
Teoria delle

Interazioni

Fondamentali 2

- QCD -

APPUNTI REDATI DA PIETRO GLORIOSO
LEZIONI TENUTE DAL PROF. GIANCARLO FERRERA NELL' A.A. 20/21

INTRODUZIONE QCD

La QCD (Quantum Chromodynamics) è la teoria delle interazioni degli ADRONI. Questi non sono i quanti fondamentali della teoria: essi sono i QUARKS, gli ANTIQUARKS e i GLUONI (q, \bar{q}, g).

Esistono poi stati legati di quarks: i MESONI ($q\bar{q}$) e i BARIONI (qqq).

Per descrivere il campo dei quarks utilizziamo un campo spinoriale $\psi_f(x)$ di spin $1/2$, dove f è l'indice di FLAVOUR o SAPORE, con $f = 1, \dots, N_f$ e nello SM abbiamo $N_f = 6$.

QUARK	EL. CHARGE	MASS
up (u)	+ 2/3	2 MeV
down (d)	- 1/3	5 MeV
charm (c)	+ 2/3	1.3 GeV
strange (s)	- 1/3	130 MeV
top (t)	+ 2/3	173 GeV
bottom (b)	- 1/3	4.2 GeV

I quarks hanno carica frazionaria in termini di e . I quarks u, d, s hanno masse molto minori di $m_p \sim 1 \text{ GeV}$ che è un barione formato da uud , per tanto sono detti LIGHT QUARKS; l'altro cinto c, t, b hanno masse

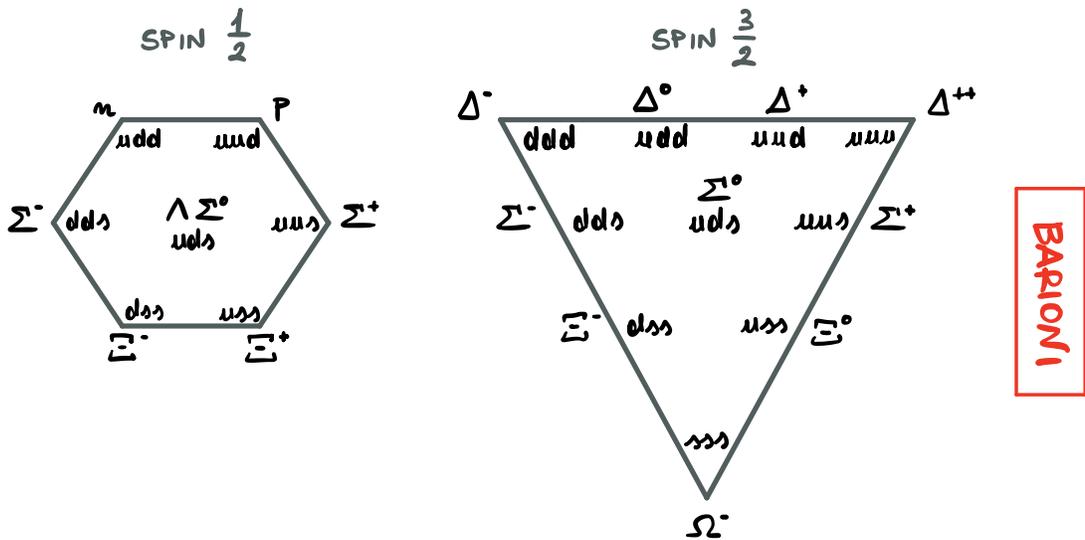
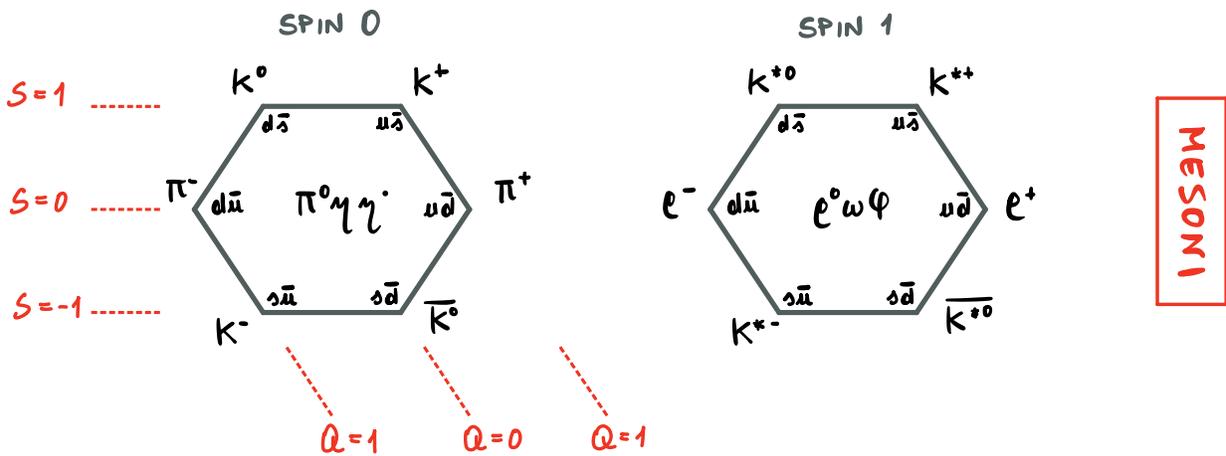
maggiore di m_p e sono detti HEAVY QUARKS. In alcuni casi facciamo esperimenti ad alte energie per cui c e b si comportano come quark leggeri.

In ogni caso l'attribuzione di una massa ai quark nasconde delle ambiguità in quanto noi possiamo osservare solo come stati legati a formare adroni, quindi interagenti e non isolati. L'unico a fare eccezione è il top t che tramite decadimento debole decade come $t \rightarrow Wb$ invece di formare uno stato $t\bar{t}$ (toponium), quindi si può definire m_t tramite i suoi prodotti di decadimento. Per gli altri ci si riferisce alle quantità $m_{\overline{MS}}(\mu)$, ossia volutate nello schema di rinormalizzazione \overline{MS} alla scala μ , con

$$\mu \sim \begin{cases} 2 \text{ GeV} & u, d, s \\ m_b, m_c & b, c \end{cases} .$$

Il quark nascono a descrivere lo spettro di masse delle matere adronica esistente che è simmetrico sotto $SU(3)_F$, dove la F sta per flavour; si dice infatti che la QCD è FLAVOUR BLIND. Quello appena descritto è il NAIVE QUARK MODEL, introdotto da Gell-Mann, Neeman, Zweig negli anni 60.

In questo modello non relativistico è possibile organizzare gli adroni in poligoni come segue



Questa situazione nella teoria delle rappresentazioni dei gruppi di Lie è descritta come segue: per n mesoni abbiamo 9 stati

$$3 \otimes 3 = 8 \oplus 1,$$

mentre per n barioni abbiamo 27 stati:

$$3 \otimes 3 \otimes 3 = 10 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 1.$$

Questo risultato è frutto dei proietti di rappresentazione
di $SU(3)_F$, simmetria di cui gode il modello nel
limite di alte energie in cui si possono trascurare le masse
e quindi indistinguibili in quanto l'interazione
forte non vede il sapore.

Il successo di questo modello fu la predizione dell'esistenza
del barione Ω^- , poi scoperto nel 1964.

TEORIA DEI GRUPPI

Facciamo un ripasso della teoria dei gruppi di Lie e delle loro rappresentazioni.

DEF.:

Un GRUPPO G è un insieme di elementi con una operazione $*$: $G \times G \rightarrow G$ tale che

- (i) $(a * b) * c = a * (b * c) \quad \forall a, b, c \in G$,
- (ii) $\exists e \in G : a * e = e * a = a \quad \forall a \in G$,
- (iii) $\forall a \in G \exists a^{-1} \in G : a a^{-1} = a^{-1} a = e$.

Proviamo poi che G è ABELIANO se

$$a * b = b * a \quad \forall a, b \in G.$$

DEF.:

Un GRUPPO DI LIE è un gruppo G i cui elementi sono funzioni analitiche di un numero finito di parametri $\alpha_1, \dots, \alpha_N$, con α_i indipendenti e $N = \dim G$.

DEF.:

Una RAPPRESENTAZIONE G di un gruppo G è un gruppo di trasformazioni lineari (matrici), in uno spazio V reale, detto BASE o MULTIPLETTO, in corrispondenza uno ad uno con gli elementi di G :

$a * b = c : a, b, c \in G \Rightarrow U(a)U(b) = U(c) : U(a), U(b), U(c) \in G;$

naturalmente risulta che $U(e) = \mathbb{1}$. Chiameremo DIMENSIONE di G la dimensione della base. Definiremo per la RAPPRESENTAZIONE FONDAMENTALE come quella attraverso la quale è possibile costruire tutte le altre, mentre definiremo la RAPPRESENTAZIONE AGGIUNTA come quella la cui dimensione coincide con $\dim G$.

DEF.:

Una rappresentazione si dice RIDUCIBILE se una scelta della base dello spazio lineare di base "regime" la rappresentazione in una somma di sottogruppi indipendenti; altrimenti diciamo che G è IRRIDUCIBILE.

DEF.:

Chiameremo GENERATORI di una data rappresentazione quegli operatori T_j che realizzano le trasformazioni infinitesime attorno all'identità:

$$U \stackrel{\alpha_j \rightarrow 0}{\sim} \mathbb{1} + i\alpha_j T_j,$$

dove $UU^\dagger = \mathbb{1} \Rightarrow T_j = T_j^\dagger$. Possiamo per realizzare le trasformazioni finite (come all'identità) con la mappa esponenziale

$$U = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\mathbb{1} + i \frac{\alpha_j}{N} T_j \right)^N = e^{i\alpha_j T_j}.$$

DEF.:

Una ALGEBRA DI LIE è uno spazio lineare finito dell'ordine n e i generatori, dove il commutatore tra due generatori è una combinazione lineare dei generatori

$$[T_j, T_k] = i f_{jke} T_e,$$

dove f_{jke} sono detti COSTANTI DI STRUTTURA che, con l'appropriata scelta dei T_j , sono antisimmetriche. Questo numero RANGO dell'algebra è il numero massimo di generatori mutualmente commutanti.

Da qui in poi parleremo di $SU(N)$, definito come

$$SU(N) := \{ U \in M_{N \times N}(\mathbb{C}) : U U^\dagger = \mathbb{1} \wedge \det U = 1 \},$$

la cui dimensione (reale) è

$$\dim SU(N) = 2N^2 - 2 \frac{N^2 - N}{2} - N - 1 = N^2 - 1.$$

ES.:

Per $SU(2)$ abbiamo $\dim SU(2) = 3$ con

$$[t_a, t_b] = i \varepsilon_{abc} t_c,$$

dove ε^{abc} è il simbolo di Levi-Civita; dopo aver scelto detta V la matrice che diagonalizza H , con

$$U = \mathbb{1} + iH,$$

allora

$$\begin{aligned} 1 &= \det U = \\ &= \det (V^\dagger U V) = \\ &= \det (\mathbb{1} + i\alpha H_D) \sim \\ &\sim \mathbb{1} + \alpha (\lambda_1 + \dots + \lambda_n) \Rightarrow \lambda_1 + \dots + \lambda_n = 0, \end{aligned}$$

quindi t^a è hermitiano e a traccia nulla, perciò scegliamo le matrici di Pauli ($t_a = \frac{\sigma_a}{2}$)

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

La rappresentazione aggiunta è tale che

$$[T_a]_{bc} = -i \varepsilon_{abc}.$$

Procediamo con $SU(3)$ che è il gruppo rilevante per la QCD. Abbiamo che $\dim SU(3) = 8$. In una generica rappresentazione abbiamo che

$$U = \exp(i\alpha_a t_a): t_a^\dagger = t_a, t_a t_a = 0, [t_a, t_b] = i f_{abc} t_c,$$

con f_{abc} indipendenti dalla rappresentazione (vale sempre, per ogni gruppo) e tale che $a, b, c = 1, \dots, 8$ e i cui elementi non nulli sono

$$\begin{aligned} f_{123} &= 1, \quad f_{458} = -f_{678} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ f_{147} &= -f_{156} = f_{246} = f_{257} = f_{345} = -f_{367} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Nella rappresentazione fondamentale abbiamo che

$$t_a = \frac{\lambda_a}{2},$$

dove λ_a sono le MATRICI DI GELL-MANN date da

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2,3} &= \left(\begin{array}{cc|c} \sigma_{1,2,3} & & 0 \\ & & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \right) & \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} & \lambda_8 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

che sono un equivalente delle matrici di Pauli.

Al solito la rappresentazione aggiunta ha dimensione pari a dim $SU(3) = 8$ con i generatori dati da

$$[T_a]_{bc} = -if_{abc}.$$

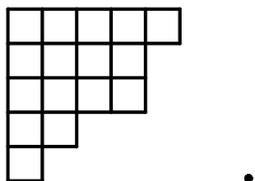
Possiamo ora discutere i TABLEAUX DI YOUNG, degli oggetti utili per costruire graficamente le rappresentazioni irriducibili di $SU(N)$.

Partiamo dal multipletto complesso ψ_i , $i=1, \dots, N$, che vive nella base delle FR (fundamental representation) e lo raffiguriamo come un quadrato:

$$\psi_i \equiv \square \equiv N.$$

Un tableau di Young è un diagramma composto da righe

di \square allineate a sinistra tali che nessuna riga non è più lunga di quella sopra, ad esempio



Ovvero colonne non può avere più di N \square e quelle lunghe N \square possono essere cancellate in quanto rappresentano la TR (trivial representation)

$$N \left\{ \begin{array}{c} \square \\ \square \\ \vdots \\ \square \end{array} \right\} \equiv 1 \Rightarrow N \left\{ \begin{array}{c} \square \square \square \\ \square \square \\ \vdots \\ \square \end{array} \right\} \equiv \begin{array}{c} \square \square \\ \square \end{array} .$$

Ovvero tableaux che rispetta queste regole corrisponde ad una IR (irreducible representation) di $SU(N)$ e viceversa.

Dato una IR possiamo costruire la IR COMPLESSA CONIUGATA scambiato ogni colonna di K \square con una colonna di $N-K$ \square , ad esempio

$$N-1 \left\{ \begin{array}{c} \square \square \square \\ \square \square \\ \vdots \\ \square \end{array} \right\} \rightsquigarrow N-1 \left\{ \begin{array}{c} \square \square \square \\ \square \square \\ \vdots \\ \square \square \square \end{array} \right\} .$$

Da questa regola allora abbiamo che la complessa coniugata della FR è $\bar{\Psi}_i$ (che trasformo come $\bar{\Psi}_i \mapsto \bar{\Psi}_i U_{ji}^\dagger$) dato da

$$\bar{\Psi}_i \equiv N-1 \left\{ \begin{array}{l} \square \\ \square \\ \vdots \\ \square \end{array} \right. \equiv \bar{N}$$

La dimensione della IR coincide con la dimensione del tableau, definita come

$$d = \frac{\mathcal{N}}{\mathcal{D}}$$

A me volta \mathcal{N} si calcola come segue: assegnamo un numero a ciascun \square , partendo con N per il primo in alto a sinistra, poi lungo la riga incrementiamo di 1 e lungo la colonna diminuiamo di uno, allora \mathcal{N} sarà il prodotto di tutti questi numeri.

N	$N+1$	$N+2$
$N-1$	N	
$N-2$	$N-1$	
$N-3$		

$$\Rightarrow \mathcal{N} = N(N+1)(N+2)(N-1)N(N+1)(N-2)(N-1)(N-3)$$

D'altro conto \mathcal{D} si calcola come segue: a ciascun \square assegnamo un numero pari alle somme dei \square alle sue destra e quello al di sotto, più uno, allora \mathcal{D} sarà

il prodotto di questi numeri.

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 6 & 4 & 1 \\ \hline 4 & 2 & \\ \hline 3 & 1 & \\ \hline 1 & & \\ \hline \end{array} \Rightarrow \mathcal{D} = 6 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 3$$

Grande ai tableaux e' possibile decomporre il prodotto diretto di due IR in una somma diretta di IR come segue.

1. Etichettiamo le righe del secondo tableaux con le etichette a, b, c, \dots , ad esempio

$$\begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|c|c|} \hline a & a & a \\ \hline b & b & \\ \hline c & & \\ \hline \end{array} .$$

2. Attacchiamo i \square del secondo al primo in tutti i modi possibili accettando solo n tableaux in cui ciascuna etichetta non si ripete lungo le colonne.
3. Due tableaux con la stessa forma ma etichette diverse devono considerarsi distinti, mentre se sono uguali anche nelle etichette allora va contato solo una volta.
4. Contare le etichette pu' essere age da destra a s sinistra: su qualunque posizione nelle righe non devo no mai essere piu' di due a , piu' c di due b , e con' me.

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline & a & b \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \times \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline & b & a \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \checkmark$$

Le AR (adjoint representation) può essere costruita come prodotto diretto delle FR e la complessa coniugata

$$\begin{aligned} \bar{N} \otimes N &= N-1 \left\{ \begin{array}{c} \square \\ \vdots \\ \square \end{array} \right\} \otimes \square = \\ &= N-1 \left\{ \begin{array}{cc} \square & \square \\ \vdots & \vdots \\ \square & \square \end{array} \right\} \oplus N \left\{ \begin{array}{c} \square \\ \vdots \\ \square \end{array} \right\} = N^2-1 \oplus 1, \end{aligned}$$

dove nel primo membro le AR nel quanto rappresentano due AR = N^2-1 . Dalla regola sulla coniugazione complessa è chiaro che le AR è self-coniugata

$$\overline{N^2-1} = N^2-1.$$

ES.:

Consideriamo $SU(2)$:

$$\bullet \square \otimes \square = \square \oplus \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array}, \quad (2 \otimes 2 = 3 \oplus 1)$$

$$\begin{aligned} \bullet \square \otimes \begin{array}{cc} a & a \end{array} &= \left(\begin{array}{ccc} \square & \square & a \end{array} \oplus \begin{array}{cc} \square & \square \\ a & \square \end{array} \right) \otimes \begin{array}{c} \square \\ a \end{array} = \\ &= \begin{array}{cccc} \square & \square & \square & \square \end{array} \oplus \begin{array}{cc} \square & \square \end{array} \oplus \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array}, \quad (3 \otimes 3 = 5 \oplus 3 \oplus 1) \end{aligned}$$

una generale quando ritroviamo le famose regole

$$2j_1+1 \otimes 2j_2+1 = \bigoplus_{J=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} (2J+1).$$

ES.:

Classeamento $SU(3)$:

• $\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \otimes \square = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}, \quad (\bar{3} \otimes 3 = 8 \oplus 1)$

• $\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|c|} \hline a & a \\ \hline b & \end{array} = \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & a \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & a \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline a & \end{array} \right) \otimes \begin{array}{|c|} \hline a \\ \hline b \\ \hline \end{array} =$

$= \left(\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & a & a \\ \hline \square & & & \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & a \\ \hline \square & a & \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & a \\ \hline \square & & \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & a \\ \hline \square & a \\ \hline \end{array} \right) \otimes \begin{array}{|c|} \hline b \\ \hline \end{array} =$

$= \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & a & a \\ \hline \square & b & & \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & a & a \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & a \\ \hline \square & a & b \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & a \\ \hline a & \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & a \\ \hline b & \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline a \\ \hline b \\ \hline \end{array} .$

$(8 \otimes 8 = 27 \oplus 10 \oplus \bar{10} \oplus 8 \oplus 8 \oplus 1)$

NUMERO QUANTICO DI COLORE

Il modello a quark naive, per dare una descrizione completa dello spettro adronico, richiede un numero quantico addizionale. Vediamone le ragioni storiche.

