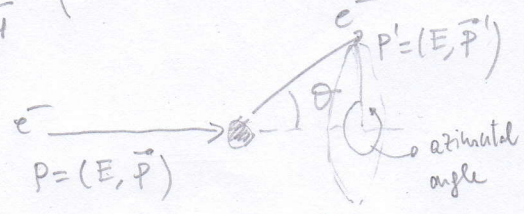
N.B. $\frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 \vec{q}}{|\vec{q}|^2} e^{i\vec{q} \cdot \vec{x}} = \frac{1}{4\pi|\vec{x}|}$ Coulomb potential

$\frac{d\sigma}{d\Omega'} = \frac{(Ze)^2}{|\vec{q}|^4} \frac{1}{2} \sum_{r,s} |\bar{u}_s(\vec{p}') \gamma^0 u_r(\vec{p})|^2 = \frac{(Ze)^2}{2|\vec{q}|^4} \text{Tr}((\not{p}' + m) \gamma^0 (\not{p} + m) \gamma^0) =$

$= \frac{(Ze)^2}{2|\vec{q}|^4} \left(\text{Tr}(\not{p}' \gamma^0 \not{p} \gamma^0) + m^2 \text{Tr}(\gamma^0 \gamma^0) \right) = \frac{2(Ze)^2}{|\vec{q}|^4} (E^2 - \vec{p} \cdot \vec{p}' + m^2) =$

$4(E^2 - p p' + E^2)$ $\text{Tr}(1) = 4$

$= \frac{(Ze)^2}{4E^2 v^4 \sin^4 \frac{\theta}{2}} (1 - v^2 \sin^2 \frac{\theta}{2})$ (assente nel caso di scattering fra campi scalari!)
formule di Mott



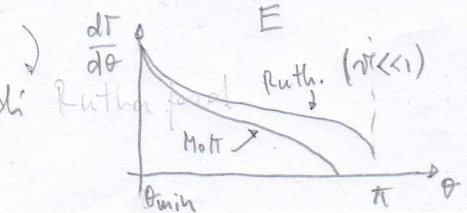
$\vec{p} \cdot \vec{p}' = |\vec{p}|^2 \cos \theta$
 $|\vec{q}|^2 = |\vec{p}' - \vec{p}|^2 = 4|\vec{p}|^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$

$v = \frac{|\vec{p}|}{E}$

Nel limite non-relativistico $|\vec{p}| \ll E, v \ll 1$

$\frac{d\sigma}{d\Omega'} = \frac{(Ze)^2}{4m^2 v^4 \sin^2 \frac{\theta}{2}}$

(Approssimazioni valide per nuclei "puntiformi") formule di Rutherford



e analogamente

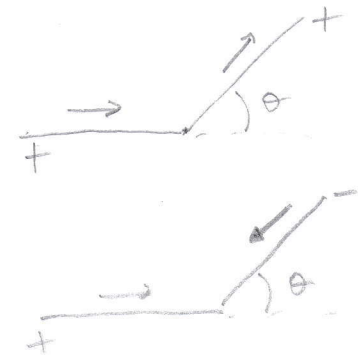
$$U_2(\vec{p}') = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \begin{pmatrix} -\sin \frac{\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} \\ \frac{|\vec{p}|}{E+m} \sin \frac{\theta}{2} \\ -\frac{|\vec{p}|}{E+m} \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

da cui otteniamo

$$|\vec{p}|^2 = E^2 - m^2$$

$$\bar{u}_1(\vec{p}') \gamma^0 u_1(\vec{p}) = \frac{E+m}{2m} \left(\cos \frac{\theta}{2} + \left(\frac{|\vec{p}|}{E+m} \right)^2 \cos \frac{\theta}{2} \right) = \frac{E}{m} \cos \frac{\theta}{2}$$

$$\bar{u}_2(\vec{p}') \gamma^0 u_1(\vec{p}) = \frac{E+m}{2m} \left(-\sin \frac{\theta}{2} + \left(\frac{|\vec{p}|}{E+m} \right)^2 \sin \frac{\theta}{2} \right) = -\sin \frac{\theta}{2}$$



Abbiamo dimostrato che nel limite non-relativistico

$v = \frac{|\vec{p}|}{E} \ll 1 \Rightarrow E \approx m$ la probabilità di scattering con/scenza

helicity flip è proporzionale a $P_{flip} = \frac{\sin^2 \theta}{2}$, $P_{no flip} = \frac{\cos^2 \theta}{2}$

Se consideriamo il limite opposto ultrarelativistico $v \rightarrow 1$, $|\vec{p}| \sim E \Rightarrow E \gg m$

la probabilità di helicity-flip rispetto alla probabilità di non avere helicity flip tende a zero come $\left(\frac{m}{E}\right)^2 \rightarrow 0$

\Rightarrow l'elicità si conserva nel limite ultrarelativistico ($m \rightarrow 0$).

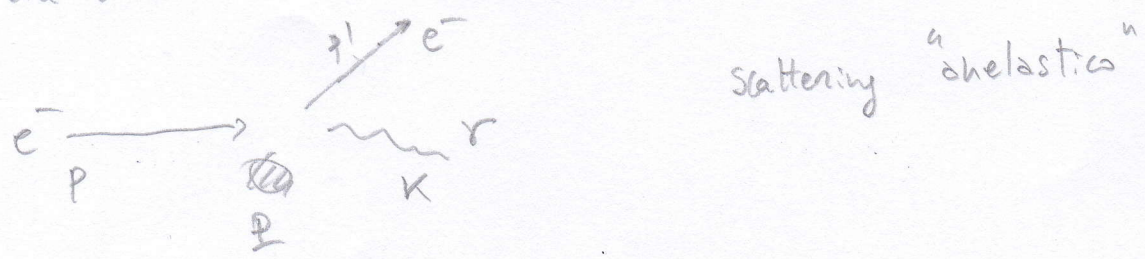
Inoltre per $m \rightarrow 0$ $\Pi^\pm(\vec{p}) = \frac{1}{2} (1 \pm \gamma^5)$ l'operatore di elicità

coincide con l'operatore chiralità $\gamma^5 \psi_r(\vec{p}) = \vec{v}_p \psi_r(\vec{p})$ con $v = \pm 1$

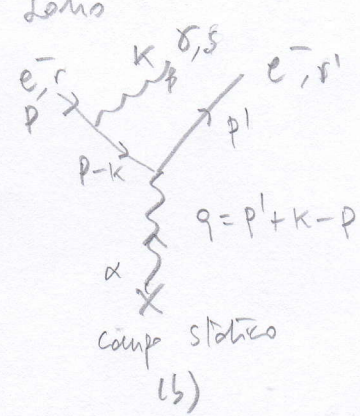
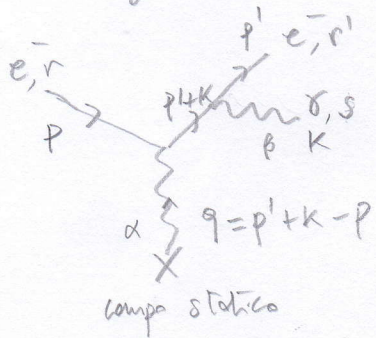
e l'interazione elettromagnetica conserva la chiralità $\bar{\psi} \gamma^\mu \psi$ (vettore)

e non $\bar{\psi} \gamma^5 \psi$ (pseudovettore).

Consideriamo ora gli effetti di ordine superiore al processo di diffusione in un campo esterno. La diffusione è in generale associata ad emissione di radiazione che va sotto il nome di "bremsstrahlung" (radiazione di frenamento) che ha l'effetto di ridurre l'energia/impulso della particella che emette la radiazione.



i diagrammi di Feynman sono



$$p = (E, \vec{p})$$

$$p' = (E', \vec{p}')$$

$$k = (\omega, \vec{k})$$

abbiamo quindi l'effetto combinato del campo statico esterno A_{ext} e del campo quantizzato A . Abbiamo quindi l'interazione data da $\bar{\psi}(A_{ext} + A)\psi$

troviamo quindi che $\langle f | S | i \rangle = 2\pi \delta(E' + \omega - E) \left(\frac{m}{VE}\right)^{1/2} \left(\frac{m}{VE'}\right)^{1/2} \left(\frac{1}{2V\omega}\right)^{1/2} \mathcal{M}$

dove $\mathcal{M} = \mathcal{M}_a + \mathcal{M}_b$

$$\frac{1}{p' + k - m} = \frac{p' + k + m}{(p' + k)^2 - m^2}$$

$$\mathcal{M}_a = -ie^2 \bar{u}_s(\vec{p}') \not{\epsilon}_s(\vec{k}) \frac{p' + k + m}{2p'k} A_{ext}(\vec{q}) u_r(\vec{p})$$

$$\mathcal{M}_b = -ie^2 \bar{u}_s(\vec{p}') A_{ext}(\vec{q}) \frac{p - k + m}{-2pk} \not{\epsilon}_s(\vec{k}) u_r(\vec{p})$$

Lo spazio delle fasi è dato da $\frac{V}{(2\pi)^3} d^3\vec{p}' \frac{V}{(2\pi)^3} d^3\vec{k}$ e lo scalo d'urto

$$d\Gamma = 2\pi \delta(E' + \omega - E) (2m)^2 \frac{d^3\vec{p}'}{(2\pi)^3 2E'} \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3 2\omega} \frac{1}{2E|\vec{p}|} |\mathcal{M}|^2 = \frac{m^2}{(2\pi)^5} \frac{|\vec{p}'|}{|\vec{p}|} \frac{1}{2\omega} |\mathcal{M}|^2 d^3\vec{k} d\Omega'$$

$$d^3\vec{p}' = |\vec{p}'|^2 dE' d\Omega'$$

consideriamo il caso in cui il fotone emesso ha un'energia trascurabile ovvero lo cosiddetto *soft* $\omega \rightarrow 0$
 $\omega \rightarrow 0 \Rightarrow |\vec{k}| \rightarrow 0 \Rightarrow \vec{k} \rightarrow 0 \Rightarrow \vec{q} = \vec{p}' - \vec{p}$ e $E' \approx E$ come nel caso di scattering elastico.

