ESERCIZI TEORIA DELLE INTERAZIONI FONDAMENTALI I

1) Considerare la densità lagrangiana $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\partial_\alpha \phi \partial^\alpha \phi - \mu^2 \phi^2\right)$ con ϕ campo scalare reale. Ricavare la densità hamiltoniana $\mathcal{H}$ e da essa le equazioni del moto di Heisenberg.

2) Dimostrare che $(\Box + \mu^2)\Delta_F(x) = -\delta^{(4)}(x)$ dove $\Delta_F(x)$ è il propagatore scalare.

3) Sia ϕ un campo scalare complesso. Si consideri la trasformazione (coniugazione di carica) $\phi(x) \to C\phi(x)C^{-1} = \eta_c \phi^+(x)$, dove $CC^+ = \mathbb{1}$, $C|0\rangle = |0\rangle$ e η_c fattore di fase. Dimostrare che $\mathcal{L} = \partial_\alpha \phi^+ \partial^\alpha \phi - \mu^2 \phi^+ \phi$ è invariante per coniugazione di carica mentre la corrente di carica $j^\alpha(x) \to -j^\alpha(x)$.
Assumendo $\eta_c = 1$, calcolare $C\,a(\vec{k})\,C^{-1}$, $C\,b(\vec{k})\,C^{-1}$, $C|a,\vec{k}\rangle$, $C|b,\vec{k}\rangle$ con $a(\vec{k}), b(\vec{k})$ operatori di distruzione e $|a,\vec{k}\rangle$ ($|b,\vec{k}\rangle$) stato di singola particella di tipo a (b) con impulso $\vec{k}$.

4) Sia ϕ un campo scalare hermitiano. Considerare la trasformazione di parità $\phi(\vec{x},t) \to P\phi(\vec{x},t)P^{-1} = \eta_P\, \phi(-\vec{x},t)$ con $PP^+ = \mathbb{1}$, $P|0\rangle = |0\rangle$ e $\eta_P = \pm 1$.
Mostrare che $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\partial_\alpha \phi \partial^\alpha \phi - \mu^2 \phi^2\right) \to \mathcal{L}$ e $P|\vec{k}_1, \vec{k}_2, \dots \vec{k}_n\rangle = \eta_P^n |-\vec{k}_1, \dots, -\vec{k}_n\rangle$

5) Dimostrare che $(i\not\partial - m)S_F(x) = -\delta^{(4)}(x)$ dove $S_F(x)$ è il propagatore fermionico.

6) Si consideri la trasformazione fase chirale $\psi(x) \to e^{i\alpha\gamma_5}\psi(x)$, $\psi(x)$ spinore di Dirac, α parametro reale. Dimostrare che $\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\not\partial - m)\psi$ è invariante per trasf. di fase chirale se $m = 0$ con corrente conservata $j^\alpha_A(x) = \bar{\psi}\gamma^\alpha\gamma_5\psi$

7) Mostrare che le ampiezze di Feynman $\mathcal{M}_a$ e $\mathcal{M}_b$ per la diffusione Compton NON sono singolarmente invarianti di gauge ma $\mathcal{M}_a + \mathcal{M}_b$ è invariante di gauge.

8) Si consideri il valore di aspettazione nel vuoto $\langle 0|T(j^\mu(x_1)\, j^\nu(x_2) \dots j^\lambda(x_n))|0\rangle = 0$ se il numero di correnti è dispari (teorema di Furry). (Utilizzare le proprietà di trasformazione sotto coniugazione di carica di j^μ e $|0\rangle$.

9) Dimostrare che $\dfrac{d^3\vec{p}}{2E_{\vec{p}}} = d^4p\, \delta(p^2 - m^2)\, \Theta(p^{(0)})$

10) Dimostrare (identità di Gordon): $2m\,\bar{u}(\vec{p}')\gamma^\mu u(\vec{p}) = \bar{u}(\vec{p}')\left((p'+p)^\mu + i\sigma^{\mu\nu}(p'_\nu - p_\nu)\right)u(\vec{p})$
dove $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] = -i(g^{\mu\nu} - \gamma^\mu\gamma^\nu) = -i(\gamma^\nu\gamma^\mu - g^{\mu\nu})$.