(i) Dalle spettroscopie barioniche, nello scattering πn c'è la risonanza $\Delta^{++}(1232)$ che può decadere in $p\pi^+$. Questo stato legato ha $m_{\Delta^{++}} = 1232$ MeV, $e = 2e$, momento angolare nullo e spin $\frac{3}{2}$, quando ci aspettiamo che sia del tipo

$$|\Delta^{++}\rangle \stackrel{?}{=} |u^\uparrow u^\uparrow u^\uparrow\rangle,$$

ma questo stato è proibito dal principio di esclusione di Pauli, perciò può esistere solo se antisimmetrico rispetto ad un nuovo numero quantico, COLORE,

$$|\Delta^{++}\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} \epsilon_{ijk} |u_i^\uparrow u_j^\uparrow u_k^\uparrow\rangle,$$

con $i, j, k = 1, \dots, N_c$ e $N_c \geq 3$ affinché $|\Delta^{++}\rangle$ sia antisimmetrico per scambio di particelle.

(ii) Gli adroni osservati non hanno carica di colore e questo porta all'assunzione che un retino possono esistere solo stati colorless spregiudicando perché non esistono adroni esotici (per esempio qq). Tale assunzione è

nota come COLOUR CONFINEMENT.

Gli adroni dunque sono dei nugolitti di colore, quindi di invarianti sotto $SU(3)_c$. I quark sono nelle FR (3) , mentre gli antiquark sono nelle \overline{FR} $(\bar{3})$. Per questo visto nei gruppi allora

$$qq \rightarrow 3 \otimes 3 = 6 \oplus 3,$$

ossia non c'è il nugolito e quindi non da luogo a stati fissi; d'altro canto

$$q\bar{q} \rightarrow 3 \otimes \bar{3} = 8 \oplus 1,$$

quindi il nugolito rappresenta il mesone

$$M = \frac{1}{\sqrt{2}} \delta_{ij} \bar{q}_i q'_j,$$

dove q' indica un eventuale sapore diverso e che sotto $SU(3)_c$ rimane invariato

$$M \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{q}_k U_{ki}^\dagger U_{ij} q'_j \stackrel{UU^\dagger=1}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{q}_k q'_k;$$

analogamente per i barioni abbiamo che

$$qqq \rightarrow 3 \otimes 3 \otimes 3 = 10 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 1,$$

quindi il nugolito rappresenta il barione

$$B = \frac{1}{\sqrt{6}} \epsilon_{ijk} q_i q'_j q''_k$$

che sotto $SU(3)_c$ rimane invariato

$$\begin{aligned} B &\mapsto \frac{1}{\sqrt{6}} \varepsilon_{ijk} U_{ie} U_{jm} U_{kn} q_e q'_m q''_n = \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}} \varepsilon_{lmn} q_e q'_m q''_n = B. \end{aligned}$$

Osserviamo che non potremmo avere $SO(3)_c$ in quanto $3 = \bar{3}$ e quindi avremmo alcuni esotici.

(iii) Dalla sezione d'urto dell'annichilazione e^+e^- abbiamo il rapporto

$$R_{e^+e^-} = \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow h)}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)},$$

dove

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-) = \frac{4\pi\alpha^2}{3s}.$$

Anche senza calcolare $\sigma(e^+e^- \rightarrow q\bar{q})$ sappiamo che

$$R_{e^+e^-} \sim \frac{N_c \sum_f e_f^2}{e_\mu^2} = \begin{cases} \frac{2}{3} N_c & f = u, d, s \\ \frac{10}{9} N_c & f = u, d, s, c \\ \frac{11}{9} N_c & f = u, d, s, c, b \end{cases},$$

quindi dal confronto coi dati sperimentali emerge che deve esserci un $N_c \gtrsim 3$.

QUANTIZZAZIONE DELLA QCD

La QCD è una teoria completamente specificata dal numero quantico di colore, analogo della carica elettrica in QED, quando diventa CARICA DI COLORE, che è la causa delle interazioni forti. La teoria deve essere invariante sotto $SU(N_c=3)_c$ localmente, quando è una teoria di gauge come la QED ma con $SU(3)_c$ in luogo di $U(1)_{em}$. Possiamo parametrizzare il generico elemento di $SU(N_c)_c$ locale con la solita espressione

$$U(x) = \exp \{ i g A^a(x) t^a \},$$

dove t^a sono i generatori di $su(N_c)_c$, con $a=1, \dots, N_c^2-1$, tali che

$$[t^a, t^b] = i f^{abc} t^c.$$

Come in QED, la richiesta di invarianza di gauge della lagrangiana di Dirac, con cui descriviamo i quarks, porta all'introduzione di N_c^2-1 campi di gauge $A_\mu^a(x)$, i cui quanti sono detti GLUONI e sono particelle massless di spin pari a 1, equivalenti del fotone.

Possiamo finalmente introdurre la lagrangiana di QCD della richiesta che sia invariante sotto $SU(N_c)_c$ e rimane locale; così facendo troviamo

$$\mathcal{L}_{QCD} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} + \sum_{f=1}^{N_f} \bar{\psi}_j^f (i \not{D}_{jk} - m_f \delta_{jk}) \psi_k^f.$$

ψ_j^f è il campo dei quark, con j indice di colore e f indice di sapore. Lo stile subito che la QCD è diagonale nello spazio di sapore: non vi sono interazioni che mescolino diversi quark di sapore diverso, come invece accade con l'interazione debole. Diciamo che la QCD è flavour-blind. Abbiamo poi la derivata covariante

$$D_{\mu jk} = \delta_{jk} \partial_{\mu} - ig A_{\mu}^a t_{jk}^a,$$

grazie alla quale, sotto $SU(3)_c$ locale, abbiamo che

$$D_{\mu} \psi \mapsto U D_{\mu} \psi.$$

In fine abbiamo il GLUON FIELD STRENGTH TENSOR, che generalizza il tensore di Faraday della QED, e vale

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_{\mu} A_{\nu}^a - \partial_{\nu} A_{\mu}^a + g f^{abc} A_{\mu}^b A_{\nu}^c,$$

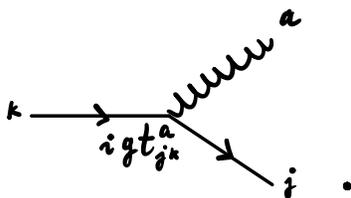
dove il terzo termine è presente a causa del fatto che $SU(3)_c$ non è abeliano; per ottenere questo risultato possiamo calcolare

$$[D_{\mu}, D_{\nu}]_{jk} = -ig F_{\mu\nu}^a t_{jk}^a$$

e ricordare che in QED avremmo

$$[D_{\mu}, D_{\nu}] = -ie F_{\mu\nu}.$$

La grande differenza con la QED è che il gluone ha una carica di colore. Ne segue quindi che un quark che emette un gluone cambia colore.



In secondo luogo un gluone autointeragisce con se stesso a livello albero nella lagrangiana



È possibile scrivere la lagrangiana

$$\mathcal{L}_{QCD} = \mathcal{L}_{FREE} + \mathcal{L}_{INT},$$

con \mathcal{L}_{FREE} quadratico in ψ_i e A_μ^a , mentre

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{INT} = & g A_\mu^a \sum_{f=1}^{N_f} \bar{\psi}_i^f t_{jk}^a \psi_k^f + & (q\bar{q}g) \\ & - \frac{1}{2} g f^{abc} (\partial^\mu A^{\nu a} - \partial^\nu A^{\mu a}) A_\mu^b A_\nu^c + & (ggg) \\ & - \frac{1}{4} g^2 f^{abc} f^{ade} A^\mu b A^\nu c A_\mu^d A_\nu^e & (gggg) \end{aligned}$$

e gli ultimi due non hanno alcun analogo in QED.

Per la sola QCD il termine di massa non viola la

gauche invariante, quindi in questo caso non abbiamo bisogno di rompere il meccanismo di Higgs. Ciò che invece è proibito è un termine di massa per i gluoni in quanto $M A_\mu^a A^{\mu a}$ viola l'invarianza di gauge. Più avanti spiegheremo perché, nonostante g sia molto, l'interazione forte è a cortissima distanza. Scriviamo le regole di Feynman per la QCD:

$$\begin{array}{c} \mu \\ a \end{array} \begin{array}{c} \text{-----} \\ | \\ \text{-----} \\ \nu \\ b \end{array} = \frac{i}{p^2 + i\epsilon} \delta^{ab} d^{\mu\nu}(p)$$

$$\begin{array}{c} \beta \\ k \end{array} \begin{array}{c} \xrightarrow{g} \\ | \\ \xrightarrow{g} \\ \alpha \\ j \end{array} = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \delta_{jk} (\not{p} + m)_{\alpha\beta}$$

$$\begin{array}{c} \beta \\ k \end{array} \begin{array}{c} \xrightarrow{g} \\ | \\ \text{-----} \\ | \\ \xrightarrow{g} \\ \alpha \\ j \end{array} = i g t_{jk}^a \gamma_{\alpha\beta}^\mu$$

$$\begin{array}{c} \mu_1 \\ a_1 \end{array} \begin{array}{c} \xrightarrow{p_1} \\ | \\ \text{-----} \\ | \\ \xrightarrow{p_2} \\ \mu_2 \\ a_2 \end{array} \begin{array}{c} \xrightarrow{p_3} \\ | \\ \text{-----} \\ | \\ \xrightarrow{p_3} \\ \mu_3 \\ a_3 \end{array} = g f^{a_1 a_2 a_3} [\eta^{\mu_1 \mu_2} (p_1 - p_2)^{\mu_3} + \eta^{\mu_2 \mu_3} (p_2 - p_3)^{\mu_1} + \eta^{\mu_3 \mu_1} (p_3 - p_1)^{\mu_2}]$$

$$\begin{array}{c} \mu_1 \\ a_1 \end{array} \begin{array}{c} \text{-----} \\ | \\ \text{-----} \\ \mu_2 \\ a_2 \end{array} \begin{array}{c} \text{-----} \\ | \\ \text{-----} \\ \mu_3 \\ a_3 \end{array} \begin{array}{c} \text{-----} \\ | \\ \text{-----} \\ \mu_4 \\ a_4 \end{array} = -i g^2 f^{a_1 a_2} f^{a_3 a_4} (\eta^{\mu_1 \mu_3} \eta^{\mu_2 \mu_4} - \eta^{\mu_1 \mu_4} \eta^{\mu_2 \mu_3}) + \\ -i g^2 f^{a_1 a_3} f^{a_2 a_4} (\eta^{\mu_1 \mu_2} \eta^{\mu_3 \mu_4} - \eta^{\mu_1 \mu_4} \eta^{\mu_2 \mu_3}) + \\ -i g^2 f^{a_1 a_4} f^{a_2 a_3} (\eta^{\mu_1 \mu_2} \eta^{\mu_3 \mu_4} - \eta^{\mu_1 \mu_3} \eta^{\mu_2 \mu_4})$$

In particolare risolveremo nuovamente due o due termini

no di autointerazione, ad altro, del gluone costituiscono una novità rispetto alla QED e sono presenti grazie al fatto che $SU(3)$ non è abeliano.

Lo può far vedere che \mathcal{L}_{QCD} , per costruzione, gode dell'invarianza di gauge sotto $SU(3)_c$ locale. Vediamo come trasforma ciascun campo. Per il campo dei quark abbiamo che

$$\psi_j^f(x) \mapsto U(x)_{jk} \psi_k^f(x),$$

dove

$$U(x)_{jk} = \exp\{ig\mathcal{Q}^a(x)t^a\}_{jk} \sim \delta_{jk} + ig\mathcal{Q}^a(x)t^a_{jk} + O(\mathcal{Q}^2),$$

quando per trasformazioni infinitesime risulta che

$$\psi_j^f \mapsto \psi_j^f + ig\mathcal{Q}^a t^a_{jk} \psi_k^f;$$

d'altro canto per il gluone abeliano che trasforma come un elemento della base delle AR

$$A_\mu^a t^a_{jk} \mapsto \underbrace{U_{jm} A_\mu^a t^a_{mn} U^{-1}_{nk}}_{\text{COLOUR ROTATION}} + \underbrace{\frac{i}{g} \partial_\mu U_{jm} U^{-1}_{nk}}_{\text{LONGITUDINAL SHIFT}},$$

quindi

$$F_{\mu\nu}^a t^a_{jk} \mapsto U_{jm} F_{\mu\nu}^a t^a_{mn} U^{-1}_{nk},$$

in modo che F^2 sia gauge invariante; inoltre, sotto trasformazioni infinitesime, abbiamo che

$$A_\mu^a \mapsto A_\mu^a - \underbrace{\partial_\mu \vartheta^a}_{\text{LONG. SHIFT}} - g \underbrace{f^{abc} \vartheta^b A_\mu^c}_{\text{COLOUR ROTATION}}.$$

Procediamo allora con la quantizzazione delle QCD. Innanzitutto osserviamo che le configurazioni di gauge equivalenti non sono quelle di libertà dimensionale, perciò nella quantizzazione dobbiamo permettere le propagazioni solo dei gradi di libertà fisici del gluone (polarizzazioni trasverse).

Proviamo ad effettuare la quantizzazione canonica, partendo dalle lagrangiane dei gluoni

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} \Rightarrow \pi_\mu^a = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}^{\mu a}} = -F_{0\mu}^a$$

e imponendo le CCR a tempo uguali

$$[A_\mu^a(t, \vec{x}), \pi_\nu^b(t, \vec{y})] \equiv i \delta^{ab} \eta_{\mu\nu} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}),$$

ma F è antisimmetrico, perciò $\pi_0^a = 0$ e

$$[A_0^a, \pi_0^b] = 0. \quad \frac{1}{2}$$

Procediamo la controazione ponendo un vincolo sul campo A_μ^a , quindi fissiamo la gauge mantenendo la covarianza di Lorentz

$$\partial^\mu A_\mu^a = 0.$$

Aggiungiamo allora il termine di gauge fixing

$$\mathcal{L}_{GF} = -\frac{1}{2\xi} (\partial^\mu A_\mu^a)^2$$

alla lagrangiana, con ξ^{-1} che è un moltiplicatore di \mathcal{L}_G gauge; quando nella nostra gauge \mathcal{L}_{GF} è nullo, in generale stiamo rompendo l'invarianza a livello di \mathcal{L}_G gauge ma i risultati fisici dovranno essere indipendenti dalla gauge e da ξ .

In totale abbiamo che

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} - \frac{1}{2\xi} (\partial^\mu A_\mu^a)^2$$

da cui segue che

$$\pi_\mu^a = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}^{\mu a}} = -F_{0\mu}^a - \frac{1}{\xi} \eta_{0\mu} \partial^\nu A_\nu^a \Rightarrow \pi_0^a \neq 0$$

quando le CCR diventano coerenti. In termini di operatori di creazione e distruzione abbiamo che

$$[a_{\vec{k}}^b, a_{\vec{k}'}^{\dagger c}] = \zeta_{\vec{k}} \delta^{bc} \delta_{\vec{k}, \vec{k}'},$$

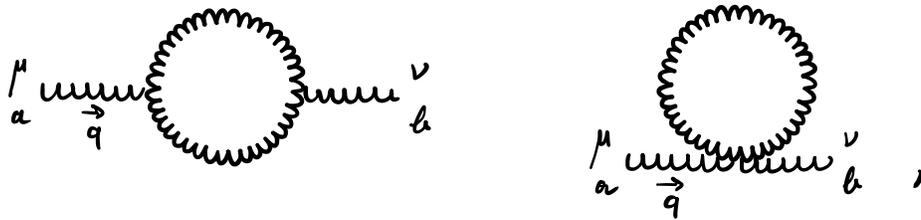
con

$$\zeta_{\vec{k}} = \begin{cases} 1 & k = 1, 2, 3 \\ -1 & k = 0 \end{cases}.$$

Questa procedura è stata sufficiente in QED per la quantizzazione covariante del campo elettromagnetico.

In QCD abbiamo l'ulteriore complicazione dovuta alla autointerazione, ad esempio calcolando alcuni contributi

alla self-energia del gluone $\Pi_{\mu\nu}^{ab}(q)$ come



emerge che $q^\mu \Pi_{\mu\nu}^{ab}(q) \neq 0$, rivelando l'anomalia di gauge e l'instabilita' della teoria. Grande problema ogni volta che abbiamo autorinterazione del gluone, come



La situazione e' risolta dall'introduzione dei GHOST, es sono due campi fittizi presenti solo nei passaggi intermedi ma assenti nei risultati finali col solo scopo di cancellare i contributi non fissati alle polarizzazioni tempore le e longitudinale. Questi campi sono campi scalari complessi n e anticommutanti.

$$\eta^a = \frac{1}{\sqrt{2}} (\eta_1^a + i\eta_2^a) : (\eta_1^a)^2 = (\eta_2^a)^2 = 0,$$

descritti dalla Lagrangiana

$$\mathcal{L}_{FP} = \partial^\mu \eta^{a\dagger} D_\mu^{ab} \eta^b,$$

derivata a Faddeev e Popov.

Prevedendo la lagrangiana quantistica dei gluoni, dopo il gauge fixing, diventa

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^2 + \mathcal{L}_{GF} + \mathcal{L}_{FP},$$

che è invariante sotto un gruppo di trasformazioni esteso, noto come BRST, che coinvolge tutti gli elementi di \mathcal{L} .