Possiamo quindi trascurare il termine k nel propagatore fermionico

$$\frac{\not{p}' + \not{k} + m}{2p'k} \approx \frac{\not{p}' + m}{2p'k}$$

ma $\bar{u}_r(\vec{p}') (\not{p}' - m) = 0$

$\Rightarrow \bar{u}_r(\vec{p}') \not{\epsilon}_s (\not{p}' + m) = \bar{u}_r(\vec{p}') (-\not{p}' \not{\epsilon}_s + p' \epsilon_s + m \not{\epsilon}_s) = \bar{u}_r(\vec{p}') p' \epsilon_s$
 analogamente $(\not{p} - m) \not{\epsilon}_s u_r(\vec{p}) = p \epsilon_s u_r(\vec{p})$

$\bar{u}(\vec{p}') \delta^4(p+k+m) \xrightarrow{k \rightarrow 0} \bar{u}(\vec{p}') 2p'k$
 $(\not{p} - k + m) \delta^4(p) \xrightarrow{k \rightarrow 0} 2p^k u(\vec{p})$
 Non dipende da p^k

$$\Rightarrow \mathcal{M} = -ie^2 \bar{u}(\vec{p}') A_{ext}(\vec{q}) u(\vec{p}) \left(\frac{p' \epsilon}{p'k} - \frac{p \epsilon}{pk} \right) = -e \left(\frac{p' \epsilon}{p'k} - \frac{p \epsilon}{pk} \right) \mathcal{M}_0$$

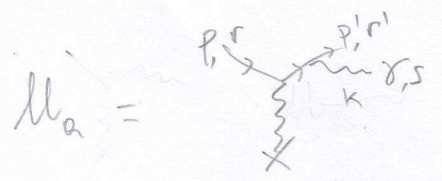
dove $\mathcal{M}_0 = ie \bar{u}_r(\vec{p}') A_{ext}(\vec{q}) u_r(\vec{p})$ è l'ampiezza di Feynman per lo scattering "elastico"

da cui

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega'} \right)_{brem}^{(\omega \rightarrow 0)} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega'} \right)_0 \frac{\alpha}{(2\pi)^2} \left(\frac{p' \epsilon_s}{p'k} - \frac{p \epsilon_s}{pk} \right)^2 \frac{d^3k}{\omega}$$

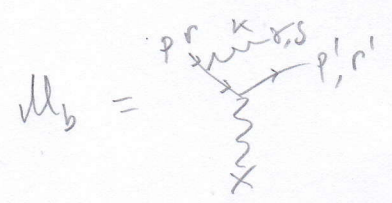
dove $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega'} \right)_0 = \frac{m^2}{(2\pi)^2} |\mathcal{M}_0|^2$

Abbiamo quindi dimostrato che nel "limite soft" l'ampiezza di Feynman per l'emissione di un fotone **FATTORIZZA** (l'accoppiamento $ie\gamma$ Non dipende dallo spin ma solo dall'impulso: approssimazione **CONALE**)



γ soft
 $\omega \rightarrow 0$

$$\mathcal{M}_a = -e \frac{p' \epsilon_s}{p'k} \mathcal{M}_0 = \text{diagram} \cdot (-e) F_{soft}(p', k)$$



γ soft
 $\omega \rightarrow 0$

$$\mathcal{M}_b = e \frac{p \epsilon_s}{pk} \mathcal{M}_0 = \text{diagram} \cdot e F_{soft}(p, k)$$

dove $F_{soft}(p, k) = \frac{p \epsilon}{pk}$ e $|\mathcal{M}|^2 = e^2 (F_{soft}(p', k) - F_{soft}(p, k))^2 |\mathcal{M}_0|^2$

Sommerando sulle polarizzazioni del fotone $\sum_{s=1}^2 |\mathcal{M}_s(\vec{k})|^2 = \mathcal{M}_\alpha(\vec{k}) \mathcal{M}_\beta^*(\vec{k}) \sum_{s=1}^2 \epsilon_\alpha^s(\vec{k}) \epsilon_\beta^{s*}(\vec{k}) = -\mathcal{M}^\alpha(\vec{k}) \mathcal{M}_\alpha^*(\vec{k})$

$$\Rightarrow \left(\frac{d\sigma}{d\Omega'} \right)_{brem} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega'} \right)_0 \frac{(-\alpha)}{(2\pi)^2} \left(\frac{p'}{p'k} - \frac{p}{pk} \right)^2 \frac{d^3k}{\omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega'} \right)_0 \frac{(-\alpha)}{(2\pi)^2} \left(\frac{p'}{p'k} - \frac{p}{pk} \right)^2 \frac{\omega^2 d\omega}{\omega^2 \omega}$$

divergenza logaritmica

Nel limite soffic $\omega \rightarrow 0$ ($k \rightarrow 0$) abbiamo che $p_k \rightarrow 0$ e $p'_k \rightarrow 0$
 infatti nel propagatore fermionico abbiamo

$$\frac{\not{p} + \not{k} + m}{(p+k)^2 - m^2} \rightarrow \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2} \rightarrow \infty$$

l'elettrone nel propagatore ha 4-impulso $p+k \approx p \rightarrow (p+k)^2 \approx p^2 = m^2$
 ovvero ha 4-impulso di un elettrone reale (è sul "mass shell").

La sezione d'urto diverge nel limite soffic! Infrared catastrophe!

La divergenza è dovuta al limite $k \rightarrow 0$ e può essere "regolarizzata" introducendo
 una massa fittizia (non fisica) al fotone (Feynman).
 Se $\lambda \neq 0$ ($k^2 = \lambda^2 \neq 0$)

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega'}\right)_{\text{brem}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega'}\right)_0 \frac{\alpha}{(2\pi)^2} \left(\frac{2p'E}{2p'k + \lambda^2} + \frac{2pE}{-2pk + \lambda^2}\right)^2 \frac{d^3\vec{k}}{\omega_\lambda} \quad \text{con } \omega_\lambda^2 = |\vec{k}|^2 + \lambda^2$$

e riotteniamo la divergenza infrarossa per $\lambda \rightarrow 0$

L'emissione di un fotone soffic è tuttavia indistinguibile nel limite $\omega \rightarrow 0$
 dalla diffusione elastica, sia dal punto di vista sperimentale (risoluzione in
 energia è finita) sia dal punto di vista teorico (relazione di indeterminazione
 fra energia e tempo). Una sezione d'urto "fisica" (misurabile sperimentalmente)
 per la diffusione elastica deve contenere anche lo scattering inelastico con
 emissione di fotoni soffici (con $\omega < \Delta E$ dove ΔE è la risoluzione sperimentale
 in energia dei fotoni):

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega'}\right)_{\text{exp}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega'}\right)_{\text{elastic}} + \left(\frac{d\sigma}{d\Omega'}\right)_{\text{brem}, \Delta E}$$

$$\text{dove } \left(\frac{d\sigma}{d\Omega'}\right)_{\text{brem}, \Delta E} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega'}\right)_0 \frac{(-\alpha)}{(2\pi)^2} \int_{|\vec{k}| < \Delta E} \frac{d^3\vec{k}}{\omega} \left(\frac{2p'}{2p'k + \lambda^2} + \frac{2p}{-2pk + \lambda^2}\right) =$$

$$\text{e } \omega_\lambda < \Delta E \quad = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega'}\right)_0 \alpha \frac{B(\lambda)}{\Delta E}$$

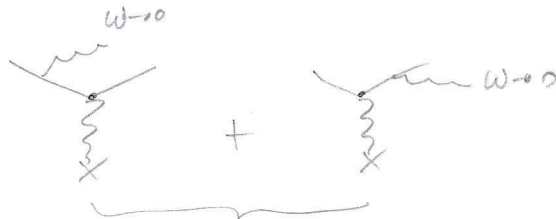
Abbiamo quindi visto che alla sezione d'urto fisica (sperimentale) 109

contribuiscono i (moduli quadri) dei diagrammi di due processi differenti



M_0

$$e^- + N \rightarrow e^- + N$$

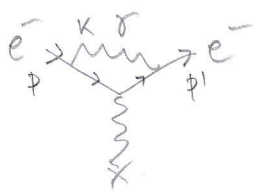


M_{brem}

$$e^- + N \rightarrow e^- + \gamma + N$$

ma $|M_0|^2 \sim e^2 \sim \alpha$ mentre $|M_{brem}|^2 \sim e^4 \sim \alpha^2$

$\Rightarrow M_{brem}$ è una correzione di ordine perturbativo superiore (higher order) per avere un risultato consistente dal punto di vista teorico dobbiamo includere tutte le correzioni di ordine α alla sezione d'urto fisica che includono le correzioni virtuali (1 loop) alla diffusione elastica.



M_v

anche M_v diverge nel limite $k \rightarrow 0$ e può essere regolarizzata con una massa del fotone $\lambda \neq 0$

$$|M_0 + M_v|^2 = |M_0|^2 + M_0 M_v^* + M_0^* M_v + \mathcal{O}(\alpha^3)$$

\swarrow $\downarrow \alpha$ \searrow $\downarrow \alpha^2$

Abbiamo che $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega'}\right)_{elastic} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega'}\right)_0 + \left(\frac{d\sigma}{d\Omega'}\right)_{virt} \stackrel{\omega \rightarrow 0}{=} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega'}\right)_0 (1 - \alpha V(\lambda))$

e $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega'}\right)_{exp} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega'}\right)_{elastic} + \left(\frac{d\sigma}{d\Omega'}\right)_{brem, \Delta E} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega'}\right)_0 \left(1 + \alpha \left(\frac{B(\lambda) - V(\lambda)}{\Delta E}\right) + \mathcal{O}(\alpha^2)\right)$

\searrow segno (-)
 da unitarietà della teoria

Effettuando esplicitamente il calcolo si ottiene:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \left(\frac{B(\lambda) + V(\lambda)}{\Delta E}\right) = \text{finito} \Rightarrow \text{"miracolo" che risolve la catastrofe infrarossa!}$$

\swarrow (dipende da ΔE)

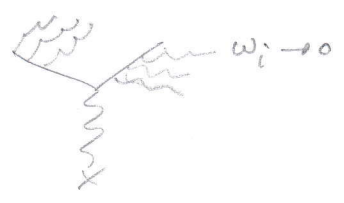
Se si includono "consistentemente" i contributi perturbativi reali e virtuali (correzioni radiative) ad una sezione d'urto "fisica" il risultato del calcolo in QED è infrarosso finito

Il risultato finale dipendera dalla risoluzione sperimentale

con un andamento del tipo $\alpha \int_{\Delta E}^E \frac{dW}{W} \sim \alpha \ln \frac{\Delta E}{E}$

per tanto il risultato perturbativo sara' valido fintanto che $\alpha \ln \frac{\Delta E}{E} \ll 1$.

Le emissioni multiple di fotoni soffici



danno luogo a divergenze infrarosse ad ordini superiori che vengono cancellate da contributi divergenti di segno opposto dovuti alle correzioni virtuali.

La cancellazione delle divergenze infrarosse in QED a tutti gli ordini perturbativi e' garantita dal teorema di Bloch-Nordsieck.

Nel limite in cui $\alpha \ln \frac{\Delta E}{E} \gtrsim 1$ i contributi di ordine superiore non sono trascurabili e devono essere inclusi al risultato perturbativo

per avere un risultato perturbativo affidabile tramite il formalismo di RISOMMAZIONE perturbativa. Si puo' mostrare che i contributi dominanti ad ordine superiore possono essere inclusi tramite l'"esposizione" del risultato al primo ordine

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega'}\right)_{exp}^{resummed} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega'}\right) e^{\alpha(B(\lambda) - V(\lambda))}$$

dove $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega'}\right)_{elastic} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega'}\right)_0 e^{-\alpha V(\lambda)} \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} 0$ (perche' $V(\lambda) \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} +\infty$)

La probabilita' di diffusione elastica a tutti gli ordini e' zero!

