

# Esame di Fisica Quantistica Modulo 1

*Non sono ammessi libri o appunti.*

Proff. G. Ferrera, M. Zaro

21 Settembre 2023

Una particella è contenuta in una cavità, divisa in due parti, destra e sinistra, da una sottile membrana. Gli stati in cui la particella è con assoluta certezza a destra o a sinistra sono indicati con  $|R\rangle$ ,  $|L\rangle$ .

1. Dato uno stato generico  $|\psi\rangle$ , siano  $P_R$ ,  $P_L$  le probabilità che a seguito di una misura una particella venga rilevata nella porzione destra o sinistra di una scatola. Scrivere la forma più generale dello stato  $|\psi\rangle$  in termini degli stati  $|R\rangle$ ,  $|L\rangle$  (corrispondenti alla particella localizzata a destra o a sinistra), e di  $P_R$  e  $P_L$ , discutendo da quanti e quali parametri dipende, e se tali parametri sono misurabili o meno.

2. La particella può passare, per effetto tunnel, da una parte all'altra. Tale dinamica è descritta dall'hamiltoniana

$$H = \Delta (|R\rangle\langle L| + |L\rangle\langle R|) , \quad (1)$$

dove  $\Delta$  è un parametro reale. Determinare gli autostati e gli autovalori di energia.

3. È dato un operatore  $\mathcal{M}$ , detto di mirroring, la cui azione è definita nel seguente modo:

$$\mathcal{M}|R\rangle = |L\rangle , \quad \mathcal{M}|L\rangle = |R\rangle . \quad (2)$$

Discutere se  $\mathcal{M}$  è hermitiano e/o unitario.

4. Determinare il commutatore  $[\mathcal{M}, H]$ , interpretandone il risultato.
5. Definito l'operatore  $O$ , associato ad un'osservabile che identifica se la particella si trova a destra o a sinistra, determinare i commutatori  $[O, H]$  e  $[O, \mathcal{M}]$ .
6. Al tempo iniziale ( $t = 0$ ), il sistema è preparato nello stato  $|L\rangle$ . Determinare lo stato del sistema a un tempo  $t$  generico, calcolando la probabilità che la particella *non* venga rilevata a sinistra e il valore medio dell'energia del sistema.
7. Determinare, tramite calcolo esplicito, la forma dell'operatore di evoluzione temporale per il sistema dato, verificandone l'unitarietà.
8. Calcolare, utilizzando sia la rappresentazione di Heisenberg che la rappresentazione di Schrödinger, il valore medio di  $O$  nello stato  $|L\rangle$ , confrontando i due risultati.
9. Al posto dell'hamiltoniana  $H$  in Eq. 1, si consideri

$$\tilde{H} = \Delta (|R\rangle\langle L|) . \quad (3)$$

Calcolare anche in questo caso l'operatore di evoluzione temporale. Si tratta di un operatore unitario? Giustificare la risposta.

10. Copie del sistema vengono preparate nello stato  $|\psi\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}|L\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}|R\rangle$ . Scrivere la matrice densità del sistema e utilizzarla per calcolare il valore medio nello stato dato dell'hamiltoniana.
11. Considerare invece il caso in cui il sistema viene preparato  $2/3$  delle volte nello stato  $|L\rangle$  e  $1/3$  nello stato  $|R\rangle$ . Anche in questo caso, scrivere la matrice densità del sistema e utilizzarla per calcolare il valore medio nello stato dato dell'hamiltoniana.