Nelle gauge covarianti per i ghost abbiamo le seguenti regole di Feynman

$$a \xrightarrow{P} b = \delta^{ab} \frac{i}{P^2 + i\epsilon}$$

$$b \xrightarrow{P} \begin{array}{l} \text{~~~~~}^{\mu} \\ \text{~~~~~}^{\mu} \\ \text{~~~~~}^{\mu} \\ \text{~~~~~}^{\mu} \\ \text{~~~~~}^{\mu} \end{array} a = -g P^{\mu} f^{abc}$$

con l'aggiunta di un fattore $(-1)^L$, dove L è il numero di loop di ghost.

I ghost violano il teorema spin-statistica ma ciò non ci preoccupa in questo contesto: nei risultati finali.

Concludiamo evidenziando l'espressione del propagatore del gluone nelle gauge covarianti:

$$d^{\mu\nu}(p) = \sum_{\lambda} \epsilon_{\lambda}^{\mu}(p) \epsilon_{\lambda}^{\nu}(p) = -\eta^{\mu\nu} + (1-\xi) \frac{P^{\mu} P^{\nu}}{P^2 + i\epsilon}.$$

La non fermicità dei ghost è dovuta al fatto che

l'introduciamo non ad hoc per compensare i contribu
ti non fermi presenti nella quantizzazione co
vante proporzionale tutto il campo A_μ^a .

Infatti non possiamo quantizzare in una gauge ferme,
non covariante, in cui risolviamo da subito le potenz
sorelle ferme a patto di scegliere un frame di riferi
mento, ad esempio la gauge assole

$$n^\mu A_\mu^a = 0 ;$$

in questo caso non abbiamo nessun ghost e

$$d^{\mu\nu}(p) = -\eta^{\mu\nu} + \frac{p^\mu n^\nu + n^\mu p^\nu}{p \cdot n} - n^2 \frac{p^\mu p^\nu}{(p \cdot n)^2},$$

se poi scegliamo $n : n^2 = 0$ allora siamo nella light
cone gauge.

In QED non avrebbe senso introdurre il ghost perché
il termine di interazione dipende da f_{abc} ma questi
sono nulle in quanto $U(1)$ è abeliano: ne resultano
no particelle che non interagiscono con nulle.

ALGEBRA E FATTORI DI COLORE

In QCD in linea di principio il calcolo dei diagrammi è simile alla QED tranne che per la presenza dei fattori di colore elevati alla presenza dei generatori t^a di $SU(3)$. Abbiamo infatti le seguenti relazioni

$$\text{Tr} \{ t^a t^b \} = T_R \delta^{ab}, \quad T_R = \frac{1}{2}$$

$$(t^a t^a)_{ij} = t^a_{ik} t^a_{kj} = C_F \delta_{ij}, \quad C_F = T_R \frac{N_c^2 - 1}{N_c} = \frac{4}{3}$$

$$(T^a T^a)_{cd} = T^a_{cb} T^a_{bd} = C_A \delta_{cd}, \quad C_A = N_c = 3$$

dove ricordiamo che con t^a siamo nelle FR, mentre con T^a siamo nelle AR; ma qualunque rappresentazione deve avere che

$$\begin{aligned} \text{Tr} \{ T^a \} &= 0 \\ [T^a, T^b] &= i f^{abc} T^c \end{aligned}$$

e da queste si possono ricavare i fattori di colore sopra citati. La scelta e la terza relazione ci dicono quanto vale il coefficiente di proporzionalità dell'operatore di Casimir $T^a T^a$, che quindi dipende dalla rappresentazione.

ES.:

Calcoleremo il contributo del g alle self-energie del

gluone g

$$\sim t^a_{ij} t^b_{ji} = \text{Tr} \{ t^a t^b \} = T_F \delta^{ab}.$$

Per il contributo di gluone invece abbiamo che

$$\sim f^{adc} f^{bcd} = C_A \delta^{ab}.$$

Parliamo ora alle self-energia del quark

$$\sim t^a_{ij} t^a_{ji} = (t^a t^a)_{ii} = C_F \delta_{ii}.$$

Per tanto C_F e C_A possono essere visti come carica di colore e di quark e gluone; sappiamo che $3 = C_A > C_F = \frac{4}{3}$, quindi la carica del gluone e' maggiore di quella del quark.

Un modo per calcolare rapidamente i fattori di colore e' noto come T HOOFT DOUBLE LINE NOTATION, molto utile per grandi N_c , in cui abbiamo le seguenti identifications

$$\delta_{ij} \sim i \longrightarrow j \rightarrow i \longrightarrow j$$

$$\delta_{ab} \sim a \text{ wavy } b \rightarrow a \text{ double } b - \frac{1}{N_c} a \text{ loop } b$$

$$t^a_{ij} \sim i \text{ wavy } a \text{ } j \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \left(i \text{ wavy } a \text{ } j - \frac{1}{N_c} i \text{ loop } a \text{ } j \right)$$

$$f^{abc} \sim a \text{ wavy } b \text{ wavy } c \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \left(a \text{ wavy } b \text{ wavy } c - a \text{ wavy } c \text{ wavy } b \right)$$

$$f^{cab} f^{ced} \sim a \text{ wavy } b \text{ wavy } c \text{ wavy } d + (b \leftrightarrow c) + (b \leftrightarrow d) \rightarrow \frac{1}{2} \left[\begin{array}{c} b \text{ wavy } c \text{ wavy } d \\ a \text{ wavy } d \text{ wavy } c \end{array} + (b \leftrightarrow d) + (c \leftrightarrow d) + \left(\frac{c \leftrightarrow d}{b \leftrightarrow d} \right) + [b \leftrightarrow c] + [b \leftrightarrow d] \right]$$

ES.:

La proce vedete che

$$\text{circle with arrow} \sim \delta^{ii} = N_c,$$

$$\text{circle with wavy} \sim \delta^{aa} = N_c^2 - 1.$$

Nella matrice a doppia linea possiamo dimostrare le seguenti identità:

$$\begin{aligned}
 \text{☼} &= \left(\begin{array}{c} a \rightleftarrows b \\ - \frac{1}{N_c} \begin{array}{c} a \\ \rightarrow \\ \leftarrow \\ b \end{array} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} b \rightleftarrows a \\ - \frac{1}{N_c} \begin{array}{c} b \\ \rightarrow \\ \leftarrow \\ a \end{array} \end{array} \right) = \\
 &= \begin{array}{c} \circlearrowleft \\ \circlearrowright \end{array} - \frac{2}{N_c} \begin{array}{c} \circlearrowleft \\ \circlearrowright \end{array} + \frac{1}{N_c^2} \begin{array}{c} \circlearrowleft \\ \circlearrowright \end{array} = \\
 &= N_c^2 - \frac{2N_c}{N_c} + \frac{1}{N_c} N_c^2 = \\
 &= N_c^2 - 1.
 \end{aligned}$$

ES.:

Mostriamo che

$$a \text{ --- } \begin{array}{c} \circlearrowleft \\ \circlearrowright \end{array} \text{ --- } b \sim \text{Tr} \delta_{ab},$$

infatti:

$$\begin{aligned}
 a \text{ --- } \begin{array}{c} \circlearrowleft \\ \circlearrowright \end{array} \text{ --- } b &= a \text{ --- } \begin{array}{c} i \\ \circlearrowleft \\ j \\ \circlearrowright \\ i \end{array} \text{ --- } b \sim \\
 &\sim \frac{1}{2} \left(\begin{array}{c} i \\ a \rightleftarrows j \\ - \frac{1}{N_c} \begin{array}{c} a \\ \rightarrow \\ \leftarrow \\ j \end{array} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} i \\ j \rightleftarrows i \\ - \frac{1}{N_c} \begin{array}{c} j \\ \rightarrow \\ \leftarrow \\ i \end{array} \end{array} \right) = \\
 &= \frac{1}{2} \left(\begin{array}{c} a \rightleftarrows b \\ - \frac{2}{N_c} \begin{array}{c} a \\ \rightarrow \\ \leftarrow \\ b \end{array} \end{array} + \frac{1}{N_c^2} \begin{array}{c} \circlearrowleft \\ \circlearrowright \end{array} \begin{array}{c} a \\ \rightarrow \\ \leftarrow \\ b \end{array} \right) = \\
 &= \frac{1}{2} \left(\begin{array}{c} a \rightleftarrows b \\ - \frac{1}{N_c} \begin{array}{c} a \\ \rightarrow \\ \leftarrow \\ b \end{array} \end{array} \right) \sim \\
 &\sim \text{Tr} \delta_{ab}.
 \end{aligned}$$

OSS.:

Quando includiamo le linee gluoniche con una doppia linea è come se pensassimo ad una $3 \otimes \bar{3}$, quando il termine che sottraiamo instoricamente il singoletto 1 per ottenere le 8, cioè le AR.

GRUPPO DI RINORMALIZZAZIONE E QCD

Quando abbiamo costruito \mathcal{L}_{QCD} abbiamo richiesto che fosse gauge invariante sotto $SU(3)_c$ e rinormalizzabile.

Infatti, quando calcoleremo le correzioni radiative in un processo, ci imbatteremo in delle divergenze UV che curiamo con le rinormalizzazioni, le cui efficacie appunto dipendono dalla rinormalizzabilità della teoria.

Le procedure sostituisce i parametri della lagrangiana g_B, m_B, \dots , che sono non fissati, con le quantità rinormalizzate g, m, \dots , direttamente collegati alle osservabili fisiche.

Procederemo a tre step della rinormalizzazione: regolazione (1), sottrazione (2), assorbimento tramite ridefinizione del parametro bare (3).

Ad esempio, della QED, avremo che

$$\begin{aligned} \text{Diagramma} &= \text{Diagramma} + \text{Diagramma} + \dots = \\ &\sim \alpha_B \left\{ 1 + \alpha_B \beta_0' \int_p^{\Lambda_{UV}} \frac{d^4 k}{k^4} + O(\alpha_B^2) \right\}, \end{aligned}$$

dove abbiamo introdotto un regolatore Λ_{UV} (1) da usare a infinito per ottenere le nostre teorie, mentre β_0 è un coefficiente da calcolare e p è un

momento esterno. Sappiamo che

$$\int_p^{\Lambda_U} d^4k \frac{1}{k^4} \sim \log \frac{\Lambda_{UV}^2}{p^2},$$

quindi introduciamo una scala non fisica μ^2 , nota come SCALA DI RINORMALIZZAZIONE, che includiamo es-
sue dell'ordine di p^2 , e scriviamo che

$$\text{Diagramma} \sim \alpha_B \left\{ 1 + \alpha_B \beta_0 \left(\log \frac{\Lambda_{UV}^2}{\mu^2} + \log \frac{\mu^2}{p^2} \right) + O(\alpha_B^2) \right\} \sim$$

$$(2) \sim \alpha_B \left(1 + \alpha_B \beta_0 \log \frac{\Lambda_{UV}^2}{\mu^2} \right) + \alpha_B^2 \beta_0 \log \frac{\mu^2}{p^2} + O(\alpha_B^3) \equiv$$

$$(3) \equiv \alpha(\mu^2) \left\{ 1 + \alpha(\mu^2) \beta_0 \log \frac{\mu^2}{p^2} + O(\alpha(\mu^2)^2) \right\},$$

dove abbiamo introdotto la definizione

$$\alpha(\mu^2) \equiv \alpha_B \left(1 + \alpha_B \beta_0 \log \frac{\Lambda_{UV}^2}{\mu^2} + O(\alpha_B^2) \right).$$

Questo coupling è universale: non dipende dal cut-off
in quanto tale dipendenza è incorporata da α_B e nel-
te non dipende da p^2 e quindi dal processo.

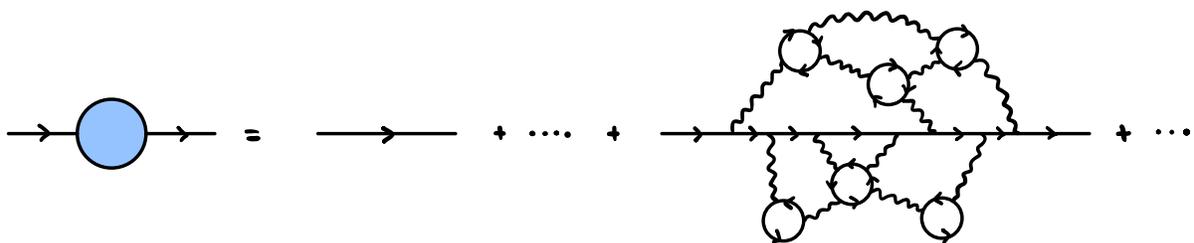
Il coupling però dipende dalle scale di rinormalizza-
zione μ^2 , a me resta un modo tale che le universali
funzioni non avremo tracce di questa scala non fisica.

Grasse a 't Hooft e Veltman sappiamo che le teorie
di Yang-Mills sono rinormalizzabili anche per ordine

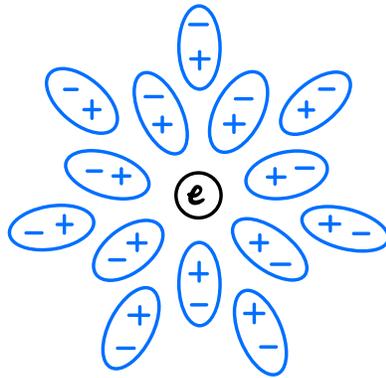
una teoria delle perturbazioni: tutte le divergenze UV possono essere riassunte in un numero finito di parametri universali. La dimostrazione si fonda sull'invarianza di gauge e quindi occorre usare la regolarizzazione dimensionale in luogo del cut-off.

Tipicamente in QED si sceglie $\mu^2 \sim m_e^2$ ma in QCD non c'è una buona scelta perché si querano non si possono scegliere e inoltre il fatto che $\alpha_s \sim 0.1 \gg \alpha$ ci rende un'instabilità perturbativa.

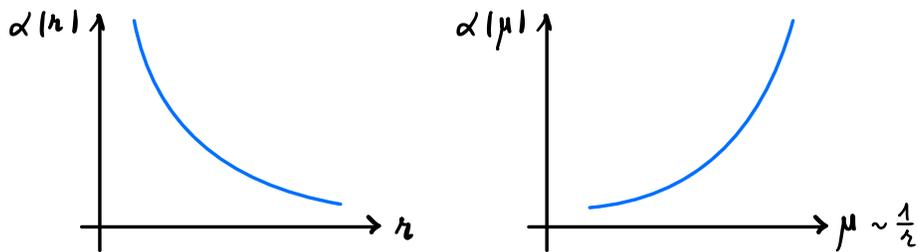
In QED eravamo riusciti a dare un significato fisico della rinormalizzazione spiegando l'origine della necessità di una costante di accoppiamento che dipende dalle scale a cui lo osserviamo. Infatti, preso un e^- nel vuoto, questo autointeragisce con se stesso,



creando delle coppie e^+e^- virtuali responsabili delle fluttuazioni quantistiche, perciò pensiamo all'elettrone come ad una carica circondata da una nuvola di dipoli orientati.



Ne segue che l'intensità dell'interazione di una coppia di protoni e l'elettrone presente nella nuvola di dipolo che agisce come schermo: il vuoto intorno a e^- è popolato dalle coppie virtuali e^+e^- e quindi si comporta come un mezzo dielettrico. Quanto più sono lontani, tanto più lo schermo riduce la carica effettiva di e^- .



Per capire come α dipende da μ^2 dobbiamo utilizzare l'equazione del gruppo di rinormalizzazione, attraverso la quale la teoria predice come deve essere $\alpha(\mu^2)$.

Partendo da

$$\alpha(\mu^2) = \alpha_B \left(1 + \alpha_B \beta_0 \log \frac{\Lambda_{UV}^2}{\mu^2} + O(\alpha_B^2) \right),$$

abbiamo che

$$\begin{aligned} \frac{d}{d \log \mu^2} \log \alpha(\mu^2) &= \frac{1}{\alpha(\mu^2)} \frac{d}{d \log \mu^2} \alpha(\mu^2) \\ &= -\beta_0 \alpha(\mu^2) + O(\alpha(\mu^2)^2), \end{aligned}$$

perciò arriviamo all' EQUAZIONE DEL GRUPPO DI RINORMALIZZAZIONE

$$\frac{d}{d \log \mu^2} \log \alpha(\mu^2) = \beta(\alpha(\mu^2)), \quad (\text{RGE})$$

dove

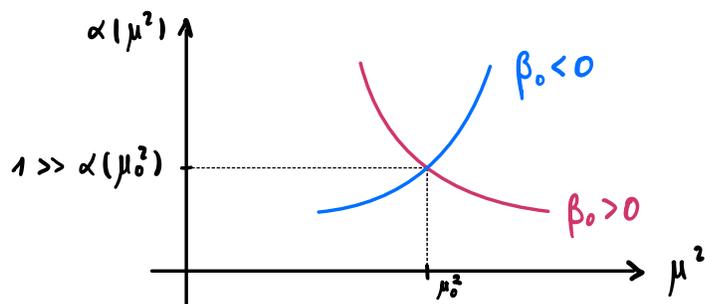
$$\beta(\alpha) = -\sum_{n=1}^{\infty} \beta_{n-1} \alpha^n = -\beta_0 \alpha - \beta_1 \alpha^2 - \beta_2 \alpha^3 - \dots.$$

La (RGE) è una ODE del I ordine per la cui soluzione abbiamo bisogno di un dato iniziale $\alpha(\mu_0^2)$ con lo scale μ_0^2 assegnata.

Supponiamo di avere una soluzione di (RGE) di piccolo coupling, quando

$$\frac{d}{d \log \mu^2} \alpha(\mu^2) \sim -\beta_0 \alpha(\mu^2)^2,$$

e mettiamoci vicino a μ_0^2 : $\alpha(\mu_0^2) \ll 1$, allora avremo il seguente andamento.



Quando per $\beta_0 < 0$, $\alpha(\mu^2)$ cresce con μ^2 , mentre per $\beta_0 > 0$, $\alpha(\mu^2)$ decresce con μ^2 , quando saliamo con l'energia e' assurdo che rimaneremo in regime perturbativo.

In QED avviene che della self-energia del fotone risulta che

$$\text{Diagramma: } \text{fotone} \rightarrow \text{fotone} \text{ (loop con } e^- \text{ e } e^+) \rightarrow \text{fotone} \quad \leadsto \quad \beta_0 = -\frac{1}{3\pi} < 0.$$

In QCD abbiamo due contributi: il primo e' simile alla QED ma'

$$\sum_f \text{Diagramma: } \text{gluone} \rightarrow \text{gluone} \text{ (loop con } q_f \text{ e } \bar{q}_f) \rightarrow \text{gluone} \quad \leadsto \quad \beta_0^q = -\frac{1}{3\pi} \text{Tr} N_f < 0,$$

mentre il secondo viene dal termine

$$\text{Diagramma: } \text{gluone} \rightarrow \text{gluone} \text{ (loop con } g) \rightarrow \text{gluone} \quad \leadsto \quad \beta_0^g = +\frac{11}{12\pi} C_A > 0,$$

che ha un effetto di antiscreening dovuto alle curve del gluone. Emerge dunque che

$$\beta_0^{\text{QCD}} = \frac{1}{12\pi} (11 N_c - 2 N_f) > 0 \iff N_f \leq 16,$$

quando α_s diminuisce a grandi energie o piccole distanze dando luogo alla LIBERTA' ASINTOTICA. Tale circostanza e' estremamente importante perché significa che a grandi energie gli adroni si comportano come particelle libere

o meglio come potenze debolmente interagenti che possono essere studiate bene con l'approccio perturbativo.