Non esiste diffusione "esattamente" elastica: lo scattering di un elettrone (particella carica) e' sempre accompagnato da radiazione di

fotoni soffici \Rightarrow una carica accelerata deve irradiazione.

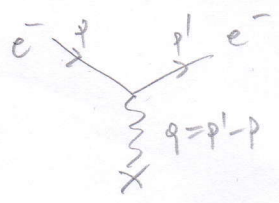
Questi risultati valgono in generale le divergenze infrarosse in QED si cancellano sempre nel calcolo di osservabili "fisiche" (misurabili sperimentalmente).

Abbiamo visto come nel calcolo della sezione d'urto di Bremsstrahlung compaiono delle divergenze "infrarosse" (dovute all'emissione di fotoni con impulsi molto piccoli $k \rightarrow 0$) che si cancellano trattando consistentemente analoghe emissioni di fotoni virtuali.

Consideriamo ora in maniera sistematica i contributi perturbativi di ordine superiore ("higher orders") nella costante di accoppiamento $\alpha = \frac{e^2}{4\pi} \approx \frac{1}{137}$. Incontreremo contributi con integrali di loop divergenti ultravioletti (nel limite di impulsi molto grandi, $k \rightarrow \infty$). Queste divergenze (non fisiche) possono essere rimosse consistentemente attraverso tre passi tramite la procedura di rinormalizzazione:

- 1) Regolazione dei contributi divergenti;
- 2) sottrazione dei contributi regolati;
- 3) ridefinizione dei parametri della lagrangiana "bare" in termini di parametri "rinormalizzati".

Partiamo considerando le correzioni radiative al processo di scattering in un campo esterno. All'ordine più basso (lowest order) abbiamo



$$M_0 = i e_0 \bar{u}(p') A_{ext}(p' - p) u(p)$$

dove indichiamo con e_0 la carica elettrica "bare" (che compare nella lagrangiana della teoria). I contributi di ordine superiore si ottengono dall'espansione della

$$S = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(ie_0)^m}{m!} \int \dots \int d^4x_1 \dots d^4x_n T \{ N(\bar{\psi}(A_{ext} + A)\psi)_{x_1} \dots N(\bar{\psi}(A_{ext} + A)\psi)_{x_n} \} =$$

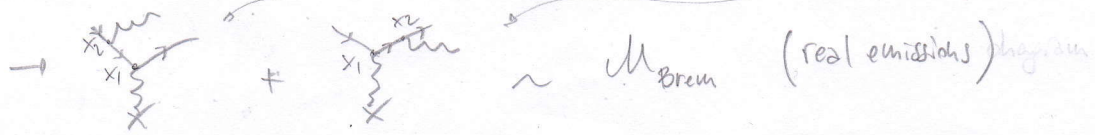
$$= 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(ie_0)^m}{(m-1)!} \int \dots \int d^4x_1 \dots d^4x_n T \{ N(\bar{\psi} A_{ext} \psi)_{x_1} N(\bar{\psi} A \psi)_{x_2} \dots N(\bar{\psi} A \psi)_{x_n} \} =$$

la sorgente A_{ext} può essere in ogni punto x_1, \dots, x_n

$$= 1 + S^{(1)} + S^{(2)} + \dots + S^{(n)} + \dots$$

dove $S^{(1)} = i e_0 \int d^4x_1 N(\bar{\psi} A_{ext} \psi)_{x_1} \rightarrow$ $\sim M_0$ (lowest-order)

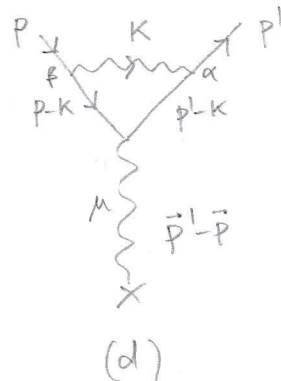
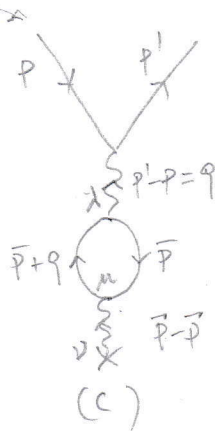
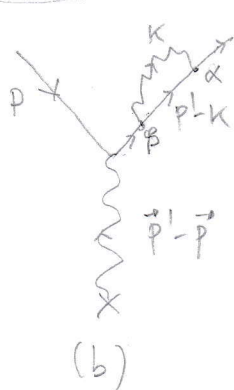
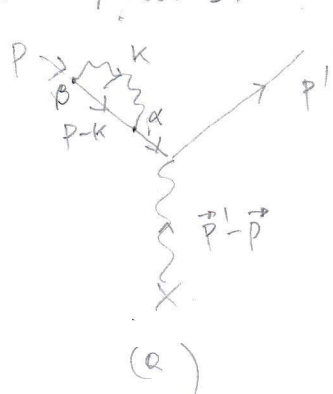
$$S^{(2)} = -e_0^2 \int d^4x_1 \int d^4x_2 \left\{ N(\bar{\psi} A_{ext} \psi)_{x_1} (\bar{\psi} A \psi)_{x_2} + N(\bar{\psi} A_{ext} \psi)_{x_1} (\bar{\psi} A \psi)_{x_2} \right\}$$



$$S^{(3)} = -\frac{ie_0^3}{2} \int d^4x_1 \int d^4x_2 \int d^4x_3 \left\{ N \left(\underbrace{(\bar{\Psi} A_{\text{ext}} \Psi)_{x_1}}_1 \underbrace{(\bar{\Psi} A \Psi)_{x_2}}_2 \underbrace{(\bar{\Psi} A \Psi)_{x_3}}_3 \right) + N \left(\underbrace{(\bar{\Psi} A_{\text{ext}} \Psi)_{x_1}}_1 \underbrace{(\bar{\Psi} A \Psi)_{x_2}}_2 \underbrace{(\bar{\Psi} A \Psi)_{x_3}}_3 \right) \right. \\ \left. + N \left(\underbrace{(\bar{\Psi} A_{\text{ext}} \Psi)_{x_1}}_1 \underbrace{(\bar{\Psi} A \Psi)_{x_2}}_2 \underbrace{(\bar{\Psi} A \Psi)_{x_3}}_3 \right) + N \left(\underbrace{(\bar{\Psi} A_{\text{ext}} \Psi)_{x_1}}_1 \underbrace{(\bar{\Psi} A \Psi)_{x_2}}_2 \underbrace{(\bar{\Psi} A \Psi)_{x_3}}_3 \right) + (\text{real emission terms}) \right.$$

$$+ N \left(\underbrace{(\bar{\Psi} A_{\text{ext}} \Psi)_{x_1}}_1 \underbrace{(\bar{\Psi} A \Psi)_{x_2}}_2 \underbrace{(\bar{\Psi} A \Psi)_{x_3}}_3 \right) + N \left(\underbrace{(\bar{\Psi} A_{\text{ext}} \Psi)_{x_1}}_1 \underbrace{(\bar{\Psi} A \Psi)_{x_2}}_2 \underbrace{(\bar{\Psi} A \Psi)_{x_3}}_3 \right) + (\text{real emission terms})$$

Virtual loop terms:



$$M_a^{(2)} = ie_0 \bar{u}(\vec{p}') A_{\text{ext}}(\vec{p}' - \vec{p}) i S_F(p) ie_0^2 \Sigma(p) u(\vec{p})$$

$$M_b^{(2)} = ie_0 \bar{u}(\vec{p}') ie_0^2 \Sigma(p') i S_F(p') A_{\text{ext}}(\vec{p}' - \vec{p}) u(\vec{p})$$

$$M_c^{(2)} = ie_0 \bar{u}(\vec{p}') \gamma^\lambda u(\vec{p}) i D_{F\lambda\mu}(q) ie_0^2 \Pi^{\mu\nu}(q) A_{\text{ext}\nu}(\vec{p}' - \vec{p})$$

$$M_d^{(2)} = ie_0 \bar{u}(\vec{p}') e_0^2 \Lambda^\mu(p', p) u(\vec{p}) A_{\text{ext}\mu}(\vec{p}' - \vec{p})$$

diagram

$$ie_0^2 \Sigma(p) = \frac{(ie_0)^2}{(2\pi)^4} \int d^4k i D_{F\alpha\beta}(k) \gamma^\alpha i S_F(p-k) \gamma^\beta$$

closed loop of fermions

$$ie_0^2 \Pi^{\mu\nu}(q) = \frac{(ie_0)^2}{(2\pi)^4} (-1) \text{Tr} \int d^4\bar{p} \gamma^\mu i S_F(\bar{p}+q) \gamma^\nu i S_F(\bar{p})$$

$$e_0^2 \Lambda^\mu(p', p) = \frac{(ie_0)^2}{(2\pi)^4} \int d^4k \gamma^\alpha i S_F(p'-k) \gamma^\mu i S_F(p-k) \gamma^\alpha i D_{F\alpha\beta}(k)$$

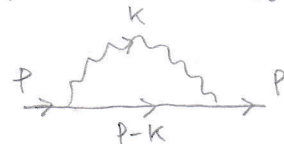
questi tre integrali di loop sono divergenti nella regione ultravioletta (UV) $k \rightarrow \infty$ o $\bar{p} \rightarrow \infty$.

$$\Sigma(p) \stackrel{k \rightarrow \infty}{\sim} \int \frac{d^4k}{k^3} \sim \int dk \sim k; \quad \Lambda^\mu(p', p) \stackrel{k \rightarrow \infty}{\sim} \int \frac{d^4k}{k^4} \sim \int \frac{dk}{k} \sim \ln k$$

$$\Pi^{\mu\nu}(q) \stackrel{\bar{p} \rightarrow \infty}{\sim} \int \frac{d^4\bar{p}}{\bar{p}^2} \sim \int \bar{p} d\bar{p} \sim \bar{p}^2$$

per considerazioni dimensionali (power counting) che non tengono conto di eventuali cancellazioni (coefficienti nulli).

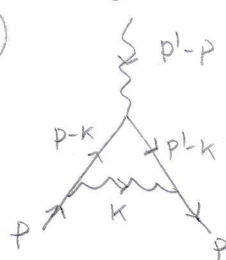
fermion self-energy



photon self-energy

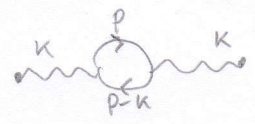


vertex



Questi sono gli unici contributi divergenti che compaiono nel calcolo delle correzioni radiative ad un loop. La "rinormalizzazione" di questi 3 contributi è sufficiente per effettuare il calcolo delle correzioni radiative di qualsiasi processo.

