Esame di Fisica Quantistica I

21 luglio 2023

Si consideri una particella di massa m in una cavità come modello per una particella instabile. La particella è vincolata in una dimensione sulla semiretta $x \geq 0$ (la regione $x < 0$ è inaccessibile) e soggetta al potenziale

$$V(x) = \lambda\, \delta(x - L) \qquad L > 0\,.$$

1) Scrivere l'hamiltoniana del sistema.

2) Tramite le sostituzioni $y = \pi x/L$, $H' = 2mL^2 H/(\hbar^2\pi^2)$, $\lambda' = 2mL\lambda/(\hbar^2\pi)$ scrivere l'equazione di Schroedinger nelle nuove variabili.

3) Quali sono le soluzioni dell'equazione di Schroedinger determinata per $y < \pi$ e $y > \pi$?

4) Imporre le condizioni per cui le soluzioni trovate siano fisicamente accettabili al seconda del valore dell'energia.

5) Determinare le condizioni che deve soddisfare una funzione d'onda in $y = 0$ e $y = \pi$ e risolverle.

6) Considerare il caso in cui l'energia E è positiva. Discutere la normalizzazione delle autofunzioni, calcolare lo spettro di autovalori e autofunzioni.

7) Considerare il caso in cui l'energia E è negativa. Discutere la normalizzazione delle autofunzioni. Per quali valori di λ' esistono soluzioni fisicamente accettabili?

8) Discutere i casi limite in cui $\lambda \to 0$ e $\lambda \to +\infty$.

9) Sia $|\psi, t = 0\rangle$ lo stato della particella al tempo $t = 0$ e $|\psi, t\rangle = \hat{S}(t)|\psi, t = 0\rangle$ lo stato al tempo t. Scrivere l'operatore $\hat{S}(t)$ in termini dell'operatore hamiltoniano e verificare che soddisfa l'equazione di evoluzione.

10) Si consideri ora il caso $\lambda > 0$ e finito. e una particella descritta al tempo $t = 0$ dalla seguente funzione d'onda

$$\psi(y, t = 0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(y)\theta(\pi - y)\,.$$

Data la decomposizione integrale della funzione d'onda $\psi(y, t = 0)$ nella base delle autofunzioni $\phi_k(y)$ determinate al punto 6)

$$\psi(y, t = 0) = \int_0^\infty \tilde{\psi}(k)\phi_k(y)dk\,,$$

determinare esplicitamente i coefficienti $\tilde{\psi}(k)$ e quindi la funzione d'onda al tempo $t > 0$. È possibile, e perché, che la particella nello stato iniziale *decada*, ovvero che venga rilevata in un punto $y > \pi$ per $t > 0$?