Le (RGE) al primo ordine può essere facilmente scritta

$$\begin{aligned} \frac{d}{d \log \mu^2} \log \alpha(\mu^2) &= -\beta_0 \alpha(\mu^2) \\ \Rightarrow \int_{\alpha(\mu_0^2)}^{\alpha(\mu^2)} \frac{d\bar{\alpha}}{\bar{\alpha}^2} &= -\beta_0 \int_{\mu_0^2}^{\mu^2} \frac{d\bar{\mu}^2}{\bar{\mu}^2} \\ \Rightarrow -\frac{1}{\alpha(\mu^2)} + \frac{1}{\alpha(\mu_0^2)} &= -\beta_0 \log \frac{\mu^2}{\mu_0^2} \\ \Rightarrow \frac{\alpha(\mu_0^2)}{\alpha(\mu^2)} &= 1 + \beta_0 \alpha(\mu_0^2) \log \frac{\mu^2}{\mu_0^2} \\ \Rightarrow \alpha(\mu^2) &= \frac{\alpha(\mu_0^2)}{1 + \beta_0 \alpha(\mu_0^2) \log \frac{\mu^2}{\mu_0^2}}, \end{aligned}$$

quindi ad ordini superiori in $\alpha(\mu_0^2)$ diventa

$$\alpha(\mu^2) = \frac{\alpha(\mu_0^2)}{1 + \beta_0 \alpha(\mu_0^2) \log \frac{\mu^2}{\mu_0^2}} \left[1 + O(\alpha(\mu_0^2)) \right],$$

scrittura che ha senso a patto di avere $\alpha(\mu_0^2) < 1$.

Tipicamente scegliamo $\mu_0 = M_Z \sim 90 \text{ GeV}$ che è un dato che misureremo a misurare con ottima precisione.

L'espressione di $\alpha_s(\mu^2)$ a un loop diverge per una certa scala (lance): $\Lambda_{\text{QCD}}^2 \mid \alpha_s(\Lambda_{\text{QCD}}^2) = \infty$, esse

$$1 + \beta_0 \alpha_s(\mu_0^2) \log \frac{\Lambda_{\text{QCD}}^2}{\mu_0^2} = 0,$$

quando segue che il POLO (GHOST) DI LANDAU vale

$$\Lambda_{\text{QCD}} = \mu_0 \exp \left\{ -\frac{1}{2\beta_0 \alpha_S(\mu_0^2)} \right\},$$

anche noto come SCALA FONDAMENTALE DELLA QCD, essendo quella su cui l'approccio perturbativo non è più valido. In realtà dovrebbe essere la scala alla quale $\alpha(\mu^2) = O(1)$ e non quella a cui diverge ma per convenzione ci riferiamo a Λ_{QCD} come tale perché le due sono dello stesso ordine.

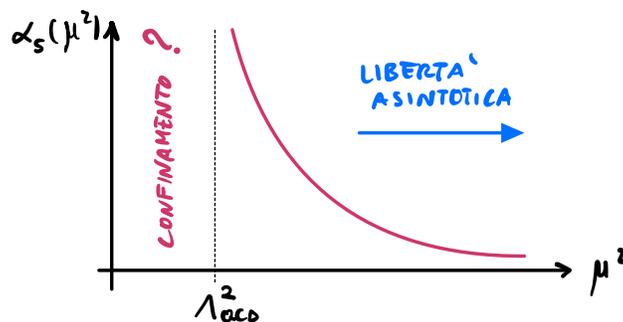
Dimostrando l'ultima relazione abbiamo che

$$\alpha_S(\mu_0^2) = \frac{1}{\beta_0 \log \frac{\mu_0^2}{\Lambda_{\text{QCD}}^2}},$$

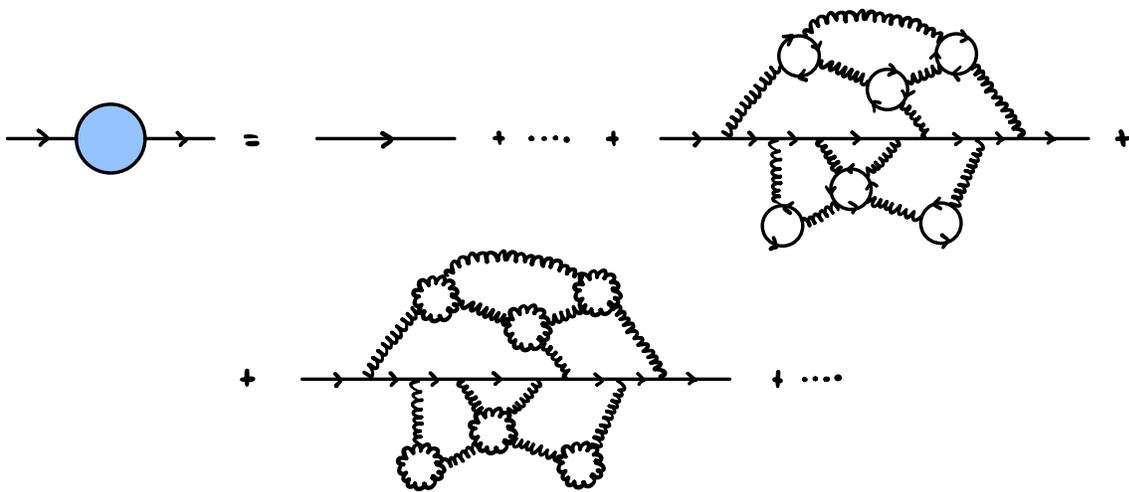
che può essere vista come un modo equivalente di descrivere il running delle costanti di accoppiamento α_S (al primo ordine):

$$\alpha_S(\mu^2) = \frac{1}{\beta_0 \log \frac{\mu^2}{\Lambda_{\text{QCD}}^2}}.$$

Il risultato ad ogni modo ha il seguente andamento

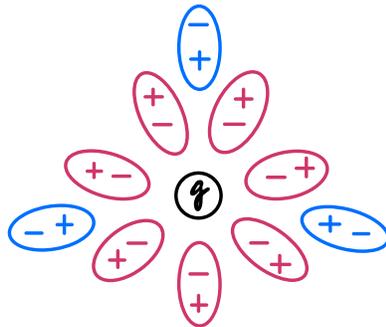


La regione $\mu^2 < \Lambda_{\text{QCD}}^2$ non può essere trattata con l'approccio perturbativo ma così è compatibile col confinamento. Λ_{QCD}^2 è il regime perturbativo che l'interazione forte diventa via via sempre forte. Abbiamo quindi una forte non decorrenza delle costanti del confinamento che ricordiamo non è ad oggi dimostrato rigorosamente ma tende ad essere il principio primo. Enosticamente possiamo dire la stessa interpretazione data in QED, cioè preso un quark nel vuoto, questo autointeragisce con se stesso.



Da un lato abbiamo delle coppie virtuali $q\bar{q}$ che si comportano come dipoli di colore, un totale analogo con e^+e^- in QED, agendo come schermi. Dall'altro lato, poiché anche i gluoni hanno carica di colore allora i gluoni virtuali creati portano via al quark un'azione della carica di colore e questi sono sempre più numerosi che si avvicinano o aumentano l'energia; ne ris

molto in effetto di antiscreening in contrapposizione con quello di screening delle coppie $q\bar{q}$ che appunto viene mascherato.



In conclusione abbiamo imparato che in QFT, dopo avere normalizzato la teoria non è più possibile parlare di un valore assoluto di una costante di accoppiamento, bensì, partendo da un input sperimentale è possibile prevedere come il coupling dipenda dalla scala a cui lo osserviamo. Questo input sperimentale viene per ottenere la $\alpha_s(\mu^2)$ che è un parametro fondamentale della teoria ma non può essere predetto da essa.

In QED abbiamo una scala naturale di input che è quella di bassa energia su quanto l'elettrone può essere osservato come libero (quasi). Abbiamo infatti il limite statico su cui $\mu \lesssim m_e$ con $\mu \rightarrow 0$. Ad esempio se uno scattering Thomson non relativistico troviamo $\alpha = \frac{1}{137}$ e poi dal calcolo di β troviamo $\alpha(\mu^2)$, dopo di che per $\mu \sim m_e$ ad esempio troviamo $\alpha(m_e^2) \sim \frac{1}{129}$, quindi

è cresciuta ma siamo ancora in regime perturbativo.
 Dunque qui possiamo avere un polo del Landau Λ_{QED}^2
 tale che $\alpha(\Lambda_{\text{QED}}^2) = \infty$ e questo vale, a un loop,

$$\Lambda_{\text{QED}} = \mu_0^2 \exp\left\{\frac{3\pi}{2\alpha(\mu_0^2)}\right\} \sim 10^{280} \text{ eV},$$

completamente fuori scala rispetto a ciò che potremo
 mai misurare: oggi LHC arriva a 10^{13} eV e comunque
 oltre $M_p \sim 10^{28}$ eV abbiamo bisogno di una teoria di
 gravità quantistica.

In QCD non abbiamo mai quark o gluoni liberi, a bas=
 se empirica non abbiamo neanche modo di applicare l'ap=
 processo perturbativo. Pensavamo un'assemblea sperimentale
 alle scale finora Q^2 e confrontarla con con le predi=
 sione teorica che dipendeva da Q^2 , μ^2 e $\alpha_s(\mu^2)$,

$$O_{\text{EXP}}(Q^2) = O_{\text{TH}}(\alpha_s(\mu^2), \mu^2; Q^2),$$

dopo di che fissare μ^2 e dedurre $\alpha_s(\mu^2)$.

Un'alternativa a calcolare effettivamente $\alpha_s(\mu^2)$, per calco=
 lare una assemblea O'_{TH} , pensiamo invertire le relazio=
 ni precedenti esprimendo $\alpha_s(\mu^2)$ come funzione di
 $O_{\text{EXP}}(Q^2)$ e scrivere

$$O'_{\text{TH}} = O'_{\text{TH}}(O_{\text{EXP}}(Q^2), Q^2; Q'^2).$$

Per fissare le scale consideriamo l'esempio di una es=
 =

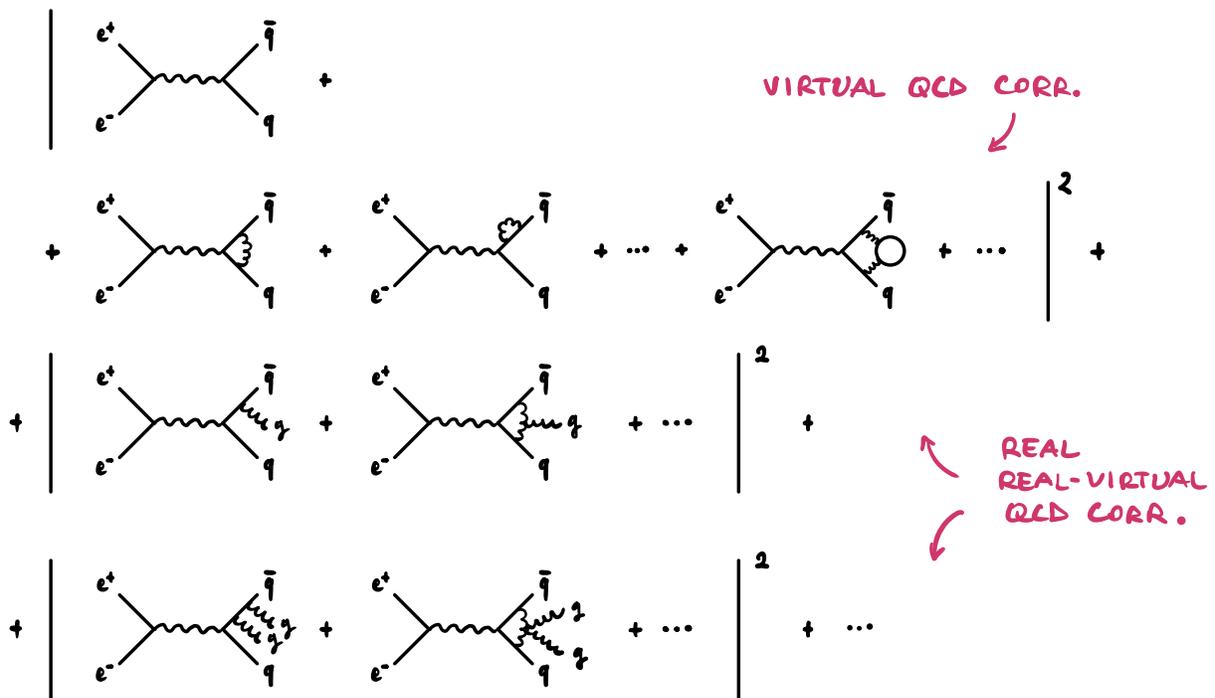
simile adimensionale come

$$R_{e^+e^-} = \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow h)}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)},$$

nel limite di alte energie $\sqrt{s} \gg m_q$, quando invece
 come sola forza proprio $\sqrt{s} : Q^2 = s$. Essendo $R_{e^+e^-}$ ad-
 imensionale ci aspettiamo allora che non dipenda da Q in
 quanto invece solo un gioco. A livello albero c'è vero,
 infatti abbiamo visto che

$$R_{e^+e^-} \sim N_c \sum_f e_f^2,$$

tuttavia ad ordini superiori abbiamo una situazione
 differente



Al secondo ordine su α_s emerge la prima divergenza UV (se pensiamo solo alle correzioni di QCD) e troviamo

$$\begin{aligned} R_{e^+e^-} &= N_c \sum_f e_f^2 \left(1 + \frac{\alpha_B}{\pi} + \alpha_B^2 \beta_0 \log \frac{\Lambda_{UV}^2}{Q^2} + \dots \right) = \\ &= N_c \sum_f e_f^2 \left\{ 1 + \alpha_s(\mu^2) \left[\frac{1}{\pi} + \alpha_s(\mu^2) \beta_0 \log \frac{\mu^2}{Q^2} + \dots \right] \right\} \end{aligned}$$

con la consueta definizione

$$\alpha_s(\mu^2) \equiv \alpha_B \left(1 + \alpha_B \beta_0 \log \frac{\Lambda_{UV}}{\mu^2} + \dots \right).$$

Capivamo allora che $R_{e^+e^-}$ dipende dalla scala Q^2 ma non è invariante rispetto alla scala di renormalizzazione. Dopo di che sceglieremo μ in modo che $\mu^2 = O(Q^2)$, così da tenere bassi i logaritmi nello sviluppo perturbativo, e compieremo l'identificazione

$$R_{e^+e^-}^{\text{EXP}}(Q^2) = R_{e^+e^-}^{\text{TH}}(\alpha_s(\mu^2), \mu^2; Q^2)$$

grazie alle quale possiamo estrarre α_s

$$\alpha_s(Q^2) = \alpha_s(R_{e^+e^-}^{\text{EXP}}(Q^2), Q^2)$$

da utilizzare per calcolare nuove osservabili.

Prima precisazione perché $R_{e^+e^-}$ è adimensionale allora dipende dal rapporto Q^2/μ^2 ma allo stesso tempo non può dipendere da μ^2 in quanto arbitrario, perciò

$$\begin{aligned} 0 &= \mu^2 \frac{d}{d\mu^2} R_{e^+e^-}^{\text{TH}} \\ &= \mu^2 \frac{\partial}{\partial \mu^2} R_{e^+e^-}^{\text{TH}} + \mu^2 \frac{\partial R_{e^+e^-}^{\text{TH}}}{\partial \alpha_s} \frac{\partial \alpha_s}{\partial \mu^2} = \end{aligned}$$

$$= \left[\mu^2 \frac{\partial}{\partial \mu^2} + \alpha_s(\mu^2) \beta(\alpha_s) \frac{\partial}{\partial \alpha_s} \right] R_{\text{ete}}^{\text{TH}},$$

generalizzato in generale

$$\frac{\partial}{\partial \log \mu^2} O = -\beta(\alpha_s) \frac{\partial}{\partial \log \alpha_s} O,$$

che è l' EQUAZIONE DEL GRUPPO DI RINORMALIZZAZIONE PER OSSERVABILI FISICHE, a patto di trascurare le masse e riflette il fatto che ordine per ordine in teoria delle perturbazioni le osservabili fisiche non devono dipendere dalla scala di rinormalizzazione μ^2 .

Passiamo ora a discutere la REGOLARIZZAZIONE DIMENSIONALE, (DR), una tecnica che ci permette di regolarizzare la teoria preservando l'invarianza di gauge e di Lorentz nei passaggi intermedi, a differenza del cut-off o massa. L'idea consiste sostanzialmente nel fare il prolungamento analitico dello spaziotempo 4D.

Esattamente abbiamo la seguente situazione

$$\alpha_B \int_p \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2)^2} \xrightarrow{\text{DR}} \alpha_B \mu_0^{4-D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{(k^2)^2} \sim \alpha_B \mu_0^{4-D} \int \frac{d^D k}{k} k^{-2\epsilon},$$

dove $D = 4 - 2\epsilon : \epsilon \ll 1$, quindi l'integrale è regolamentato.

La quantità μ_0 è una SCALA DI REGOLARIZZAZIONE necessaria per rimanere con α_B adimensionale. Nella regione UV allora, introducendo la scala di rinormalizzazione μ , abbiamo che l'integrale ha un andamento del tipo

$$\alpha_B \mu_0^{2\epsilon} \int_{\mu}^{\infty} \frac{d^D k}{k} k^{-2\epsilon} = \alpha_B \mu_0^{2\epsilon} \frac{\mu^{-2\epsilon}}{2\epsilon},$$

così la divergenza UV è nel polo in $\epsilon=0$.