Self energia del fotone



$$i e_0^2 \Pi^{\mu\nu}(k) = \frac{-e_0^2}{(2\pi)^4} \int d^4p \frac{\text{Tr}[\gamma^\mu (\not{p} + \not{k} + m_0) \gamma^\nu (\not{p} + m_0)]}{((p+k)^2 - m_0^2 + i\epsilon)(p^2 - m_0^2 + i\epsilon)}$$

per invarianza di Lorentz

$$\Pi^{\mu\nu}(k) = -g^{\mu\nu} A(k^2) + k^\mu k^\nu B(k^2)$$

per conservazione della corrente $\partial_\mu j^\mu(x) = 0 \Rightarrow k_\mu j^\mu(k) = 0$
 con $j^\mu(x) = (\bar{\psi} \gamma^\mu \psi)_x \Rightarrow \int d^4x \int d^4y j_1^\mu(x) \Pi_{\mu\nu}(x-y) j_2^\nu(y) = 0$
 $\Rightarrow \int d^4k j_1^\mu(-k) \Pi_{\mu\nu}(k) j_2^\nu(k) = 0 \Rightarrow k^\mu k^\nu B(k^2) j_{\mu\nu}(k) = 0$

Step I: Regolarizzazione

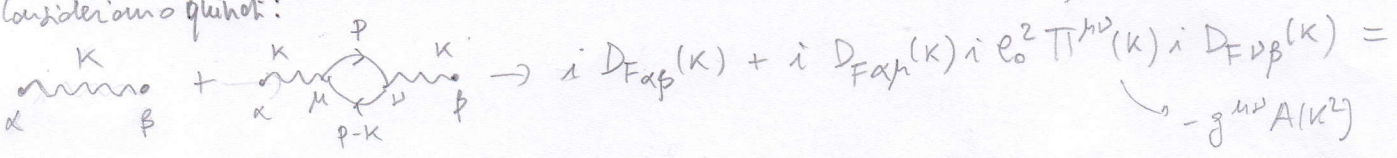
Introduciamo una regolatore in modo da rendere l'integrale convergenti. Ad esempio introduciamo una scala non fisica di energia Λ_{UV} come cutoff ultravioletto nell'integrale

$$\int \frac{d^4p}{p^4} \rightarrow \int \frac{d^4p}{p^4} f(p^2, \Lambda_{UV}^2) \text{ dove } f(p^2, \Lambda_{UV}^2) = \begin{cases} 0 & \text{per } |p^2| \gg \Lambda_{UV}^2 \\ 1 & \text{per } |p^2| \ll \Lambda_{UV}^2 \end{cases}$$

regolarizza (rende finito) l'integrale pertanto $\Pi^{\mu\nu}(k) \rightarrow \Pi^{\mu\nu}(k, \Lambda_{UV}) < \infty$

Step II: Sottrazione

Il propagatore "bare" e la correzione $\Pi^{\mu\nu}$ non hanno senso fisico separatamente. Consideriamo quindi:



$$= \frac{-i g_{\alpha\beta}}{k^2 + i\epsilon} \left(1 - \frac{e_0^2 A(k^2)}{k^2 + i\epsilon} \right) \equiv \frac{-i g_{\alpha\beta}}{k^2 + i\epsilon + e_0^2 A(k^2)} + \mathcal{O}(e_0^4)$$

che rappresenta il propagatore del fotone interagente (e non "bare") al secondo ordine perturbativo rappresentato quindi il propagatore "fisico" del fotone ed equivale al propagatore di un bosone vettore con massa non nulla. Ma sappiamo che il fotone (fisico) ha massa nulla (interazione a lunga distanza) e il propagatore ha un polo per $k^2 = 0$, quindi imponiamo la condizione $A(k^2=0) \equiv A(0) = 0$ e sviluppando per piccoli k^2

$$A(k^2) = \frac{dA(k^2)}{d(k^2)} \Big|_{k^2=0} k^2 + \Pi_c(k^2) \cdot k^2 = k^2 A'(0) + k^2 \Pi_c(k^2)$$

↳ derivate superiori

e $\Pi_c(k^2) \xrightarrow{k^2 \rightarrow 0} \mathcal{O}(k^2)$ ($\Pi_c(0) = 0$)

ovvero $A'(0) \equiv A'(k^2=0) = \frac{dA(k^2)}{d(k^2)} \Big|_{k^2=0}$ pertanto $\Pi^{\mu\nu}(k) = -g^{\mu\nu} k^2 (A'(0) + \Pi_c(k^2))$ e risulta $A'(0)$ divergente e $\Pi_c(k^2)$ finito per $\Lambda_{UV} \rightarrow \infty$

$$-i g_{\alpha\beta} \frac{1 - e_0^2 A(k^2)}{k^2 + i\epsilon} = -i g_{\alpha\beta} \frac{1 - e_0^2 A'(0)}{k^2 + i\epsilon} + \frac{i g_{\alpha\beta}}{k^2 + i\epsilon} e_0^4 \Pi_c(k^2)$$

o) Step III: Ridefinizione

Definiamo la carica "rinormalizzata" come la quantità

$$e^2 = e_0^2 (1 - e_0^2 A'(0)) \quad \text{carica rinormalizzata al second'ordine}$$

e nel caso più generale di rinormalizzazione a tutti gli ordini: $e^2 = Z_3 e_0^2$

$$e \equiv \sqrt{Z_3} e_0 = e_0 (1 - \frac{1}{2} e_0^2 A'(0) + \mathcal{O}(e_0^4))$$

pertanto

$$\underbrace{-\frac{i g_{\alpha\beta}}{k^2+i\epsilon} e_0^2}_{\text{quantità "bare"}} \rightarrow -\frac{i g_{\alpha\beta}}{k^2+i\epsilon} e_0^2 \left(\frac{1 - e_0^2 A(k^2)}{k^2+i\epsilon} \right) = -\frac{i g_{\alpha\beta}}{k^2+i\epsilon} \left(e^2 + e^2 \Pi_C(k^2) + \mathcal{O}(e^6) \right)$$

$e_0^2(1 - e_0^2 A'(0))$
 $e_0^2 = e^2 + \mathcal{O}(e^4)$

Abbiamo che $\Pi_C(k^2) < \infty$ è finito e la divergenza ultravioletta è stata riassorbita nella quantità "fisica" e^2 tramite la costante (non fisica)

$Z_3 (A'(0))$. e_0^2 e Z_3 sono quantità non fisiche (non finite) e la quantità fisica misurabile (finita) è la carica rinormalizzata e^2 .

Si può dimostrare che $k^2 A'(0) = \frac{1}{12\pi^2} \ln \frac{\Lambda_{UV}^2}{m^2}$ divergente per $\Lambda_{UV} \rightarrow \infty$

mentre $\Pi_C(k^2) = -\frac{1}{4\pi^2 m^2} \left(\frac{1}{15} - \frac{1}{40} \frac{q^2}{m^2} + \dots \right)$ finita e indipendente da Λ_{UV} .

Riassumendo abbiamo mostrato che l'inclusione delle correzioni radiative al II ordine per il propagatore del fotone porta a:

$\alpha \text{ --- } \text{---} \beta = e_0 \text{ --- } e_0 + e_0 \text{ --- } \text{---} e_0 + \dots$ higher order loops

regularization (1) $= -i e_0^2 \frac{g_{\alpha\beta}}{k^2+i\epsilon} \left(1 - \frac{e_0^2 A(k^2)}{k^2+i\epsilon} \right) =$ UV cutoff regularized

subtraction (2) $= -i e_0^2 \frac{g_{\alpha\beta}}{k^2+i\epsilon} \left(1 - e_0^2 A'(0) \right) + i e_0^2 \frac{g_{\alpha\beta}}{k^2+i\epsilon} \Pi_C(k^2)$ UV divergent / UV finite

redefinition (3) $= -i e^2 \frac{g_{\alpha\beta}}{k^2+i\epsilon} + i e^2 \frac{g_{\alpha\beta}}{k^2+i\epsilon} \Pi_C(k^2)$ finite result UV independent

renormalized charge $e^2 = e_0^2 \left(1 - \frac{e_0^2}{12\pi^2} \ln \frac{\Lambda_{UV}^2}{m^2} \right)$ (but renormalization scheme/condition dependent, $A(0)=0$)

$e_0^2 = e^2 + \mathcal{O}(e^4)$

R
E
N
O
R
M
A
L
I
Z
A
T
I
O
N

Self-energia dell'elettrone $p \rightarrow \overset{k}{\curvearrowright} \rightarrow p$

Consideriamo ora la correzione della self energia nel propagatore fermionico

$$i e_0^2 \Sigma(p) = \frac{-e_0^2}{(2\pi)^4} \int d^4 k \frac{-i \not{p} \not{k} \not{p}}{k^2 + i\epsilon} i \frac{\not{p} - \not{k} + m_0}{(p-k)^2 - m_0^2 + i\epsilon} \gamma_5 = \frac{e_0^2}{(2\pi)^4} \int d^4 k \frac{2\not{p} - \not{k} - 4m_0}{(p-k)^2 - m_0^2 + i\epsilon}$$

questo integrale diverge nell'UV ($k \rightarrow \infty$) ma anche nell'IR ($k \rightarrow 0$). Le divergenze IR sappiamo che si cancellano considerando le emissioni di fotoni soffici e quindi possiamo ignorarle (si può regolarizzare introducendo una massa fittizia al fotone $\lambda \neq 0$).

Procediamo come nel caso della self-energia del fotone. Sappiamo che i termini $\rightarrow e \curvearrowright$ non hanno significato fisico separatamente, consideriamo quindi (regolarizzato con ΛUV)

$$p \rightarrow \quad + \quad p \rightarrow \overset{k}{\curvearrowright} \rightarrow p \quad \rightarrow \quad i S_F(p) + i S_F(p) i e_0^2 \Sigma(p) i S_F(p) =$$

$$= \frac{i}{\not{p} - m_0 + i\epsilon} + \frac{i}{\not{p} - m_0 + i\epsilon} i e_0^2 \Sigma(p) \frac{i}{\not{p} - m_0 + i\epsilon} = \frac{i}{\not{p} - m_0 + e_0^2 \Sigma(p) + i\epsilon} + \mathcal{O}(e_0^4) \quad (\text{scritto usando})$$

e' identita' $\frac{1}{A-B} = \frac{1}{A} + \frac{1}{A} B \frac{1}{A} + \frac{1}{A} B \frac{1}{A} B \frac{1}{A} + \dots$ infatti moltiplicando a sx per $A-B$

$$1 = (A-B) \frac{1}{A-B} = 1 - \underbrace{B \cdot \frac{1}{A}}_0 + \underbrace{A \cdot \frac{1}{A} B \cdot \frac{1}{A}}_0 - \underbrace{B \cdot \frac{1}{A} B \cdot \frac{1}{A}}_0 + \underbrace{A \cdot \frac{1}{A} B \cdot \frac{1}{A} B \cdot \frac{1}{A}}_0 + 0 + 0 + \dots$$

che rappresenta il propagatore dell'elettrone interagente (e non "bare") al secondo ordine perturbativo ed equivale al propagatore di un elettrone con massa m per la $m = m_0 + \delta m$ dove $\delta m = -e_0^2 \Sigma(p)$. m rappresenta la massa rinormalizzata che è legata alla massa fisica (misurabile) dell'elettrone mentre m_0 rappresenta la massa "bare" dell'elettrone non interagente e che non è misurabile (è un parametro matematico della lagrangiana).

Per invarianza di Lorentz abbiamo che $\Sigma(p)$ è proporzionale a \not{p} e/o $\not{p}\not{p} = p^2$ ($\Sigma(p)$ è uno scalare di Lorentz ma una matrice 4x4 nello spazio spinoriale).

Espandiamo $\Sigma(p)$ in potenze di $(\not{p} - m)$ \rightarrow derivate superiori in $(\not{p} - m)$

$$\Sigma(p) = A + (\not{p} - m) B + (\not{p} - m) \Sigma_c(p) \quad \text{con } A \text{ e } B \text{ indipendenti da } p \text{ ma UV divergenti}$$

$$\text{con } A = \Sigma(p) \Big|_{\not{p}=m} \quad \text{e} \quad \Sigma_c(p) \stackrel{\not{p}=m}{=} \mathcal{O}(\not{p} - m) \quad \rightarrow \text{UV finito}$$

(Sottrazione)

il propagatore interagente è quindi dato da

$$\frac{i}{\not{p} - m_0 + e_0^2 \Sigma(p) + i\epsilon} = \frac{i}{\not{p} - m_0 + e_0^2 A + (\not{p} - m_1)(e_0^2(B + \Sigma_c(p))) + i\epsilon} =$$

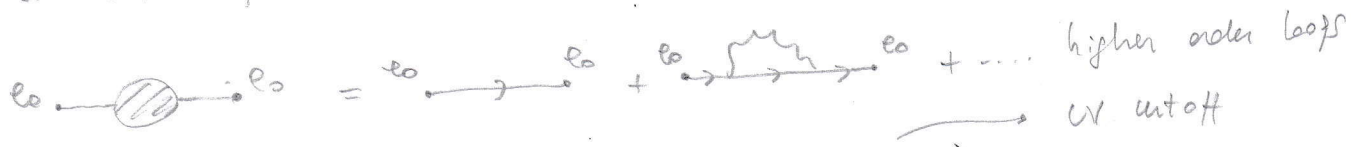
richiediamo che abbia un polo per $\not{p} = m$
 \Downarrow
 $m_0 - e_0^2 A = m \Rightarrow \delta m = -e_0^2 A$

$$= \frac{i}{(\not{p} - m)(1 + e_0^2(B + \Sigma_c(p))) + i\epsilon} = \frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon} (1 - e_0^2(B + \Sigma_c(p)) + \mathcal{O}(e_0^4)) \quad (\text{ridefinizione})$$

Fino ad ora abbiamo considerato la carica elettrica "bare". Il coefficiente B è anch'esso divergente e contribuisce alla rinormalizzazione della carica

$$e^2 = e_0^2(1 - e_0^2 B) + \mathcal{O}(e_0^6) = Z_2 e_0^2 \Rightarrow e = \sqrt{Z_2} e_0 \quad (\text{ridefinizione})$$

ottendiamo infine



(regul.) = $\frac{i e_0^2}{\not{p} - m_0 + i\epsilon} + e_0^2 \frac{i}{\not{p} - m_0 + i\epsilon} i e_0^2 \Sigma(p) \frac{i}{\not{p} - m_0 + i\epsilon}$

(sub.) = $\frac{i e_0^2}{(\not{p} - m_0 - e_0^2 A)(1 + e_0^2(B + \Sigma_c(p))) + i\epsilon} + \mathcal{O}(e_0^6)$

(redef.) = $\frac{i e^2}{\not{p} - m + i\epsilon} (1 - e^2 \Sigma_c(p^2)) + \mathcal{O}(e^6)$ finite result UV indep.

con $m = m_0 + \delta m = m_0 - e_0^2 A$, $e^2 = e_0^2(1 - e_0^2 B)$

si può dimostrare che $A = -\frac{3m}{16\pi^2} \ln \frac{\Lambda_{UV}}{m^2}$

anche B e Z_2 divergono logaritmicamente mentre $\Sigma_c(p)$ è finito

Rinormalizzazione delle gambe esterne

Consideriamo ora i diagrammi di self-energia del fotone e dell'elettrone nel caso di gambe esterne e non di propagatori.

Linea esterna fermionica

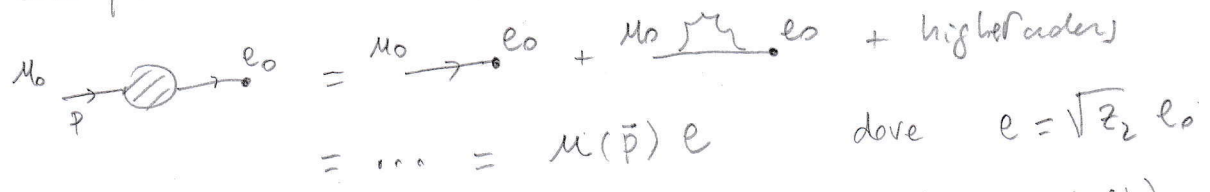


$$\begin{aligned}
 u_0(\vec{p}) &+ \frac{i}{\not{p}-m_0+i\epsilon} i e_0^2 \Sigma(p) u_0(\vec{p}) = \left(1 + \frac{i}{\not{p}-m_0+i\epsilon} i e_0^2 \Sigma(p) \frac{i(-i)}{\not{p}-m_0+i\epsilon} \right) u_0(\vec{p}) = \\
 &= \left[1 + \frac{i}{\not{p}-m_0+i\epsilon} \left(i e_0^2 (B + \Sigma_c(p)) (\not{p}-m) + O(e_0^4) \right) \right] u_0(\vec{p}) = \\
 &= \left(1 - \frac{e_0^2}{\not{p}-m_0+i\epsilon} (\not{p}-m) B \right) u_0(\vec{p}) = (1 - e_0^2 B) u_0(\vec{p})
 \end{aligned}$$

$\Sigma_c(p) = O(\not{p}-m)$ abbiamo quindi che il termine finito $\Sigma_c(p)$ non contribuisce (a differenza della rinormalizzazione delle linee interne).

$e (\not{p}-m_0) u_0(\vec{p}) = 0$
 $\Rightarrow \Sigma_c(p) u_0(\vec{p}) = 0$

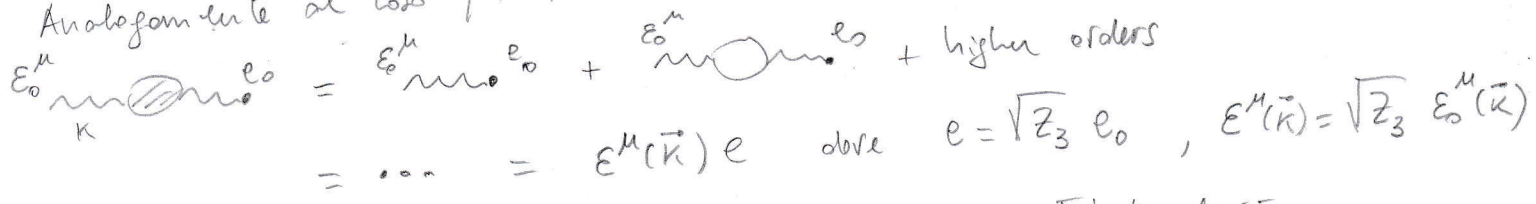
Possiamo quindi procedere alla rinormalizzazione della funzione d'onda come nel caso della carica elettrica nel caso del propagatore ricordando però che abbiamo da una parte un vertice e dall'altra un comp. esterno.



per tanto $u(\vec{p}) = \sqrt{Z_2} u_0(\vec{p}) = \left(1 - \frac{1}{2} e_0^2 B + O(e_0^4) \right) u_0(\vec{p})$
 e analogamente $\bar{u}(\vec{p}) = \sqrt{Z_2} \bar{u}_0(\vec{p})$, $v(\vec{p}) = \sqrt{Z_2} v_0(\vec{p})$, $\bar{v}(\vec{p}) = \sqrt{Z_2} \bar{v}_0(\vec{p})$

Linea esterna fotonica

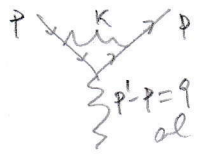
Analogamente al caso fermionico



poiché $\Pi_c \sim O(k^2) \Rightarrow \Sigma_0^M(\vec{k}) \Pi_c = 0$ non ci sono contributi finiti.

la rinormalizzazione dei campi esterni: $u(\vec{p}), v(\vec{p}), \dots, \Sigma^M(\vec{k})$ Non produce correzioni perturbative finite.

Correzione di vertice



Consideriamo infine la connessione

$$e_0^2 \Lambda^\mu(p', p) = \frac{-ie_0^2}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 k}{k^2 + i\epsilon} \gamma^\alpha \frac{1}{\not{p}' - \not{k} - m + i\epsilon} \gamma^\mu \frac{1}{\not{k} - m + i\epsilon} \gamma_\alpha$$

e diverge nella regione UV ($k \rightarrow \infty$) logaritmicamente $\int \frac{d^4 k}{k^4}$ e nella regione IR ($k \rightarrow 0$) sempre logaritmicamente $\int \frac{d^4 k}{k^4}$. La divergenza IR può essere regolarizzata con una massa fittizia del fotone $\lambda \neq 0$.

Scriviamo $\frac{1}{\not{p}' - \not{k} - m + i\epsilon} \gamma^\mu \frac{1}{\not{k} - m + i\epsilon} = \frac{\not{p}' - \not{k} + m}{(p' - k)^2 - m^2 + i\epsilon} \gamma^\mu \frac{\not{k} + m}{(p - k)^2 - m^2 + i\epsilon}$

nel limite UV si possono trascurare p e p' rispetto a k e otteniamo

$$\Lambda^\mu(p', p) \underset{k \rightarrow \infty}{\sim} \frac{-i}{(2\pi)^4} \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\alpha \int \frac{d^4 k}{k^2 + i\epsilon} \frac{k_\beta k_\nu}{(k^2 + i\epsilon)^2} = L \gamma^\mu \quad \text{dove}$$

per invarianza di Lorentz e simmetria $\beta\nu \sim C \eta_{\beta\nu}$ costante divergente (regolarizzata da λ_{UV})

possiamo quindi scrivere

$$\Lambda^\mu(p', p) = L \gamma^\mu + \Lambda_c^\mu(p', p) \quad \text{dove } \Lambda_c^\mu(p', p) \text{ è finito e la sua esatta}$$


definizione dipende da una condizione di rinormalizzazione (è sempre possibile sottrarre una parte finita a Λ_c che dipende da γ^μ e inglobarla in L) che imponiamo essere