Pensiamo per esempio le rinormalizzazioni: partiamo da

$$\alpha_B \left[1 + \alpha_B \mu_0^{2\epsilon} \beta_0' \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{(k^2)^2} + O(\alpha_B^2) \right] = \textcircled{*}$$

e definiamo

$$\alpha(\mu^2) \equiv \alpha_B \left[1 + \beta_0 \alpha_B \frac{\mu_0^{2\epsilon}}{\mu^{2\epsilon}} \frac{1}{\epsilon} F(\epsilon) + O(\alpha_B^2) \right],$$

con $F(\epsilon) = 1 + O(\epsilon)$, quando risulta che

$$\textcircled{*} = \alpha(\mu^2) \left[1 - \beta_0 \alpha(\mu^2) \frac{\mu_0^{2\epsilon}}{\mu^{2\epsilon}} \frac{F(\epsilon)-1}{\epsilon} + \beta_0 \alpha(\mu^2) \mu_0^{2\epsilon} \log \frac{\mu^2}{\mu_0^2} + O(\alpha(\mu^2)^2) \right],$$

quando per $\epsilon \rightarrow 0$ troviamo che

$$\textcircled{*} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \alpha(\mu^2) \left[1 + \beta_0 \alpha(\mu^2) \log \frac{\mu^2}{\mu_0^2} + O(\alpha(\mu^2)^2) \right],$$

così la rinormalizzazione avviene nel cut-off.

Le differenti scelte di $F(\epsilon)$ sono dette: SCHEMI DI RINORMALIZZAZIONE, di cui citiamo due esempi

$$F_{MS}(\epsilon) = 1$$

$$F_{\overline{MS}}(\epsilon) = \frac{(4\pi)^\epsilon}{\Gamma(1-\epsilon)} = 1 + \epsilon (\log 4\pi - \gamma_E),$$

dove MS sta per MINIMAL SUBTRACTION e \overline{MS} sta invece per MODIFIED MINIMAL SUBTRACTION, con γ_E che è la nota COSTANTE DI EULERO-MASCHERONI, $\gamma_E \sim 0.577$. Ovviamente ad ogni schema corrisponde un diverso coupling rinormalizzato

sato e in generale amiamo la relazione

$$\mu_0^{2\varepsilon} \alpha_B = \mu^{2\varepsilon} \alpha(\mu^2) Z_1(\alpha(\mu^2), \varepsilon),$$

dove in Z_1 abbiamo n poli in ε ed eventuali termini costanti in μ^2 .

Conclusa questa parentesi, procediamo ad discutere il RUNNING DELLE MASSE. Finora abbiamo sempre trascurato le masse ponendo nel limite di alte energie ma in generale \mathcal{L}_{QCD} dipende dalle masse m_f , $f=1, \dots, N_f$, che compaiono in m_B (bare). Scrivete la DR abbiamo che, un analogo con quanto fatto per α_s ,

$$\mathcal{L}_{QCD}(\alpha_B, m_B, \varepsilon) = \tilde{\mathcal{L}}_{QCD}(\alpha(\mu^2), m(\mu^2), \varepsilon=0),$$

con $D = 4 - 2\varepsilon$: $\varepsilon \ll 1$ e

$$m_B = m(\mu^2) Z_m(\alpha(\mu^2), \varepsilon),$$

con

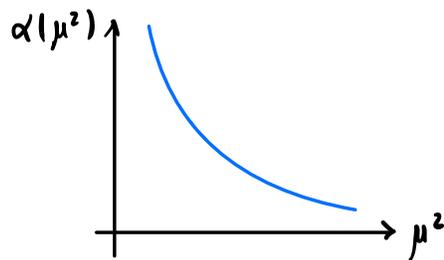
$$Z_m = 1 - \gamma_m^{(0)} \frac{\alpha(\mu^2)}{\varepsilon}.$$

Quando $m(\mu^2)$ è la massa normalizzata anche se abbiamo piacere che un QCD non è una massa al polo in quanto sappiamo che n quarks non appaiono negli stati esterni a cause delle adimensionamenti (tranne che per il top t che decade prima).

Quindi qui abbiamo una (RGE), ossia

$$\frac{d}{d \log \mu^2} \log m(\mu^2) = \gamma_m(\alpha(\mu^2)) = - \left[\gamma_m^{(0)} \alpha(\mu^2) + \gamma_m^{(1)} \alpha(\mu^2)^2 + \dots \right]$$

e risulta che $\gamma_m^{(0)} = \frac{1}{\pi} > 0$ (come β_0), quindi a grandi energie la massa dei quark tende a zero.



Proviamo a risolvere questa (RGE) per la massa

$$\frac{\mu^2}{m} \frac{dm}{d\mu^2} = \gamma_m(\alpha) \Rightarrow \int_{m(\mu_0^2)}^{m(\mu^2)} \frac{d\bar{m}}{\bar{m}} = \int_{\mu_0^2}^{\mu^2} \frac{d\bar{\mu}^2}{\bar{\mu}^2} \gamma_m(\alpha),$$

ma poiché

$$\frac{d\mu^2}{\mu^2} = \frac{d\alpha}{\alpha \beta(\alpha)},$$

allora troviamo che

$$\int_{m(\mu_0^2)}^{m(\mu^2)} \frac{d\bar{m}}{\bar{m}} = \int_{\alpha(\mu_0^2)}^{\alpha(\mu^2)} \frac{\gamma_m(\alpha)}{\alpha \beta(\alpha)},$$

quindi

$$\log \frac{m(\mu^2)}{m(\mu_0^2)} = \int_{\alpha(\mu_0^2)}^{\alpha(\mu^2)} \frac{\gamma_m(\alpha)}{\alpha \beta(\alpha)},$$

per cui

$$m(\mu^2) = m(\mu_0^2) \exp \int_{\alpha(\mu_0^2)}^{\alpha(\mu^2)} d\alpha \frac{\gamma_m(\alpha)}{\alpha \beta(\alpha)} ;$$

a questo punto ci pensiamo al primo ordine

$$\gamma_m(\alpha) \sim -\gamma_m^{(0)} \alpha$$

$$\beta(\alpha) \sim -\beta_0 \alpha$$

e troviamo che

$$m(\mu^2) = m(\mu_0^2) \exp \left\{ \frac{\gamma_m^{(0)}}{\beta_0} \int_{\alpha(\mu_0^2)}^{\alpha(\mu^2)} d\alpha \frac{1}{\alpha} \right\} = m(\mu_0^2) \left[\frac{\alpha(\mu^2)}{\alpha(\mu_0^2)} \right]^{\frac{\gamma_m^{(0)}}{\beta_0}},$$

ma in QCD abbiamo che $\gamma_m^{(0)}/\beta_0 > 0$ e per $\mu > \mu_0$ abbiamo che $\alpha(\mu^2) < \alpha(\mu_0^2)$, perciò $m(\mu^2) < m(\mu_0^2)$.

Le γ_m è anche detta DIMENSIONE ANOMALA.

Fundamentalmente questo discorso può avvenire anche in QED ma con effetti minori e quindi del tutto trascurabili.

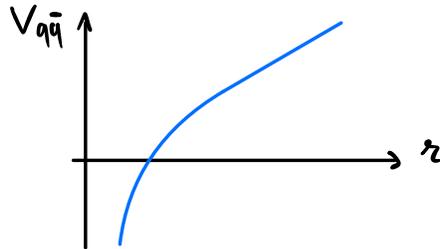
A conclusione abbiamo un accenno al confinamento dei q. Sappiamo che in teoria dei campi non ne esiste una dimostrazione formale ma questo dovremmo risolvere esattamente la QCD mentre ad oggi sappiamo trattarla solo in regime perturbativo. Empiricamente abbiamo che per una coppia $q\bar{q}$ c'è un'interazione descritta da un potenziale del tipo

$$V_{q\bar{q}} \sim C_F \left[\frac{\alpha_s(r)}{r} + \dots + \sigma r \right],$$

però

$$V_{q\bar{q}} \sim \begin{cases} \frac{\alpha}{r} & r \ll \frac{1}{\Lambda_{QCD}} \\ \sigma r & r \gg \frac{1}{\Lambda_{QCD}} \end{cases},$$

con un plot del tipo seguente.



Quo' che avviene dunque e' che a bassa energia q e \bar{q} sono legati fra loro, mentre salendo con l'energia si arriva ad una soglia oltre la quale si crea una coppia q' e \bar{q}' tale che il protono si lega a \bar{q} e si scconda a q .



MODELLO A PARTONI

L'approccio della pQCD per descrivere le forze adroniche dei processi hard-scattering inclusivi è basato sulle libertà asintotica (AF) e il modello a partoni (PM).

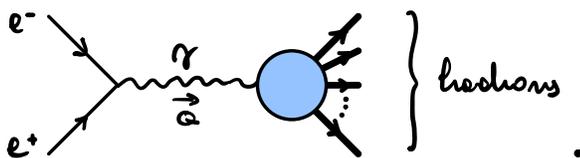
I PARTONI sono i quarks e i gluoni. Con l'espressione HARD SCATTERING intendiamo che $Q \gg M_{had} \sim \Lambda_{QCD} \sim 1 \text{ GeV}$,

condizione necessaria per essere in regime di AF, cioè $\alpha_s \ll 1$.

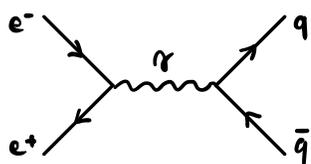
Con INCLUSIVO intendiamo che possiamo ricorrere alla PARTON MODEL PICTURE, cioè la possibilità di fattorizzare le forze a lunga e corte distanza.

ES.:

Consideriamo il processo $e^+e^- \rightarrow \text{anything}$

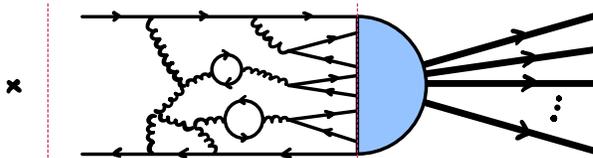


Oltre a quelle più basse (almeno) abbiamo che



$$\sigma_0 = \frac{4\pi\alpha^2}{3Q^2} N_c \sum_f e_f^2$$

LOWEST ORDER QCD
(α_s^0)



$$\sim \alpha_s^m \sim \left(\frac{1}{\log \frac{Q^2}{\Lambda_{QCD}^2}} \right)^m \sim O\left(\left| \frac{\Lambda_{QCD}}{Q} \right|^p \right)$$

HIGHER ORDER
pQCD

NON PERTURB.
QCD CORR.

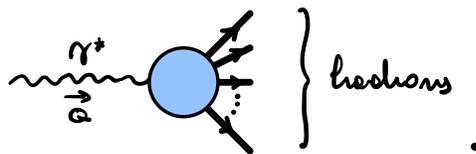
dove l'ultimo termine rappresenta il contributo di adione massiccio, il quale, essendo $p > 0$, nel limite $Q \gg \Lambda_{QCD}$, è trascurabile rispetto alle correzioni perturbative.

L'idea del modello a portoni è che la forma dell'adione serve come ad una scala ancora diversa rispetto a quella del regime hard che stiamo studiando e perciò fattissimo e diventa trascurabile se sono inclusi, così accettiamo qualunque prodotto di adionizzazione

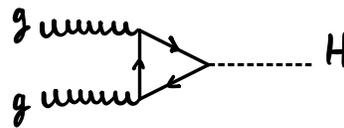
$$\sigma_{e^+e^- \rightarrow h} = \sigma_{e^+e^- \rightarrow part} \left[1 + O\left(\left(\frac{\Lambda_{QCD}}{Q}\right)^p\right) \right].$$

Come per il confinamento anche per il PM non esiste una dimostrazione rigorosa e generale in teoria dei campi. Tuttavia se il modello è consistente e fornisce previsioni quantitative in accordo con dati sperimentali.

Discutiamo allora il processo $e^+e^- \rightarrow h$ analizzando agli ordini superiori in pQCD. Ovviamente lo stato iniziale non è colorato, quindi dal punto di vista della QCD non abbiamo emissioni di portoni, perciò possiamo pensare al de-
 celeramento



Per distinguere i vari contributi introduciamo le notazioni LO (leading order), NLO (next to leading order), NNLO (next to next to leading order) e così via. Questo perché in QCD i primi contributi ad un processo avvengono ad ordini diversi in base al processo: per $e^+e^- \rightarrow h$ al LO è all'ordine α_s^0 ma, ad esempio, per la produzione di H invece al LO della sezione d'urto è all'ordine α_s^2 .



Per $e^+e^- \rightarrow h$ allora al LO abbiamo

$$\sigma_0 = \frac{4\pi\alpha^2}{3Q^2} N_c \sum_f e_f^2,$$

chiaramente è di ordine α_s^0 . Passiamo al NLO, partendo dalle correzioni reali

$$|\mathcal{M}_R|^2 = \left| \text{diagram 1} + \text{diagram 2} \right|^2 = \text{diagram 3} + \text{diagram 4} + (1 \leftrightarrow 2);$$

per le correzioni virtuali invece abbiamo alcuni termini di interferenza in quanto abbiamo

$$\left| \text{diagram 5} \right|^2 = \left| \text{diagram 6} + \text{diagram 7} + \text{diagram 8} + \text{diagram 9} + \dots \right|^2,$$

quello stesso di ordine α_3 tutti i proiettili tra α_0 e α dovranno di ordine α_3 :

$$\left(\text{diagram 1} + \text{diagram 2} + \text{diagram 3} \right) \cdot \text{diagram 4} + \text{C.C.} =$$

$$= 2 \text{Re} \left\{ \text{diagram 5} + \text{diagram 6} + \text{diagram 7} \right\}.$$

Introduciamo le variabili costruite dalle parti reali, nel
 l'ipotesi in cui $p_1^2 = p_2^2 = 0 \Leftrightarrow m_q^2 = 0$ in questo, al
 solito, $Q^2 \gg m_q^2$; abbiamo allora i 4-impulsi $P_i^\mu = (E_i, \vec{P}_i)$
 che devono essere tali che

$$P_1 + P_2 + P_3 = Q$$

e introduciamo le FRAZIONI DI ENERGIA

$$X_i = \frac{2 P_i \cdot Q}{Q^2},$$

che, nel sistema del centro di massa ($Q = (\sqrt{s}, 0)$),
 diventano

$$X_i = \frac{E_i}{\sqrt{s}/2},$$

quindi dalla conservazione dell'energia, segue che

$$X_1 + X_2 + X_3 = \frac{2 \sum_i P_i \cdot Q}{Q^2} = 2,$$

quindi solo due sono indipendenti; introduciamo per
 degli angoli, per esempio

$$2p_1 p_3 = (p_1 + p_3)^2 = (Q - p_2)^2 = Q^2 - 2Q \cdot p_2 = Q^2(1 - x_2),$$

ma nel CM forma diventa

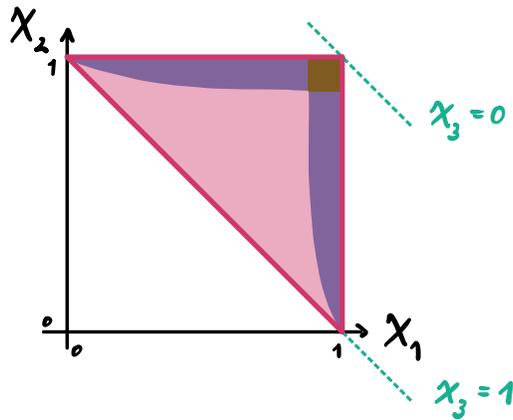
$$2p_1 p_3 = 2E_1 E_3 (1 - \cos \theta_{13}),$$

perciò $\theta_{13} \rightarrow 0 \Rightarrow x_2 \rightarrow 1$, infatti

$$1 - x_2 = \frac{x_1 x_3}{2} (1 - \cos \theta_{13})$$

$$1 - x_1 = \frac{x_2 x_3}{2} (1 - \cos \theta_{23}),$$

da cui vediamo che $x_i \in (0, 1)$. Possiamo eseguire un plot di Dalitz



ma cui vediamo che le regioni che lega x_3 e x_1 , x_2 vincola le regioni finca al triangolo superiore in dentro; inoltre le regioni più scure indicano che x_1 o x_2 sono circa 1, quando θ_{13} o θ_{23} è circa nil lo, esse sono in una regione di emissione collineare. Infine il quadrilatero giallo rappresenta le regioni in

con $x_3 \rightarrow 0$, essa è la regione in cui il gluone ha energia minima: soft gluon emission.

Lo descriviamo quanto vale il contributo alle sezioni d'urto di queste emissioni reali.

$$\sigma_R = \int dx_1 dx_2 dx_3 \delta(2 - x_1 - x_2 - x_3) |\mathcal{M}_R(x_1, x_2, x_3)|^2,$$

dove si può vedere che

$$|\mathcal{M}_R(x_1, x_2, x_3)|^2 = \sigma_0 C_F \frac{\alpha_s}{2\pi} \frac{x_1^2 + x_2^2}{(1-x_1)(1-x_2)}$$

che è singolare nei limiti $x_1 \rightarrow 1$ o $x_2 \rightarrow 1$, che sappiamo corrispondere ad emissioni soffici o collineari, quindi a basse energie e piccoli momenti come DIVERGENZE IR. Sono segnali di fisica a lunga distanza che sappiamo non essere sotto il nostro controllo e quindi apparentemente sembra essere un disastro per il modello a perturbazioni. Potremmo pensare di risolvere reintroducendo le masse dei quark che a loro volta introdurrebbero un cut-off fisico: detto $\epsilon \sim \frac{m_q}{Q} \sim \frac{\Lambda_{QCD}}{Q}$ allora

$$\alpha_s \int_0^1 dx \frac{1}{1-x} \rightsquigarrow \alpha_s \int_0^{1-\epsilon} dx \sim \alpha_s \log \frac{1}{\epsilon} \sim \alpha_s \log \frac{Q}{\Lambda_{QCD}}$$

ma d'altro canto sappiamo che

$$\alpha_s \sim \frac{1}{\log \frac{Q^2}{\Lambda_{QCD}^2}},$$

quindi avremmo delle correzioni $O(1)$ e infine per α_s

che in tutte le parti non perturbative, mentre, affinché il PM sia applicabile, questi contributi dovrebbero essere power suppressed.

La risoluzione di questa apparente catastrofe nasce nelle considerazioni virtuali che, analogamente alle QED, causano queste divergenze IR. Vediamo come ciò avviene.

Immediatamente osserviamo $|\mathcal{M}_R|^2$, partendo dal fatto che

$$\begin{aligned} X_1^2 + X_2^2 &= 1 - (1 - X_1 - X_2)^2 - 2(1 - X_1)(1 - X_2) = \\ &= 1 + (1 - X_3)^2 - 2(1 - X_1)(1 - X_2), \end{aligned}$$

quindi

$$\frac{X_1^2 + X_2^2}{(1 - X_1)(1 - X_2)} = \frac{1 + (1 - X_3)^2}{(1 - X_1)(1 - X_2)} - 2,$$

poi occorre

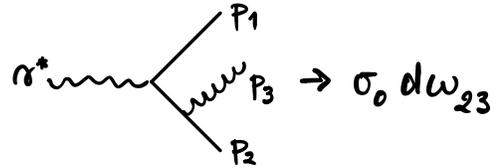
$$\begin{aligned} \frac{1}{(1 - X_1)(1 - X_2)} &= \frac{1}{2 - X_1 - X_2} \left(\frac{1}{1 - X_1} + \frac{1}{1 - X_2} \right) = \\ &= \frac{1}{X_3} \left(\frac{1}{1 - X_1} + \frac{1}{1 - X_2} \right), \end{aligned}$$

allora

$$|\mathcal{M}_R|^2 \sim \text{"non singular"} + \text{"sum of 2 indep. coll./soft emission"},$$

dove il termine non singolare è dovuto all'interferenza: il limite IR è allora un limite classico in quanto servono una molteplicità come somma di probabilità indipendenti.

Quindi per ciascun diagramma abbiamo un contributo σ_i dipendente alla sezione d'urto totale, ad esempio



tale che

$$d\omega_{23} = \frac{d\chi_1 d\chi_3}{1-\chi_1} P_{qq}(\chi_3) = \frac{d\cos\theta_{23}}{1-\cos\theta_{23}} d\chi_3 P_{qq}(\chi_3),$$

dove

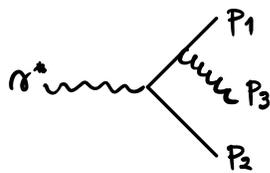
$$P_{qq}(\chi_3) = C_F \frac{\alpha_s}{2\pi} \frac{1+(1-\chi_3)^2}{\chi_3},$$

nota come PROBABILITA' DI ALTARELLI-PARISI, preso' nel limite soffice ($\chi_3 \rightarrow 0$) collineare ($\theta_{23} \rightarrow 0$) abbiamo che

$$d\omega_{23} \sim \frac{d\theta_{23}^2}{\theta_{23}^2} \frac{d\chi_3}{\chi_3} \rightarrow \text{SOFT BREMSSTRAHLUNG SPECTRUM}$$

↳ COLLINEAR SPECTRUM

Analogamente per l'altro caso



basta cambiare lo scambio $1 \leftrightarrow 2$.

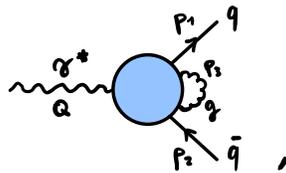
In conclusione abbiamo che la sezione d'urto reale non' data da

$$\begin{aligned} \sigma_R &= \sigma_0 \int_0^1 dX_1 dX_2 dX_3 \delta(2 - X_1 - X_2 - X_3) C_F \frac{\alpha_s}{2\pi} \cdot (-2) + \\ &+ \sigma_0 \int_{-1}^{+1} d\cos\theta_{23} \frac{1}{1 - \cos\theta_{23}} \int_0^1 dX_3 P_{qq}(X_3) \frac{1}{1 - \frac{X_3(1 - \cos\theta_{23})}{2}} + \\ &+ \sigma_0 \int_{-1}^{+1} d\cos\theta_{13} \frac{1}{1 - \cos\theta_{13}} \int_0^1 dX_3 P_{qq}(X_3) \frac{1}{1 - \frac{X_3(1 - \cos\theta_{13})}{2}} , \end{aligned}$$

che nelle ricalcole e tutte nge abbiamo rispettivamente integrato su X_2 e X_1 , ad esempio

$$\int dX_2 \delta(2 - X_1 - X_2 - X_3) \Big|_{1 - X_1 = \frac{X_2 X_3}{2} (1 - \cos\theta_{23})} = \int dX_2 \frac{\delta\left(X_2 - \frac{1 - X_3}{1 - \frac{X_3}{2}(1 - \cos\theta_{23})}\right)}{1 - \frac{X_3}{2}(1 - \cos\theta_{23})} .$$

Altrimenti fra qui abbiamo solo scritto opportunamente il risultato che però è ancora divergente. Passiamo allora al contributo virtuale. In generale dunque abbiamo



il cui contributo alle serree d'into zero' del tipo

$$\int_0^1 dX_1 dX_2 \delta(2 - X_1 - X_2) \int_0^\infty dX_3 |\mathcal{M}_V|^2 ,$$

↗ LOOP INTEGRAL

a me volta per spremmo l'integrale di loop

$$\int_0^\infty dX_3 |\mathcal{M}_V|^2 = \int_1^\infty dX_3 |\mathcal{M}_V|^2 + \int_0^1 dX_3 |\mathcal{M}_V|^2$$

di cui il primo termine ha una divergenza UV curata con la normalizzazione, mentre il secondo ha il medesimo

mo comportamento del contributo reale a meno di un segno e della diversa enumerazione. Il segno opposto deriva dall'unitarietà della teoria mentre la commutazione è diversa in quanto nel caso virtuale necessariamente non c'è un gluone esterno. Risultata allora che

$$\sigma_R + \sigma_V = \text{F.T.} + \sigma_0 \int_{-1}^1 \frac{d \cos \theta_{23}}{1 - \cos \theta_{23}} \int_0^1 dX_3 P_{qg}(X_3) \left[\frac{1}{1 - \frac{X_3}{2}(1 - \cos \theta_{23})} - 1 \right] + (1 \leftrightarrow 2)$$

REAL ↓
VIRTUAL ↓

ma nel limite IR, cioè $\theta_{23} \rightarrow 0$ e/o $X_3 \rightarrow 0$, risulta che

$$\frac{1}{1 - \frac{X_3}{2}(1 - \cos \theta_{23})} - 1 = \frac{\frac{X_3}{2}(1 - \cos \theta_{23})}{1 - \frac{X_3}{2}(1 - \cos \theta_{23})} \sim X_3 \theta_{23}^2,$$

cioè le differenze commutative tende a zero nelle regioni IR e perciò nelle somme d'ordine totale le divergenze IR si cancellano a vicenda lasciando finita la σ_{TOT} . Ne concludiamo che l'approccio delle pQCD può essere costantemente applicato alle somme d'ordine totale di $e^+e^- \rightarrow h$. Per risolvere formalmente questo calcolo si può introdurre un regolatore IR. Ad esempio si può introdurre una massa non fisica per il gluone e definire il parametro $\beta = \frac{m_g^2}{Q^2}$ che, finché diverso da 0, non interferisce con $X_{1,2} = 1$; così facendo troviamo che

$$\sigma_V = \sigma_0 C_F \frac{\alpha_s}{\pi} \left(-\frac{1}{2} \log^2 \beta - \frac{3}{2} \log \beta - \frac{7}{4} + \frac{\pi^2}{6} \right)$$

$$\sigma_R = \sigma_0 C_F \frac{\alpha_s}{\pi} \left(+\frac{1}{2} \log^2 \beta + \frac{3}{2} \log \beta + \frac{5}{2} - \frac{\pi^2}{6} \right),$$

quindi nelle somme delle due le divergenze si cancellano.

no. Un'altra possibilità è ricorrere alle DR ponendo $D = 4 - 2\epsilon$: $\epsilon < 0$ (a differenza del caso UV) con cui tro-
viamo che

$$\sigma_V = \sigma_0 C_F \frac{\alpha_S}{\pi} \left[-\frac{1}{\epsilon^2} - \frac{3}{2\epsilon} - 4 + O(\epsilon) \right]$$

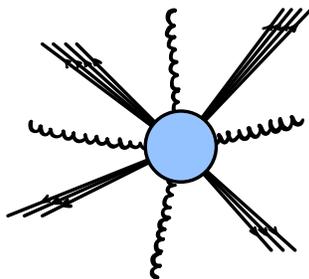
$$\sigma_R = \sigma_0 C_F \frac{\alpha_S}{\pi} \left[+\frac{1}{\epsilon^2} + \frac{3}{2\epsilon} + \frac{19}{4} + O(\epsilon) \right].$$

Entrambi i metodi forniscono lo stesso risultato anche se il primo ha il difetto di rompere l'invarianza di gauge e quindi non va usato per calcoli numerici. In conclusione possiamo finalmente dire che al NLO la sezione d'urto totale sarà

$$\sigma_{TOT} = \sigma_0 \left(1 + \frac{\alpha_S}{\pi} \right).$$

QSS.:

Perché abbiamo due lo spazio delle fasi è piatto e due gli elementi di misura sono piccolati nelle regioni soft/collinear, risulta che possiamo prendere la struttura del tipo σ stato finale adronico: questo è infatti costituito da fasci di adroni collineari, detti JETS, con l'aggiunta di particelle soffici.



Abbiamo appunto la bontà delle pQCD per σ_{TOT} su $e^+e^- \rightarrow h$ ma è naturale chiedersi se ciò è vero per altre osservabili meno inclusive e per altri processi. La risposta è sì grazie all'universalità del comportamento IR e a fatto che la quantità misurata rispetto alcuni criteri di "scarsità".

Vediamo dunque la struttura generale di una predizione in pQCD:

$$\sigma = \sigma_{\text{LO}} + \sigma_{\text{NLO}} + \sigma_{\text{NNLO}} + \dots$$

Al LO abbiamo

$$\sigma_{\text{LO}} = \int_m d\sigma_B : d\sigma_B = d\phi^{(m)} |\mathcal{M}_m^{(\text{tree})}(\{p_i\})|^2 F_J^{(m)}(\{p_i\}),$$

dove $d\phi^{(m)}$ è lo spazio delle fasi per m partoni massless

$$d\phi^{(m)} = \prod_{i=1}^m \frac{d^4 p_i}{(2\pi)^3} \delta_+(p_i^2) \delta^{(4)}(P_{\text{IN}} - \sum_{i=1}^m p_i),$$

per $\mathcal{M}_m^{(\text{tree})}(\{p_i\})$ è l'ampiezza ad albero del processo e $F_J^{(m)}(\{p_i\})$ è una funzione dello spazio delle fasi che definisce l'osservabile fisica in esame.

Al NLO abbiamo

$$\sigma_{\text{NLO}} = \int_{m+1} d\sigma_R + \int_m d\sigma_V,$$

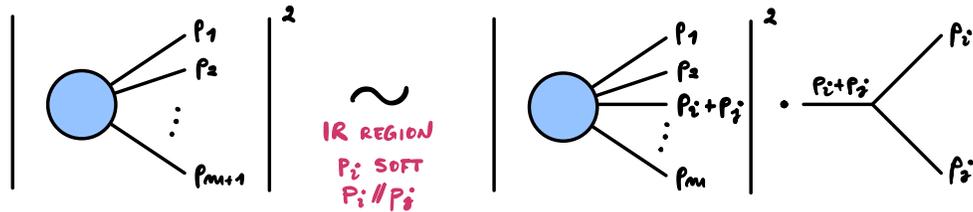
dove

$$d\sigma_R = d\phi^{(m+1)} |\mathcal{M}_{m+1}^{(\text{tree})}|^2 F_J^{(m+1)},$$

$$d\sigma_V = d\phi^{(m)} \left[\mathcal{M}_m^{(1-loop)} \cdot \mathcal{M}_m^{(tree)*} + c.c. \right] F_j^{(m)},$$

avremo che $\int_{m+1} d\sigma_R$ è divergente nella regione IR di $\mathcal{M}_{m+1}^{(tree)}$ dell'integrale sullo spazio delle fasi, mentre $\int_m d\sigma_V$ è divergente nella regione IR di $\mathcal{M}_m^{(1-loop)}$ dell'integrale di loop.

Per l'emissione reale occorre che



$$|\mathcal{M}_{m+1}^{(tree)}(p_1, \dots, p_i, \dots, p_i, \dots, p_{m+1})|^2 \underset{IR}{\sim} |\mathcal{M}_m^{(tree)}(p_1, \dots, p_i + p_j, \dots, p_m)|^2 V_{ij}$$

con V_{ij} che è una funzione numerica, cioè non dipende dalle parti del processo partonico ma dipende solo dalle particelle i e j . Dal esempio nel limite collineare

$$P = p_i + p_j \begin{cases} p_i \sim z(p_i + p_j) = zP \\ p_j \sim (1-z)(p_i + p_j) = (1-z)P, \end{cases}$$

ma con quando tra i e j c'è un angolo $\theta_{ij} \rightarrow 0$, abbiamo

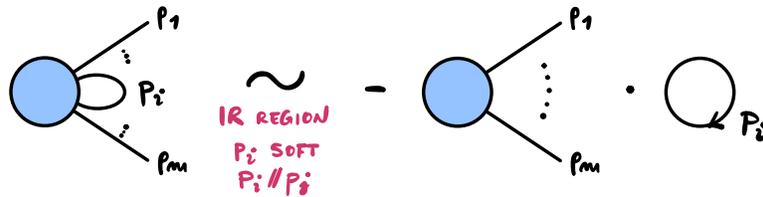
$$V_{ij} = \frac{1}{Q_{ij}^2} P_{ij}(z),$$

dove $P_{ij}(z)$ è la probabilità di splitting collineare, ALTARELLI-PARISI SPLITTING FUNCTION, in $e^+e^- \rightarrow h$ ne abbiamo visto l'esempio seguente

$$q \begin{array}{c} \nearrow q \\ \searrow q \end{array} \rightarrow P_{qq} = C_F \frac{\alpha}{2\pi} \frac{1+z^2}{1-z}.$$

Ci sono formule analoghe per le emissioni soffici, note come FATTORIZZAZIONI EIKONALI, oppure formule che descrivono entrambe le situazioni.

Per l'emissione virtuale invece abbiamo che



$$\mathcal{M}_m^{(1-loop)}(p_1, \dots, p_m) \mathcal{M}_m^{(tree)}(p_1, \dots, p_m)^* + h.c. \underset{IR}{\sim} - |\mathcal{M}_m^{(tree)}(p_1, \dots, p_m)|^2 \int_{loop} V_{ij}$$

Per tanto sommando i due contributi avremo che

$$\sigma_{NLO} = F.T. + \sigma_{NLO}^{IR}$$

dove, trascurando la parte finita, risulta che

$$\sigma_{NLO}^{IR} \sim \sum_{i,j} \int_{\phi_m} d\phi^{(m)} |\mathcal{M}_m^{(tree)}|^2 \int_{i,j} V_{ij} [F_J^{(m+1)}(\dots, p_i, \dots, p_j, \dots) - F_J^{(m)}(\dots, p_i + p_j, \dots)].$$

Avremo allora che la quantità è IR SAFE se abbiamo cancellazione IR, ossia se e solo se

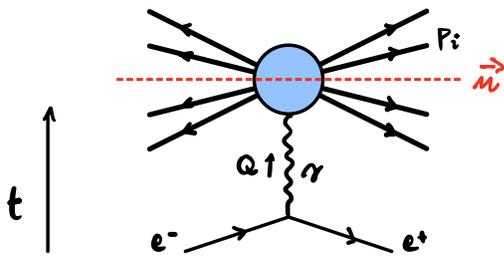
$$F_J^{(m+1)}(\dots, p_i, \dots, p_j, \dots) \underset{IR}{\sim} F_J^{(m)}(\dots, p_i + p_j, \dots).$$

Se ciò è vero allora la pQCD è consistente in quanto le emissioni non perturbative sono power suppressed, cioè del tipo $O((\frac{\Lambda_{QCD}}{Q})^p)$ per qualche $p > 0$, e quindi il nostro calcolo non risente delle forze non perturbative a lunga distanza. Volendo possiamo anche scegliere F_J da

non va IR safe ma con' facendo non passiamo mai ad
 essere una quantità finita che non aumenta di questi con-
 tributi non perturbativi, anche ad altissime energie.

Vediamo ora alcuni esempi di quantità IR safe stu-
 dendo le event shape distributives in $e^+e^- \rightarrow h$.

Partiamo dal THRUST, T , un' osservabile che massimizza
 il momento longitudinale dell'evento e, per n parti-
 celle nello stato finale, è definita come segue



$$T_m \equiv \max_{\vec{n}} \frac{\sum_{i=1}^m |\vec{p}_i \cdot \vec{n}|}{\sum_{j=1}^m |\vec{p}_j|}$$

dopo che la relativa $F_J^{(m)}(\{p_i\})$ sarà data da

$$F_J^{(m)}(\{p_i\}) \equiv \delta(T - T_m),$$

tramite la quale potremo calcolare $\frac{d\sigma}{dT}$. È IR safe?

Se abbiamo un partone soffice, $p_k \rightarrow 0$, allora $T_{m+1} \rightarrow T_m$,
 quando T_m è IR (soft) safe. Per due partoni collineari
 i e j , tali che $\vec{p}_i = z\vec{p}$ e $\vec{p}_j = (1-z)\vec{p}$, al numeratore
 abbiamo

$$|\vec{p}_i \cdot \vec{n}| + |\vec{p}_j \cdot \vec{n}| = (z + 1 - z) |\vec{p} \cdot \vec{n}| = |(\vec{p}_i + \vec{p}_j) \cdot \vec{n}|,$$

e per il denominatore abbiamo che

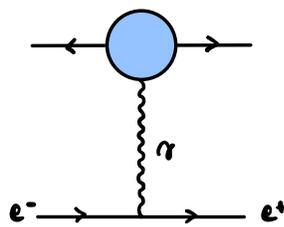
$$|\vec{p}_i| + |\vec{p}_j| = (z+1-z)|\vec{p}| = |\vec{p}_i + \vec{p}_j|,$$

può:

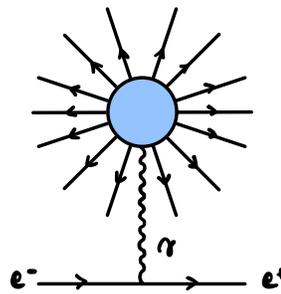
$$T_{m+1}(\dots, \vec{p}_i, \dots, \vec{p}_j, \dots) \rightarrow T_m(\dots, \vec{p}_i + \vec{p}_j, \dots)$$

e quindi T_m è IR (collinear) safe. Per tanto T_m è IR safe e possiamo calcolare usando i poteri nello stato finale.

Si può vedere che $T_m \in (\frac{1}{2}, 1)$, dove $T_m = 1$ quando abbiamo due prodotti back to back, mentre $T_m = \frac{1}{2}$ quando abbiamo una distribuzione isotropa e quindi nei prodotti scelti prendiamo metà degli impulsi longitudinali.