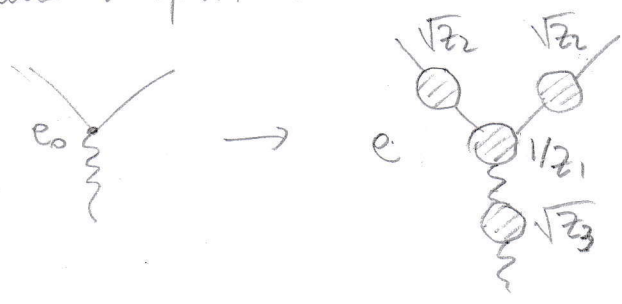
$$\lim_{p \rightarrow 0} \bar{u}(p') \Lambda_c^\mu(p', p) u(p) = 0 \quad \text{con } p^2 = m^2 \Rightarrow \bar{u}(p) \Lambda^\mu(p, p) u(p) = L \bar{u}(p) \gamma^\mu u(p)$$

la parte divergente della connessione di vertice viene quindi riassorbita nella rinormalizzazione della carica elettrica. Abbiamo quindi Non c'è dipendenza da p^μ

$$\text{diagram} = \text{diagram} + \text{diagram} + \text{higher orders} = ie_0 \gamma^\mu + ie_0^2 \Lambda^\mu(p', p) + O(e_0^4) = ie_0 (\gamma^\mu (1 + e_0^2 L) + \Lambda_c^\mu(p', p)) + O(e_0^5)$$

dove $e = e_0 (1 + e_0^2 L) + O(e_0^5) \equiv \frac{e_0}{Z_1}$ costante di rinormalizzazione

Combinando i tre contributi alla rinormalizzazione della carica elettrica otteniamo che ad ogni vertice  il collaudo delle correzioni di ordine superiore porta a delle divergenze UV che possono essere riassorbite nella ridefinizione della carica nuda e_0 nella carica rinormalizzata e



dove $e = e_0 \sqrt{z_3} z_2 / z_1$

questa ridefinizione, insieme alla rinormalizzazione della massa $m = m_0 + \delta m$ e dei campi esterni, permettono di eliminare le divergenze UV dalla teoria a tutti gli ordini perturbativi.

la relazione fra e ed e_0 può essere semplificata utilizzando la seguente identità

$$\frac{\partial \Sigma(p)}{\partial p_\mu} = \Lambda^\mu(p, p) \quad \text{identità di Ward}$$

abbiamo che

$$\Sigma(p) = A + (\not{p} - m) B + (\not{p} - m) \Sigma_c(p)$$

derivando e moltiplicando per $u(p)$

$$\bar{u}(\vec{p}) \frac{\partial \Sigma(p)}{\partial p_\mu} u(\vec{p}) = B \bar{u}(\vec{p}) \gamma^\mu u(\vec{p})$$

dove $\Sigma_c(p) u(\vec{p}) = 0$ perché $\Sigma_c(p)$ è proporz. a $\not{p} - m$

$$\text{mentre } \bar{u}(\vec{p}) \Lambda^\mu(p, p) u(\vec{p}) = L \bar{u}(\vec{p}) \gamma^\mu u(\vec{p}) + \bar{u}(\vec{p}) \Lambda_c^\mu(p, p) u(\vec{p})$$

da cui per l'id. di Ward $B = L \Rightarrow z_1 = z_2$ (pol. del vuoto)

e quindi $e = e_0 \sqrt{z_3} z_2 / z_1 = e_0 \sqrt{z_3}$ Solo il propagatore del fotone γ contribuisce alla rinormalizzazione della carica. È un risultato molto importante

perché garantisce che le correzioni del propagatore e del vertice dei fermioni che dipendono dalla massa del fermione si cancellano fra di loro garantendo l'universalità della carica elettrica.

Dimostriamo l'identità di Ward ad ordine α . Partiamo da

$$Z(P) = \frac{i}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k}{k^2+i\epsilon} \delta^\alpha \frac{1}{\not{p}-\not{k}-m+i\epsilon} \delta_\alpha \quad (\text{regolarizzata nell'UV e nell'IR})$$

e l'identità

$$0 = \frac{\partial}{\partial p_\mu} \left((\not{p}-\not{k}-m+i\epsilon) \frac{1}{\not{p}-\not{k}-m+i\epsilon} \right) = \delta^\mu \frac{1}{\not{p}-\not{k}-m+i\epsilon} + (\not{p}-\not{k}-m+i\epsilon) \frac{\partial}{\partial p_\mu} \frac{1}{\not{p}-\not{k}-m+i\epsilon}$$

e moltiplichiamola a sx per $\frac{1}{\not{p}-\not{k}-m+i\epsilon}$ ottenendo

$$\frac{\partial}{\partial p_\mu} \frac{1}{\not{p}-\not{k}-m+i\epsilon} = - \frac{1}{\not{p}-\not{k}-m+i\epsilon} \delta^\mu \frac{1}{\not{p}-\not{k}-m+i\epsilon}$$

da cui

$$\frac{\partial Z(P)}{\partial p_\mu} = \frac{-i}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k}{k^2+i\epsilon} \delta^\alpha \frac{1}{\not{p}-\not{k}-m+i\epsilon} \delta^\mu \frac{1}{\not{p}-\not{k}-m+i\epsilon} \delta_\alpha = \Lambda^\mu(P, P)$$

che è l'id. di Ward. L'id. di Ward vale a tutti gli ordini perturbativi.

Riassumendo la procedura di rinormalizzazione (schema "on shell") consiste

$$e_0 \rightarrow e, \quad m_0 \rightarrow m$$

$$-\frac{i g^{\alpha\beta}}{k^2+i\epsilon} \rightarrow -\frac{i g^{\alpha\beta}}{k^2+i\epsilon} (1 - e^2 \Pi_c(k^2)) + O(e^4) \quad \text{photon propagator}$$

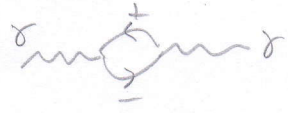
$$\frac{i}{\not{p}-m+i\epsilon} \rightarrow \frac{i}{\not{p}-m+i\epsilon} (1 - e^2 \Sigma_c(p)) + O(e^4) \quad \text{fermion propagator}$$

$$i e_0 \gamma^\mu \rightarrow i e (\gamma^\mu + e^2 \Lambda_c^\mu(p, p)) + O(e^5) \quad \text{vertex correction}$$

dove e, m sono la carica e la massa fisurabili (fisiche) dell'elettrone e le funzioni Π_c, Σ_c e Λ_c sono finite (il regolatore ultravioletto $\Lambda_{UV} \rightarrow \infty$).

Significato fisico della rinormalizzazione della carica

Abbiamo visto che la rinormalizzazione della carica e (o di $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$) è associata alla polarizzazione del vuoto attraverso la modifica del propagatore fotonic bare



$$-i e_0^2 \frac{\partial \phi^2}{k^2 + i\epsilon} \rightarrow -i e^2 \frac{\partial \phi^2}{k^2 + i\epsilon} (1 - e_0^2 A'(0)) + i e_0^2 \frac{\partial \phi^2}{k^2 + i\epsilon} \Pi_c(k^2) =$$

$$= -i e^2 \frac{\partial \phi^2}{k^2 + i\epsilon} (1 + \Pi_c(k^2))$$

UV divergent \rightarrow finite
 dove $A'(0) = \frac{1}{12\pi^2} \ln \frac{\Lambda_{UV}^2}{m^2}$

$$e^2 = e_0^2 \left(1 - \frac{e_0^2}{12\pi} \ln \frac{\Lambda_{UV}^2}{m^2} \right) \quad e^2 \text{ finito}$$

La ridefinizione della carica elettrica con l'assorbimento della divergenza UV lascia l'ambiguità di assorbire o meno anche dei termini finiti, è sempre possibile riscrivere $\ln \frac{\Lambda_{UV}^2}{m^2} = \ln \frac{\Lambda_{UV}^2}{\mu_R^2} + \ln \frac{\mu_R^2}{m^2}$ dove μ_R è una scala (finita) di energia e includere il termine $\ln \frac{\mu_R^2}{m^2}$ nella definizione di Π_c e $\ln \frac{\Lambda_{UV}^2}{m^2}$ in e^2 . μ_R è detta scala di rinormalizzazione e la separazione fra termini finiti da riassorbire in e dà luogo ad uno schema di rinormalizzazione. La carica rinormalizzata acquista quindi una dipendenza da μ_R : $e_R^2 = e_0^2 \left(1 - \frac{e_0^2}{12\pi^2} \ln \frac{\Lambda_{UV}^2}{\mu_R^2} \right)$

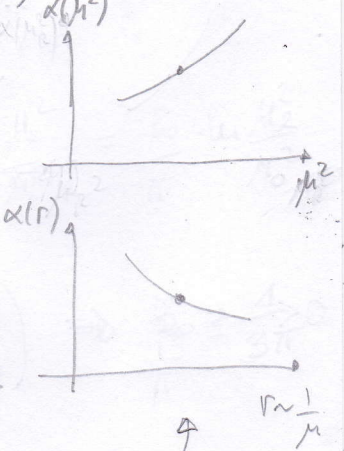
e $\alpha(\mu_R^2) = \frac{e_R^2}{4\pi}$. La dipendenza di α da μ_R è legata alla funzione beta

$$\frac{d \ln \alpha(\mu^2)}{d \ln \mu^2} = \beta(\alpha(\mu^2)) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \alpha^{n+1} = \beta_0 \alpha + \dots$$

$\left(\frac{\alpha \ln \mu^2}{3\pi} \sim 1 \Rightarrow \mu = \Lambda_L \sim m e^{\frac{3\pi}{2\alpha}} \sim 10^{278} \text{ GeV} (\dots) \right)$
 (Landau ghost)

Ma $\alpha(\mu^2) = \alpha_0 \left(1 - \frac{\alpha_0}{3\pi} \ln \frac{\Lambda_{UV}^2}{\mu^2} \right) = \alpha \left(1 - \frac{\alpha \ln \frac{\mu^2}{\mu_0^2}}{3\pi} \right) \Rightarrow \beta_0 = \frac{1}{3\pi} > 0$

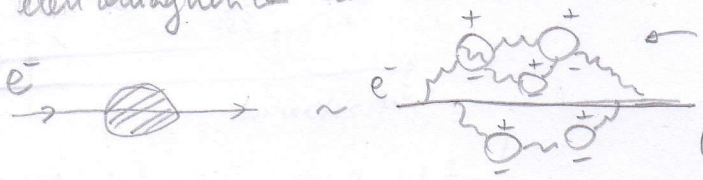
renormalization scheme independent
 $\beta_0 = \frac{1}{3\pi} > 0$



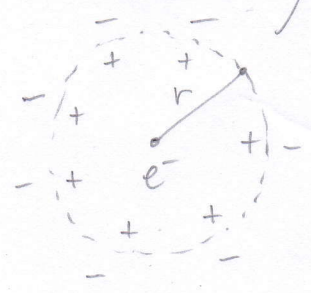
Sperimentalmente si misura $\alpha(m_e^2) \approx \frac{1}{137} < \alpha(M_Z^2) \approx \frac{1}{129}$

costante di accoppiamento "running" (mobile).

Significato fisico, α è una misura dell'intensità dell'interazione elettromagnetica ad una data scala.



fluttuazioni quantistiche in coppie e^+e^- (vacuum polarization)



"Screening effect" of electric charge

L'unico metodo di regolarizzazione delle divergenze UV noto che preservi l'invarianza di Lorentz e di gauge (rispettando le identità di Ward) è la regolarizzazione dimensionale DR (t Hooft & Veltman, Bollini & Giambagi, Ciuta & Montaldi, 1972). La DR ha permesso di dimostrare la rinormalizzabilità (a tutti gli ordini) del Modello Standard (QED, weak interactions, QCD).