2-JET (PENCIL LIKE) EVENT

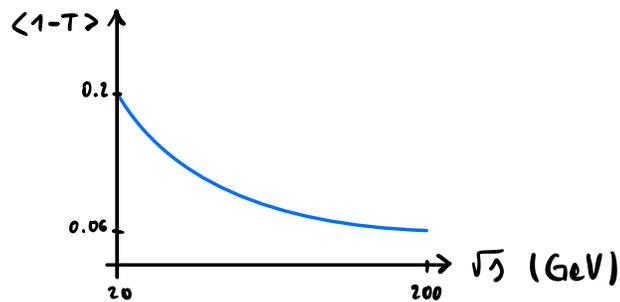


ISOTROPIC EVENT

N.B.: Questi diagrammi non sono diagrammi di Feynman ma solo diagrammi per visualizzare la distribuzione angolare dei prodotti finali del processo $e^+e^- \rightarrow h$.

Applicando il modello a poteri possiamo ad esempio calcolare $\langle T \rangle$ in funzione dell'energia del CM (\sqrt{s}) e τ_{tr}

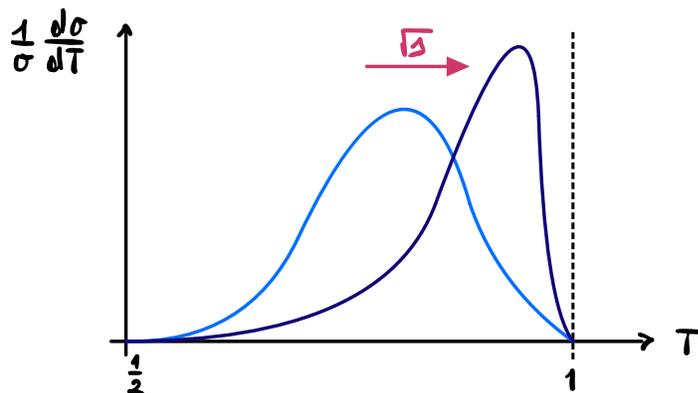
vanno in aumento decrescente per $\langle 1-T \rangle$.



Vedremo anche che $T=1$ o $T=\frac{1}{2}$ sono due valori limite e che in una situazione realistica abbiamo valori intermedi.

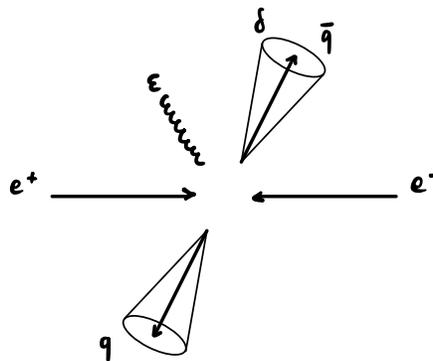
Il PH prevede quindi che per alte energie $\langle T \rangle \rightarrow 1$ ed eventuali discostamenti da 1 dipendono da α_s ma questo deve essere almeno l'emissione di un gluone oltre ai $q\bar{q}$; per tanto la misura del discostamento da $\langle T \rangle$ da 1 nel limite di alte energie consente di determinare α_s .

Il primo passo per calcolare $\frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma}{dT}$ è vedere quindi la distribuzione di T al variare di \sqrt{s} : a conferma di quanto detto prima il picco della distribuzione cresce al crescere di \sqrt{s} , tendendo a 1 per $\sqrt{s} \rightarrow \infty$.



Ulteriormente, per $\sqrt{s} \rightarrow \infty$, $\alpha_s \rightarrow 0$ e quando la distribuzione tende a $\delta(1-T)$.

Un'altra osservazione importante è la JET CROSS SECTION, un quanto osservato visto da n diversi stati finali di QCD sono costituiti da getti di adroni collimati e particelle soffice sparse. Occorre quindi dare una definizione formale di jet, IR safe, detta JET ALGORITHM, attraverso la quale possiamo assegnare le particelle ai jet; la definizione deve inoltre essere facilmente implementabile nelle analisi sperimentali e nei calcoli teorici e infine deve essere poco sensibile alle correzioni di adronizzazione non perturbative. La prima definizione storicamente fu la 2-JET RATE DEFINITION di Sterman-Weinberg che definisce quando, in $e^+e^- \rightarrow h$, abbiamo o meno un evento a due jet:



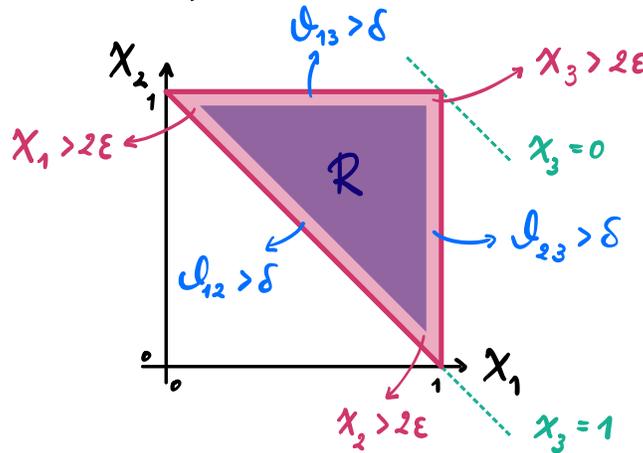
$$\begin{aligned}
 \sigma_{SW} &\equiv \underbrace{\sigma_{q\bar{q}}}_{LO} + \underbrace{\sigma_{q\bar{q}g}}_{R.V. CORR. (3 PARTONS)} (E_i < \epsilon\sqrt{s} \vee \theta_{ij} < \delta) + \dots = \\
 &= \sigma_{TOT} - \sigma_{q\bar{q}g} (E_i > \epsilon\sqrt{s} \vee \theta_{ij} > \delta),
 \end{aligned}$$

(MORE PARTONS) $\rightarrow O(\alpha_s)$

dove σ_{TOT} è la sezione d'urto totale al NLO, mentre

$$\sigma_{q\bar{q}g}(E_i > \epsilon\sqrt{s} \vee Q_{ij} > \delta) = \int_{\mathcal{R}} dX_1 dX_2 \frac{d^2\sigma_{q\bar{q}g}}{dX_1 dX_2},$$

dove con \mathcal{R} intendiamo tutta la regione dello spazio delle fasi che non sia IR,



può, ricordando che

$$\frac{d^2\sigma_{q\bar{q}g}}{dX_1 dX_2} = \sigma_0 \frac{2\alpha_s}{3\pi} \frac{X_1^2 + X_2^2}{(1-X_1)(1-X_2)},$$

possiamo calcolare $\sigma_{q\bar{q}g}$ e definire il rate di cui sopra

$$\mathcal{R}_{2SW} \equiv \frac{\sigma_{SW}}{\sigma_{TOT}} = 1 - \frac{4}{3} \frac{\alpha_s}{\pi} \left[4 \log \delta \left(\log 2\epsilon + \frac{3}{4} \right) - \frac{5}{2} + \frac{\pi^2}{6} \right],$$

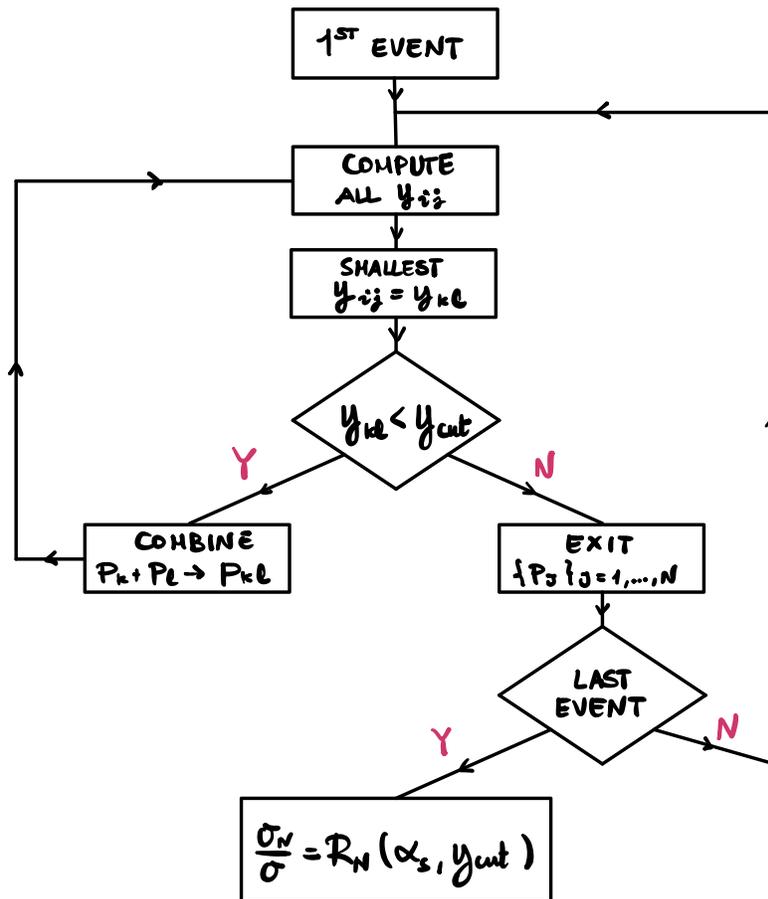
il quale evolutivamente ha senso finché ϵ e δ non sono troppo piccoli, altrimenti ci imbatteremo ancora nelle divergenze IR e diventa IR unsafe.

La generalizzazione di questo visto può essere CLUSTERING ALGORITHMS attraverso il seguente paragrafo. Definiamo

una "distanza" d_{ij} che ci dice quanto le particelle sono separate o collegate; $d_{ij} = 0$ significa che due sono esattamente su quel caso. Dal parametro dimensionato d_{ij} definiamo poi la quantità adimensionale $y_{ij} \equiv d_{ij}^2/Q^2$, dove Q^2 è la scala di riferimento. Dopo averle inglobate le particelle che non riusciamo a risolvere, esse tali che $y_{ij} < y_{cut}$, detto PARAMETRO DI RISOLUZIONE ADIMENSIONALE.

Allora la richiesta affinché il clustering algorithm su IR sia in grado di risolvere $E_i \rightarrow 0 \vee d_{ij} \rightarrow 0 \Rightarrow d_{ij} \rightarrow 0$.

Stanno finalmente pronti ad esporre il JET CLUSTERING ALGORITHM.



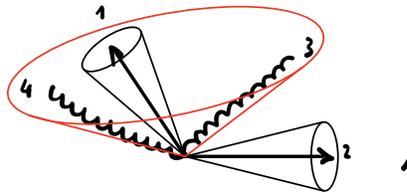
Occorre dunque assegnare uno schema per combinare P_k e p_e e tipicamente facciamo la somma

$$P_{kE} = P_k + P_e .$$

Dopo di che, diversamente, l'attenzione è tutta sulla definizione della "distanza" d_{ij} , ad esempio abbiamo il JADE ALGORITHM in cui

$$d_{ij}^J \equiv 2 E_i E_j (1 - \cos \Theta_{ij}) \overset{\text{MASSLESS APPROX.}}{\sim} m_{ij}^2 ,$$

il quale tuttavia è sensibile agli effetti non perturbativi in un quanto, ad esempio per due partoni hard e due soft

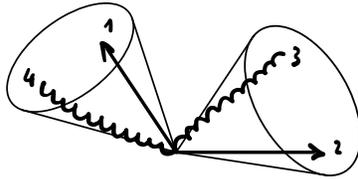


ovvero $E_3 \sim E_4 \sim 0$, tende a clusterizzare in un unico jet i partoni 3 e 4 anche se la loro distanza angolare non è piccola. L'algoritmo oggi in uso è invece il noto K_{\perp} -ALGORITHM o DUHRAN-ALGORITHM, in cui

$$d_{ij}^{K_{\perp}} = 2 \min_{i,j} (E_i^2, E_j^2) (1 - \cos \Theta_{ij}) \overset{\Theta_{ij} \rightarrow 0}{\sim} K_{\perp ij}^2 ,$$

dove ricordiamo che K_{\perp} è l'impulso trasverso; in primo luogo è da notare che in questo caso non abbiamo più il fenomeno che cui sopra parliamo, però il minimo dell'energia, per assegnare

la particella in base alla distanza minima: la particella soffre e' quindi attratta dalla particella base più vicina e non dalle altre particelle soffre.

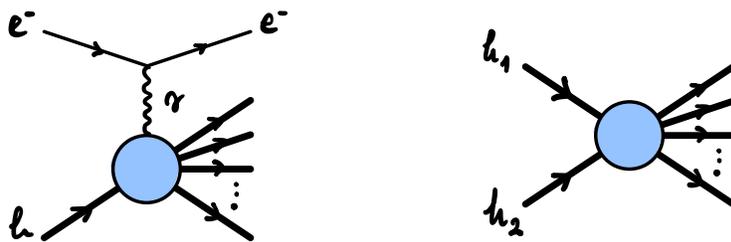


Nel caso precedente per spiegare il fatto che l'adimensionalizzazione coinvolge solo partoni vicini occorre usare concetti non perturbativi generali, mentre col K_1 -algorithm possiamo mantenerli bassi.

Se eseguiamo un plot di $R_n = \frac{\sigma_n}{\sigma_{TOT}}$, $n = \# \text{ jet}$, una funzione di y_{jet} , risulta che a basse energie (jet grande) prevalgono gli eventi a due jet, mentre, man mano che abbassiamo y_{jet} cominciamo a diventare frequenti gli eventi a 3, 4, 5 o più jet; diversamente non potremo mandare y_{jet} a 0 senza inceppare nelle solite divergenze.

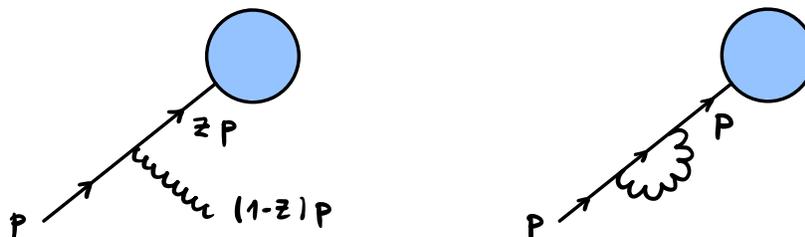
ADRONI NELLO STATO INIZIALE E PDF

Alle nostre trattazioni della pQCD manca lo studio di quei processi in cui almeno degli adroni nello stato iniziale. Ad esempio almeno 2 processi di



DEEP INELASTIC LEPTON-HADRON SCATERING o HADRONIC COLLISION.

A livello partonico se pensiamo ad un singolo partone di impulso p , allora sappiamo che ci saranno le controindicazioni e virtuali seguenti:

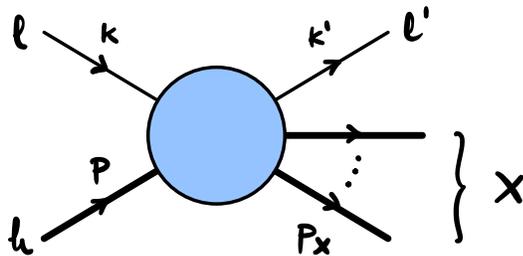


che danno luogo a delle differenze cinematiche. Infatti se $z \sim 1$, allora abbiamo comunque soffre che non si fluisce le osservabili e promediate alle cancellazioni delle singolarità IR. D'altro canto se $z \neq 1$ allora l'emozione non può essere trascurata come prodotto finale e le singolarità IR tornano nel nostro calcolo. In particolare

gli h sono sempre nello stato finale, quindi grazie all'inclusività potremmo includere tutti gli sceneri possibili, ma ciò non si può applicare quando abbiamo un h nello stato iniziale che è fissato!

Queste singolarità IR riflettono l'emergere della fisica non perturbativa dell'adronizzazione, che non è power-suppressed. Ad ogni modo questo scenero è motivated dalla PARTON-DENSITY RENORMALIZATION che cura queste INITIAL STATE COLLINEAR (MASS) SINGULARITIES.

Ci concentriamo ora sul deep inelastic lepton-hadron scattering (DIS): $l(k) + h(p) \rightarrow l'(k') + X$.



X è un qualunque stato adronico che non rileviamo, quindi siamo inclusivi. Abbiamo poi un impulso trasferito $q = k - k'$ che è space-like: $q^2 = -2kk' \equiv -Q^2 < 0$; al solito indichiamo con s l'energia del centro di massa al quadrato: $s = (p+k)^2$. Dalla conservazione del 4-impulso abbiamo che

$$p+k = p_x+k' \Rightarrow p_x = p+q \Rightarrow p_x^2 = m_x^2 = (p+q)^2.$$

Lavoriamo nel regime $Q^2 \gg m_h^2$ (deep) e $m_x^2 \gg m_h^2$ (inelastic), per cui trascuriamo le masse dei leptoni e degli adroni. Introduciamo la VARIABILE DI BJORKEN

$$x \equiv \frac{Q^2}{2p \cdot q}$$

che nel sistema nel cui h è a riposo si può vedere essere nell'intervallo $x \in [0, 1]$. Il regime del DIS è allora $Q^2 \rightarrow \infty$ e $x \neq 1$ finito; infatti, poiché

$$p_x^2 = (p+q)^2 = 2p \cdot q + q^2 = m_x^2 \stackrel{\text{ELASTIC}}{=} 0,$$

allora

$$1 = \frac{-q^2}{2p \cdot q} = x,$$

perché $x \neq 1$ ciò dice che siamo nel caso inelastico.

Le variabili indipendenti dello stato finale sono 3 del lepton massless e 4 dello stato adronico massivo X , quindi dalle conservazioni del 4-impulso totale risulta che il processo è interamente descritto da $7-4=3$ variabili indipendenti, ad esempio Q^2, x, s che possono essere determinati da k' , dati k e p . In alternativa si può definire

$$y \equiv \frac{Q^2}{xs} = \frac{2p \cdot q}{s}$$

e usare Q^2, x, y . A fissata s diversamente abbiamo

lo Q^2, x e con' nu . Con questo processo abbiamo modo di sondare la struttura dell'adrono entrante a certe distanze ($\lambda \sim Q^{-1} \ll m_h^{-1}$).