La DR consiste nel modificare artificialmente il numero di dimensioni dello spazio tempo da 4 a $D = 4 - \eta$ dove η è un parametro reale $0 < \eta \ll 1$, tramite continue analitica.

Ad esempio consideriamo l'integrale divergente nell'UV

$$\alpha_0 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 + S + i\epsilon)^2} \xrightarrow{DR} \mu_0^{4-D} \alpha_0 \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{(k^2 + S + i\epsilon)^2}$$

dove μ_0 è detta scala di regolarizzazione, ha le dimensioni di un'energia, ed è stata introdotta affinché $\mu_0^{4-D} d^D k$ abbia le dimensioni di $[E^4]$ e α_0 resti un parametro adimensionale anche in D dimensioni.

Nel limite UV ($k \rightarrow \infty$)

$$\mu_0^{4-D} \frac{\alpha_0}{(2\pi)^D} \int \frac{d^{4-\eta} k}{k^4} \xrightarrow{\eta > 0} \mu_0^{4-D} \frac{\alpha_0}{(2\pi)^D} \frac{1}{\eta} \quad \text{finito per } \eta > 0$$

è quindi possibile definire un coupling rinormalizzato tramite la sostituzione

$$\mu_0^{4-D} \alpha_0 = \mu^{4-D} \cdot \alpha(\mu^2) \cdot Z(\alpha(\mu^2), \eta)$$

↙
↘
↘

scala di regolarizzazione scala di rinormalizzazione

renormalization factor che assorbe le divergenze UV

$$Z(\alpha(\mu^2), \eta) = 1 + \alpha(\mu^2) \beta_0 \left(\frac{1}{\eta} + C_1 \right) + \sum_n (\alpha(\mu^2))^n \left(\frac{1}{\eta^k} + \frac{1}{\eta^{k-1}} + \dots + \frac{1}{\eta} + C_n \right)$$

$k \leq n$

C_1, C_2, \dots, C_n costanti che specificano lo schema di regolarizzazione.

Nello schema di sottrazione minima modificata (MS) $C_1 = -\delta_E + \ln 4\pi$

$\delta_E = 0.577$ costante di Eulero

Effettuiamo il calcolo dell'integrale

$$I(S, D, m) = \int \frac{d^D k}{(k^2 - S + i\epsilon)^m} = i \pi^{D/2} (-1)^m \frac{\Gamma(m - \frac{D}{2})}{\Gamma(m)} \frac{1}{S^{m - D/2}}$$

dove $k = \{k_0, k_1, \dots, k_{D-1}\}$ e $k^2 = k_0^2 - k_1^2 - \dots - k_{D-1}^2$ e $S > 0$

La funzione gamma di Eulero è definita come

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty dy y^{x-1} e^{-y}, \quad \Gamma(x) = (x-1) \Gamma(x-1), \quad \Gamma(m) = (m-1)!$$

ed è analitica su tutto il piano complesso eccetto i punti $x=0, -1, -2, \dots$

ad esempio sviluppando in serie di Taylor nell'intorno di $x=1$ e $x=0$ otteniamo

$$\Gamma(1+\eta) = 1 + \gamma_E \eta + \mathcal{O}(\eta^2) \quad ; \quad \Gamma(\eta) = \frac{1}{\eta} + \gamma_E + \mathcal{O}(\eta^2)$$

Ruotiamo adesso il cammino di integrazione in senso antiorario ponendo

$k_0 = i k_D$ e $dk_0 = i dk_D$ (rotazione di Wick) che ci permette di porre $\epsilon=0$

perché le singolarità $k_0 = \pm \omega = \pm \sqrt{S + k_1^2 + \dots + k_{D-1}^2}$ non intersecano il nuovo cammino di integrazione



e otteniamo

$$I(S, D, m) = i (-1)^m \int \frac{d^D p}{(p^2 + S)^m} \quad \text{dove } p = \{k_1, k_2, \dots, k_{D-1}, k_D\} \text{ è un vettore}$$

con metrica euclidea $p^2 = k_1^2 + k_2^2 + \dots + k_{D-1}^2 + k_D^2 = -k^2$. Integrando le variabili

angolari e ponendo $x = \frac{p^2}{S}$, $p dp = \frac{S}{2} dx$

$$I(S, D, m) = i (-1)^m \int \frac{p^{D-1} dp d\Omega_D}{(p^2 + S)^m} = i (-1)^m \frac{\Omega_D}{2 S^{m - D/2}} \int_0^\infty \frac{x^{\frac{D-2}{2}} dx}{(1+x)^m}$$

che è convergente per $x \rightarrow \infty$ se $m > \frac{D}{2}$. L'angolo solido in D dimensioni si ottiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-k^2} d^D k = \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-k^2} dk \right]^D = \pi^{D/2} = \Omega_D \int_0^\infty e^{-k^2} k^{D-1} dk = \frac{\Omega_D}{2} \int_0^\infty e^{-k^2} (k^2)^{\frac{D-2}{2}} dk^2 = \frac{\Omega_D}{2} \Gamma\left(\frac{D}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \Omega_D = \frac{2 \pi^{D/2}}{\Gamma(D/2)}. \quad \text{Usando infine } B(z, w) = \int_0^\infty \frac{x^{z-1} dx}{(1+x)^{z+w}} = \frac{\Gamma(z) \Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}$$

$$\Rightarrow I(S, D, m) = i (-1)^m \frac{2 \pi^{D/2}}{\Gamma(D/2)} \frac{1}{2 S^{m - D/2}} \frac{\Gamma(D/2) \Gamma(m - D/2)}{\Gamma(m)} = i \pi^{D/2} \frac{\Gamma(m - \frac{D}{2})}{\Gamma(m)} \frac{1}{S^{m - D/2}}$$

Il momento magnetico anomalo

Dalla hamiltoniana di Pauli (o dal limite non relativistico della teoria di Dirac) sappiamo che l'interazione fra un elettrone (spin $\frac{1}{2}$) e il campo elettromagnetico è descritto da

$$H = \frac{1}{2m} (\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A})^2 - \frac{e\hbar}{2mc} \vec{\sigma} \cdot \vec{B} = \frac{1}{2m} (\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A})^2 + \vec{\mu} \cdot \vec{B}$$

dove $\vec{\mu} = -\frac{e\hbar}{2mc} \vec{\sigma} = g \cdot \frac{(-e\hbar)}{2mc} \frac{\vec{\sigma}}{2}$ è il momento di dipolo magnetico

$\vec{S} = \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma}$ è l'operatore di spin e g è detto rapporto giro magnetico ed esprime il rapporto fra momento magnetico in unità di magnetone di Bohr $\mu_B = \frac{e\hbar}{2mc}$ e il momento angolare (spin) corrispondente $\vec{\mu} = -g \mu_B \frac{\vec{S}}{\hbar}$

e risulta $g=2$. La prima misura sperimentale (1947) evidenzia un momento magnetico anomalo dell'elettrone $a_e = \frac{g-2}{2} = (1.19 \pm 0.05) \times 10^{-3} \neq 0$. Calcoliamo la correzione perturbativa al momento magnetico dell'elettrone considerando lo scattering in un campo esterno



Sappiamo che dopo la procedura di rinormalizzazione le correzioni alle gambe esterne non danno contributo. Otteniamo quindi che l'ampiezza dell'ordine e^3 è data

$$M = ie \bar{u}(\vec{p}') \gamma^\mu u(\vec{p}) A_{ext,\mu}(\vec{q}) + ie \bar{u}(\vec{p}') (-e^2 \Pi_c(q^2) + e^2 \Lambda_c^\mu(p', p)) u(\vec{p}) A_{ext,\mu}(\vec{q})$$

La funzione $\Pi_c(q^2)$ è uno scalare di Lorentz e non modifica l'accoppiamento fra lo spin e il campo magnetico. Il calcolo esplicito in DR (Mandel & Shaw Sec. 10.4)

da $e^2 \Pi_c(q^2) = -\frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dz z(1-z) \ln\left(1 - \frac{q^2 z(1-z)}{m^2}\right) \stackrel{q^2 \rightarrow 0}{=} \frac{\alpha}{15\pi} \frac{q^2}{m^2}$ (esercizio)

Siano quindi interessati al termine di correzione di vertice $\bar{u}(\vec{p}') \Lambda^\mu(p', p) u(\vec{p})$

la cui forma generale è data da

$$\bar{u}(\vec{p}') \Lambda^\mu(p', p) u(\vec{p}) = \bar{u}(\vec{p}') \left(A_1(q^2) \gamma^\mu + A_2(q^2) p^\mu + A_3(q^2) p'^\mu + A_4(q^2) \sigma^{\mu\nu} p_\nu + A_5(q^2) \sigma^{\mu\nu} p'_\nu \right) u(\vec{p})$$

$$= \bar{u}(\vec{p}') \left(A_1(q^2) \gamma^\mu + A_2(q^2) (p+p')^\mu + A_4(q^2) \sigma^{\mu\nu} q_\nu \right) u(\vec{p})$$

ovvero abbiamo usato che

$A_2(q^2) = A_3(q^2)$ e $A_4(q^2) = -A_5(q^2)$ per la conservazione della corrente

$$q_\mu \bar{u}(\vec{p}') \Lambda^\mu(p', p) u(\vec{p}) = 0$$

usando inoltre l'identità di Gordon (esercizio)

$$2m \bar{u}(\vec{p}') \gamma^\mu u(\vec{p}) = \bar{u}(\vec{p}') \left((p+p')^\mu + i \sigma^{\mu\nu} q_\nu \right) u(\vec{p}) \quad \text{otteniamo}$$

$$\bar{u}(\vec{p}') \Lambda^\mu(p', p) u(\vec{p}) = \bar{u}(\vec{p}') \left(F_1(q^2) \gamma^\mu + F_2(q^2) \frac{1}{2m} i \sigma^{\mu\nu} q_\nu \right) u(\vec{p})$$

Sappiamo però che $\Lambda^\mu(p', p) = L \gamma^\mu + \Lambda_c^\mu(p', p)$
 dove L è divergente \rightarrow finito

ma nel limite $q \rightarrow 0$ $\bar{u}(p) \Lambda_c^\mu(p, p) u(p) = 0 \Rightarrow \bar{u} L \gamma^\mu u = \bar{u} F_1(0) \gamma^\mu u$

$\Rightarrow F_1(0) = L$ e sviluppando attorno a $q=0$

$$\bar{u}(\vec{p}') \Lambda^\mu(p', p) u(\vec{p}) = \bar{u}(\vec{p}') \left(L \gamma^\mu + F_2(0) \frac{1}{2m} i \sigma^{\mu\nu} q_\nu \right) u(\vec{p}) + \mathcal{O}(q^2)$$

il termine L è divergente e si cancella con la correzione dovuta alle gambe esterne per l'identità di Ward. Abbiamo quindi che

$$i e_0 \bar{u}(\vec{p}') \gamma^\mu u(\vec{p}) \rightarrow i e \bar{u}(\vec{p}') \left(\gamma^\mu + \frac{e^2}{2m} F_2(0) i \sigma^{\mu\nu} q_\nu \right) u(\vec{p}) + \mathcal{O}(q^2)$$

$$= \frac{i e}{2m} \bar{u}(\vec{p}') \left((p^\mu + p'^\mu) + 2(1 + e^2 F_2(0)) i \frac{\sigma^{\mu\nu}}{2} q_\nu \right) u(\vec{p}) + \mathcal{O}(q^2)$$

Gordon identity

spin independent

spin dependent

la correzione al fattore gromagnetico è quindi $g = 2(1 + e^2 F_2(0)) = 2 + \mathcal{O}(\alpha)$

calcoliamo quindi $F_2(0)$ omettendo i termini proporzionali a γ^μ (che si cancellano) e i termini proporzionali a q^2 (che si annullano nel limite $q^2 \rightarrow 0$).

In questo modo non è necessario utilizzare esplicitamente regolarizzazioni ultraviolette.

Abbiamo quindi che

$$\bar{u}(\vec{p}') \Lambda^\mu(p', p) u(p) = \bar{u}(\vec{p}') \left(\frac{-i}{(2\pi)^4} \int d^4k \frac{N^\mu(k, p, p')}{(k^2 + i\epsilon)((p-k)^2 - m^2 + i\epsilon)((p-k)^2 - m^2 + i\epsilon)} \right) u(\vec{p})$$

dove $N^\mu(k, p, p') = \gamma^\alpha (\not{p}' - \not{k} + m) \gamma^\mu (\not{p} - \not{k} + m) \gamma_\alpha$

e $q^2 = (p' - p)^2 = 2m^2 - 2pp'$, $(p' + p)^2 = 2m^2 + 2pp' = 4m^2 - q^2$

$$Q = \frac{p+p'}{2}, \quad p' = Q + \frac{q}{2}, \quad p = Q - \frac{q}{2} \Rightarrow Q^2 = m^2 - \frac{q^2}{4} = m^2 + \mathcal{O}(q^2)$$

$$e \left[(p'-k)^2 - m^2 + i\epsilon \right] \left[(p-k)^2 - m^2 + i\epsilon \right] = (k^2 - 2p'k + i\epsilon)(k^2 - 2pk + i\epsilon) = \\ = (k^2 - 2Qk + i\epsilon - qk)(k^2 - 2Qk + i\epsilon + qk) = (k^2 - 2Qk + i\epsilon)^2 - (qk)^2 = (k^2 - 2Qk + i\epsilon)^2 + \mathcal{O}(q^2)$$

$$\text{da cui } \bar{u}(\vec{p}') \Lambda^\mu(p', p) u(\vec{p}) = \frac{-i}{(2\pi)^4} \int d^4k \frac{\bar{u}(\vec{p}') N^\mu(k, p, p') u(\vec{p})}{(k^2 + i\epsilon)(k^2 - 2Qk + i\epsilon)^2} + \mathcal{O}(q^2)$$

Utilizziamo la parametrizzazione di Feynman che sfrutta l'identità:

$$\frac{1}{ab} = \frac{1}{b-a} \int_a^b \frac{dt}{t^2} \left(= \frac{1}{b-a} \left(\frac{-1}{b} + \frac{1}{a} \right) = \frac{1}{b-a} \frac{a-b}{ab} \right)$$

definiamo il parametro di Feynman z tale che $t = b + (a-b)z$, $dt = (a-b)dz$

$$\Rightarrow \frac{1}{ab} = \int_0^1 \frac{dz}{(b+(a-b)z)^2} \quad \text{e derivando } -\frac{\partial}{\partial a} \frac{1}{ab} = \frac{1}{a^2b} = 2 \int_0^1 dz \frac{z}{(b+(a-b)z)^3}$$

$$\text{ponendo } b = k^2 + i\epsilon \quad \text{e } a = (k^2 - 2Qk + i\epsilon) \Rightarrow a-b = -2Qk$$

$$e \quad (b+(a-b)z)^3 = (k^2 - 2zQk + i\epsilon)^3 = ((k-zQ)^2 - z^2Q^2 + i\epsilon)^3 = ((k-zQ)^2 - z^2m^2 + i\epsilon)^3 + \mathcal{O}(q^2)$$

$$\bar{u}(\vec{p}') \Lambda^\mu(p', p) u(\vec{p}) = \frac{-i}{(2\pi)^4} \int_0^1 dz z^2 \int d^4k \frac{\bar{u}(\vec{p}') N^\mu(k, p, p') u(\vec{p})}{((k-zQ)^2 - z^2m^2 + i\epsilon)^3} + \mathcal{O}(q^2) =$$

$$= \frac{-i}{(2\pi)^4} \int_0^1 dz z^2 \int d^4t \frac{\bar{u}(\vec{p}') N^\mu(t+zQ, p, p') u(\vec{p})}{(t^2 - z^2m^2 + i\epsilon)^3} + \mathcal{O}(q^2) =$$

$$t = k - zQ \quad = \frac{-i}{(2\pi)^4} \int_0^1 dz z^2 \int d^4t \frac{\bar{u}(\vec{p}') N^\mu(z(p+p')/2, p, p') u(\vec{p})}{(t^2 - z^2m^2 + i\epsilon)^3} + \mathcal{O}(q^2) + \text{termini prop. a } \delta^\mu =$$

N^μ contiene termini t^0 , lineari in t (contributo nullo) e termini t^2 (proporzionali a δ^μ) \Rightarrow possiamo porre $t=0$ in N^μ e $zQ = z \frac{p+p'}{2}$

$$= \frac{-i}{16\pi^2 m^2} \int_0^1 \frac{dz}{z} \bar{u}(\vec{p}') N^\mu(z(p+p')/2, p, p') u(\vec{p}) + \mathcal{O}(q^2) + (\propto \delta^\mu)$$

$$\text{dove } \int \frac{d^4t}{(t^2 - z^2m^2 + i\epsilon)^3} = \frac{-i\pi^2 \Gamma(1)}{\Gamma(3)} \frac{1}{z^2 m^2} = -i \frac{\pi^2}{2z^2 m^2}$$

$$\bar{u}(\vec{p}') \not{N}^\mu \left(z \frac{p+p'}{2}, p, p' \right) u(\vec{p}) = \bar{u}(\vec{p}') \delta^\alpha \left(\not{p}' - z \frac{(\not{p} + \not{p}')}{2} + m \right) \delta^\mu \left(\not{p} - z \frac{(\not{p} + \not{p}')}{2} + m \right) \delta_\alpha^\mu u(\vec{p})$$

$$= \bar{u}(\vec{p}') \left(-2 \left(\not{p} - z \frac{(\not{p} + \not{p}')}{2} \right) \delta^\mu \left(\not{p}' - z \frac{(\not{p} + \not{p}')}{2} \right) - \underbrace{2 m z \gamma^\mu + 4 (p+p)^\mu m (1-z)}_{\propto \gamma^\mu} \right) u(\vec{p})$$

contraction identities

$$= \bar{u}(\vec{p}') \left(-2 \left(m(1-z) - \not{p} \left(1 - \frac{z}{2} \right) \right) \delta^\mu \left(m(1-z) + \not{p} \left(1 - \frac{z}{2} \right) \right) + 4 m(1-z) (p+p)^\mu \right) u(\vec{p})$$

$$= \bar{u}(\vec{p}') \left(4 m(1-z) \left(1 - \frac{z}{2} \right) \frac{1}{2} [\not{p}, \delta^\mu] + 4 m(1-z) (p+p)^\mu \right) u(\vec{p}) + \mathcal{O}(q^2) + (\propto \gamma^\mu)$$

Dirac equation

$$\bar{u}(\vec{p}') \not{p} = \bar{u}(\vec{p}') (\not{p}' - \not{p}) = \bar{u}(\vec{p}') (m - \not{p})$$

$$\not{p}' u(\vec{p}) = (\not{p} + \not{p}) u(\vec{p}) = (m + \not{p}) u(\vec{p})$$

$$\bar{u}(\vec{p}') \not{p}' = \bar{u}(\vec{p}') m$$

$$\not{p} u(\vec{p}) = m u(\vec{p})$$

dove abbiamo trascurato i termini in q^2 e proporzionali a γ^μ

$$[\not{p}, \delta^\mu] = g_{\nu\mu} [\delta^\nu, \delta^\mu] = 2i\sigma^{\mu\nu} g_\nu$$

$$= \bar{u}(\vec{p}') \left(4 m(1-z) \left(1 - \frac{z}{2} \right) i\sigma^{\mu\nu} g_\nu - 4 m(1-z) i\sigma^{\mu\nu} g_\nu \right) u(\vec{p}) + \mathcal{O}(q^2) + (\propto \gamma^\mu) =$$

$$\stackrel{b}{=} -2 m z (1-z) \bar{u}(\vec{p}') i\sigma^{\mu\nu} g_\nu u(\vec{p}) + \mathcal{O}(q^2) + (\propto \gamma^\mu)$$

Gordon identity

possiamo quindi integrare in z ottenendo



$$\int_0^1 \frac{dz}{z} z(1-z) = \frac{1}{2} \quad \text{e infine}$$

$$\bar{u}(\vec{p}') e^2 \not{A}^\mu(p', p) u(\vec{p}) = \frac{e^2}{16\pi^2 m^2} (\propto m) \bar{u}(\vec{p}') i\sigma^{\mu\nu} g_\nu u(\vec{p}) + \mathcal{O}(q^2) + (\propto \gamma^\mu)$$

$$= e^2 F_2(0) \frac{1}{2m} \bar{u}(\vec{p}') i\sigma^{\mu\nu} g_\nu u(\vec{p}) + \mathcal{O}(q^2) + (\propto \gamma^\mu)$$

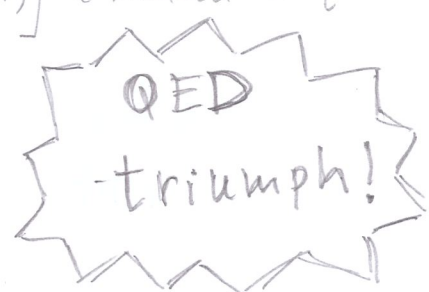
$$g = 2 \left(1 + e^2 F_2(0) \right) = 2 \left(1 + \frac{e^2}{8\pi^2} \right) = 2 \left(1 + \frac{\alpha}{2\pi} \right) \quad [\text{Schwinger (1948)}]$$

$$\Rightarrow a_e^{\text{th}} = \frac{g-2}{2} = \frac{\alpha}{2\pi} = 1.16 \times 10^{-3} \quad a_e^{\text{exp}} = (1.19 \pm 0.05) \times 10^{-3} \quad (\text{agreement!})$$

Ogg' esistono calcoli analitici ad ordine: α^2 [Peterman, Sommerfeld (1957)]  + α^3 [Laporta, Remiddi (1996)]  + ... ; α^4 [Laporta (2017)] e numeri α^5 [Kinoshita et al. 2015]

$$a_e^{\text{th}} = 0.001159652181643(764)$$

$$a_e^{\text{exp}} = 0.00115965218073(28)$$



the end