Supponiamo $l = l' = e^-$ e di essere lontani dal piceo dello Z , per cui abbiamo solo l'interazione col fotone e quindi ci risulta che dobbiamo calcolare il diagramma

$$|\mathcal{M}|^2 = \left| \begin{array}{c} e^- \rightarrow e^- \\ \gamma \\ h \rightarrow \dots \end{array} \right|^2 = \begin{array}{c} k \rightarrow k' \\ q \quad \nu \\ \mathcal{M} \quad \mathcal{M}^* \\ p \rightarrow p' \end{array} \begin{array}{l} L^{\mu\nu}(k, k') \\ W^{\mu\nu}(p, q) \end{array}$$

con $L^{\mu\nu}(k, k')$ detto TENSORE LEPTONICO e $W^{\mu\nu}(p, q)$ detto TENSORE ADRONICO, per cui abbiamo che

$$d\sigma \sim L^{\mu\nu}(k, k') W_{\mu\nu}(p, q).$$

Dalle conservazioni di Lorentz, dalle conservazioni delle correnti elettromagnetiche

$$q^\mu J_\mu(q) = 0 \Rightarrow q^\mu W_{\mu\nu}(p, q) = q^\nu W_{\mu\nu}(p, q) = 0$$

e dalle conservazioni delle partoni (\Rightarrow simmetrie $\mu \leftrightarrow \nu$) abbiamo che la generale forma di $W^{\mu\nu}(p, q)$ e'

$$W^{\mu\nu}(p, q) = \left(-g^{\mu\nu} + \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right) F_1(p, q) + \frac{1}{p \cdot q} \left(p^\mu - \frac{p \cdot q}{q^2} q^\mu \right) \left(p^\nu - \frac{p \cdot q}{q^2} q^\nu \right) F_2(p, q)$$

dove F_1, F_2 sono dette HADRON STRUCTURE FUNCTIONS

e sono scalari e adimensionali e si possono scrivere in funzione di x e Q^2 , sottintendendo la dipendenza da m_f che nel nostro regime è trascurabile. Calcolata in letteratura in uso le combinazioni longitudinali e tranverse date da

$$\begin{cases} F_L = F_2 - 2x F_1 \\ F_T = 2x F_1 \end{cases},$$

quindi tale che

$$\begin{aligned} P_L^{\mu\nu} W_{\mu\nu} &= F_L \\ P_T^{\mu\nu} W_{\mu\nu} &= F_T, \end{aligned}$$

dove $P_L^{\mu\nu}$ e $P_T^{\mu\nu}$ sono i rispettivi proiettori

$$P_L = \frac{4x^2}{p \cdot q} P^\mu P^\nu$$

$$P_T = x \left[-\eta^{\mu\nu} + \frac{q^\mu p^\nu + p^\mu q^\nu}{p \cdot q} - q^2 \frac{P^\mu P^\nu}{(p \cdot q)^2} \right];$$

quindi prendi un una gauge generale il fotone virtuale ha sia la componente trasversa che longitudinale.

Allo stato attuale possiamo calcolare il tensore leptoneico come risultato di un processo Compton per un fotone virtuale off-shell ($\gamma^* + e^- \rightarrow \gamma^* + e^-$), quindi risulta che

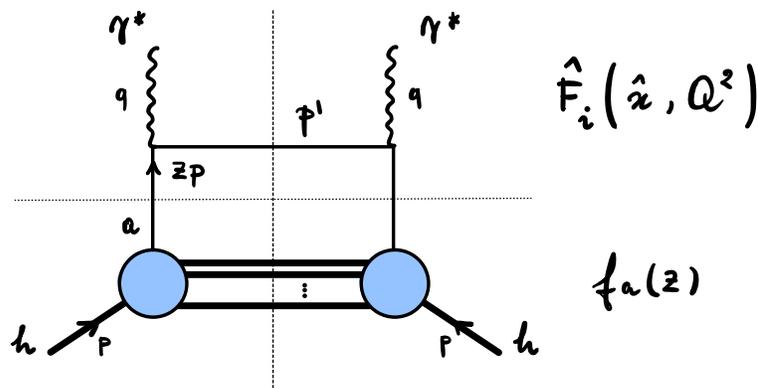
$$\frac{d^2 \sigma_{DIS}}{dQ^2 dx} = \frac{2\pi\alpha^2}{x Q^2} \left\{ [1 + (1-y)^2] F_2(x, Q^2) - y^2 F_L(x, Q^2) \right\},$$

dove le informazioni sulle interazioni forti sono contenute in F_2, F_L che possono essere estroolate dai dati sperimentali, cosa che storicamente è stata ampiamente fatta.

DSS:

Se aggiungiamo Z, W^\pm abbiamo un'ulteriore funzione di struttura $F_3(x, Q^2)$ che rivela le pentate via $\frac{d^2\sigma_{DIS}}{dQ^2 dx}$ ed è del tipo $\sim \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} p^\alpha q^\beta$.

Dimostriamo ora la parte adronica, per la quale, applicando il PM, abbiamo che l'adrona ha può essere visto come un insieme di partoni debolmente interagenti, consentendoci la seguente scomposizione al LO



$$F_{i,h}(x, Q^2) = \sum_a \int_0^1 dz f_a(z) \hat{F}_i(\hat{x}, Q^2),$$

dove $\hat{F}_i(\hat{x}, Q^2)$ è detta PARTONIC STRUCTURE FUNCTION, mentre $f_a(z)$ è detta PARTON DENSITY, con $a = q, \bar{q}$ al primo ordine e in primo ordine che $\hat{x} = x/z$, infatti:

$$\hat{x} = \frac{Q^2}{2z p \cdot q} = \frac{x}{z}.$$

A me volta pensiamo fare il calcolo del processo Compton partendo, il cui spazio delle fasi è

$$\begin{aligned} d\Phi &\sim d^4 p' \delta(p'^2) \delta^{(4)}(z p + q - p') = \\ &= \delta((q + z p)^2) = \\ &= \delta(-Q^2 + 2z p \cdot q + z^2 p^2) = \\ &= \frac{x}{Q^2} \delta(z - x), \end{aligned}$$

quindi la x di Bjorken misura la frazione di momento partone. Il calcolo esplicito anche come risultato:

$$\begin{cases} F_2(x, Q^2) = x \sum_a e_a^2 f_a(x) \\ F_L(x, Q^2) = 0 \end{cases},$$

dove la seconda è nota come RELAZIONI DI CALLAN-GROSS.

OSS.:

Se considerassimo anche le interazioni deboli allora

$$F_i^{ll'} = x \sum_a C_{i,a}^{ll'} f_a(x).$$

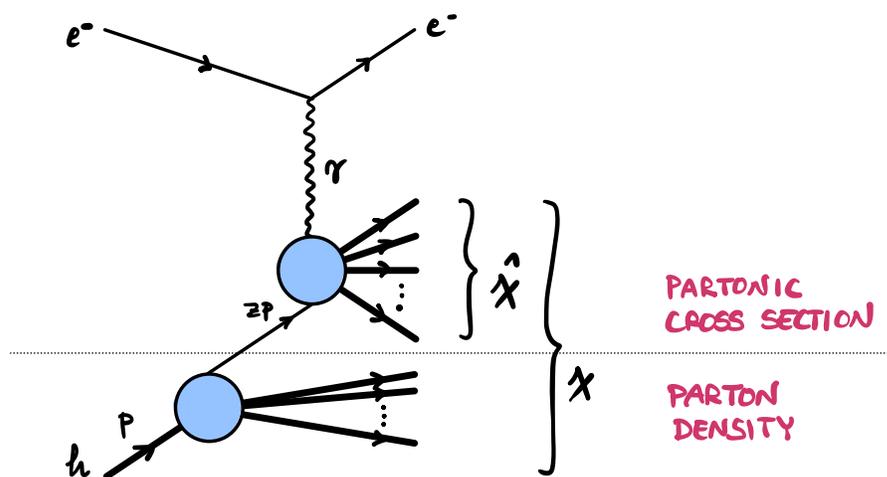
EW COUPLINGS

Concluderemo allora che le elicità partoniche non sono oggetti astratti, bensì quantità misurabili direttamente nei DIS delle funzioni di struttura. Un secondo luogo abbiamo che $F_i(x, Q^2)$ non dipende da Q^2 in quanto abbiamo un

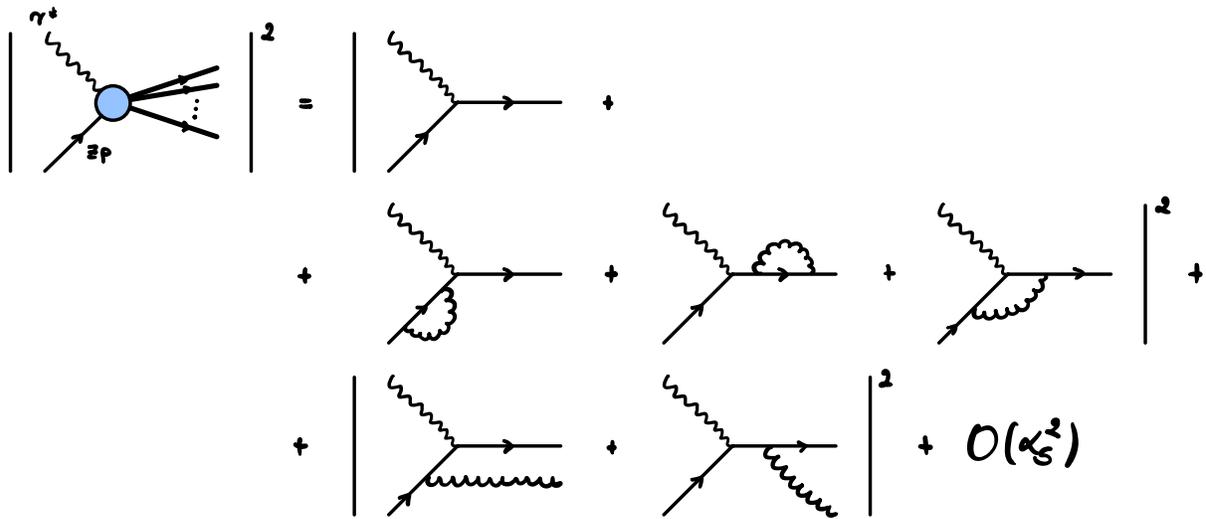
partoni point-like e con p e q possiamo creare una sola quan-
tita' adimensionale, cioè x ; questo fatto è conosciuto come
BJORKEN SCALING. Infine abbiamo che $F_L = 0$, dovuto
al fatto che γ^* scatterano contro dei partoni on shell,
massless, di spin $1/2$, altrimenti non sarebbe vero.

Le ultime due considerazioni non sono vere ad ordini
superiori in QCD: la seconda perché viene introdotta
una nuova scala per la normalizzazione delle densità
partoniche e la terza perché abbiamo scattering di gluoni.

Guardiamo alle evidenze di ordine superiore, esponendo
concetti in DIS ma che saranno validi per tutti i processi
di hard scattering con adioni nello stato normale in pQCD.
Pensando al DIS abbiamo la seguente situazione



dove la partonic cross section è calcolabile in pQCD.
Necessariamente le considerazioni con n mutoli già noti, come



dove vanno completamente inclusi nello stato adronico finale, garantendo la cancellazione delle singolarità soft e collineari di stato finale; nel portare universale però non possono essere inclusi, abbiamo solo un portatore nello stato universale, quindi ci aspettiamo che non si cancellino le singolarità collineari di stato universale. Al solito nel limite IR abbiamo la fattorizzazione

$$\left| \text{diagram with gluon loop on incoming line} \right|^2 \underset{\text{IR}}{\sim} \left| \text{diagram with gluon loop on incoming line} \right|^2 \cdot \alpha_s(Q^2) \int_0^1 \frac{d\cos\theta}{1-\cos\theta},$$

dove l'integrale è dominato dal contributo IR, quindi

$$\int_0^1 \frac{d\cos\theta}{1-\cos\theta} \sim \int_0^1 \frac{d\theta^2}{\theta^2} \sim \int_0^{Q^2} \frac{dk_{\perp}^2}{k_{\perp}^2},$$

dove ricordiamo che $k_{\perp} = p \sin\theta \sim p\theta \sim Q\theta$ (); se regolarizziamo con un cut-off $Q_0^2 \sim m_h^2 \sim \Lambda_{\text{QCD}}^2$, allora

$$\alpha_s(Q^2) \int_0^1 \frac{d\cos\theta}{1-\cos\theta} \rightarrow \alpha_s(Q^2) \int_{\Lambda_{QCD}^2}^{Q^2} dk_{\perp}^2 k_{\perp}^{-2} = \alpha_s(Q^2) \log \frac{Q^2}{\Lambda_{QCD}^2} = O(1),$$

quindi abbiamo delle correzioni $O(1)$ e non power-suppresses nel, invalidando l'approccio perturbativo. Infatti si può vedere che ci occorre anche agli ordini successivi

$$\left| \begin{array}{c} \text{Diagram of parton splitting} \\ \text{with } m \text{ branches} \end{array} \right|^2 \sim_{IR} \left| \begin{array}{c} \text{Diagram of parton splitting} \\ \text{with } zP \text{ and } P \end{array} \right|^2 \cdot \left| \alpha_s(Q^2) \int_{\Lambda_{QCD}^2}^{Q^2} dk_{\perp}^2 k_{\perp}^{-2} \right|^m,$$

quindi $\sigma = \sigma_{LO} (1 + 1 + \dots)$.

Questo problema si possono risolvere attraverso una fattorizzazione delle singolarità collineari e l'EQUAZIONE DI EVOLUZIONE DI ALTARELLI-PARISI. La procedura è analoga alle rinormalizzazioni delle singolarità UV; infatti abbiamo i seguenti passaggi.

1. Si riconosce che la $f_a(z)$ introdotta è bare (non finita) e lo si riduce con $f_a^{(0)}(z)$, ad una certa scala Q_0 non perturbativa.
2. Si assorbe la singolarità nella ridifinizione di $f_a^{(0)}(z)$

$$f_a^{(0)}(z) \Gamma(\alpha_s(Q^2), Q^2/Q_0^2) \equiv f_a(z),$$

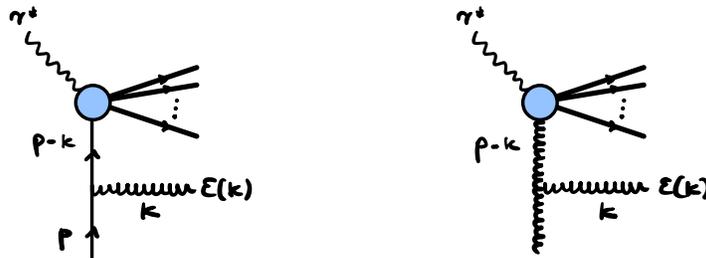
con $f_a(z)$ che è la densità partonica finita e con Γ è contenuta la dipendenza $(\alpha_s \log Q^2/Q_0^2)^m$.

DSS.:

La procedura illustrata funziona anche con la DR prendendo $D = 4 - 2\epsilon$: $\epsilon < 0$ che prende il ruolo del cut-off IR e al posto del logaritmo abbiamo poli $1/\epsilon$.

La procedura funziona se e solo se abbiamo UNIVERSALITA', ossia se Γ non dipende dal processo e questo sappiamo essere vero in QCD le emissioni soft-collineare sono universalmente, cioè ha un comportamento quasi classico in cui i termini di interferenza scompaiono.

Necessitiamo un caso esotico di dimostrazione basato sul power counting per le singolarità collineare in una gauge fissa. Preferiamo come sempre al DIS e passiamo ai possibili contorni seguenti



per cui abbiamo un fattore di spazio delle fasi

$$\frac{d^3k}{2k^0} \sim dk^0 k^0 d\phi d\cos\theta \stackrel{d \rightarrow 0}{\sim} d\theta^2,$$

mentre dell'elemento di matrice abbiamo il propagatore

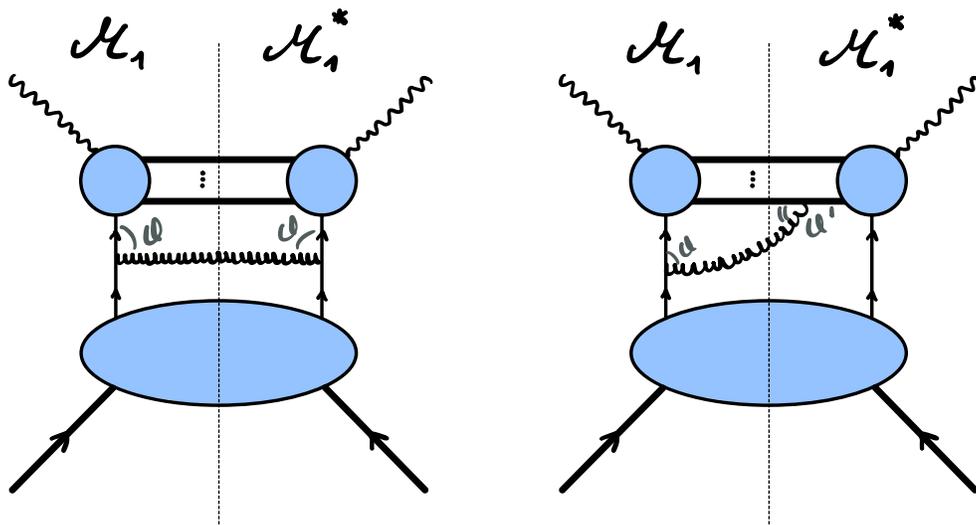
$$\frac{1}{(p-k)^2} = \frac{1}{-2p \cdot k} = \frac{1}{-2p^0 k^0 (1-\cos\theta)} \stackrel{d \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{\theta^2}$$

e il vettore che, in una gauge fisica ($\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{k}) = 0$), è sempre del tipo $p_i \cdot \mathbf{E}(\mathbf{k})$, con $p_i = p, k$, piccolo, siccome nel limite $Q \rightarrow 0$ vale $p = k + O(Q)$, allora

$$p_i \cdot \mathbf{E}(\mathbf{k}) \sim Q$$

perché al fatto che nella gauge fisica propagano solo le componenti trasversali.

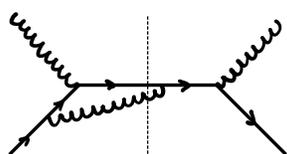
Eseguendo allora il quadrato dell'elemento di matrice, abbiamo il termine diretto con due vettori e due propagatori per un contributo totale del tipo $\frac{Q}{Q^2} \cdot \frac{Q}{Q^2} = \frac{1}{Q^2}$, detto "contributo diretto"; abbiamo poi il termine di interferenza il cui contributo è del tipo $\frac{Q}{Q^2} \frac{Q'}{Q'^2} = \frac{1}{Q Q'}$, quando, integrato sullo spazio delle fasi, non da luogo ad un risultato logaritmico, infatti Q' è un angolo rispetto ad un sistema finale, nella quale viene escluso e piccolo abbiamo cancellazione delle divergenze garantite.



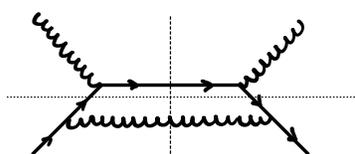
Concluderemo che in una gauge fissa solo il contributo diretto può dare singolarità collinear.

DEF.:

Un diagramma o sottodiagramma si dice 2-PARTICLE IRREDUCIBLE se non può essere diviso in due tagliando due linee interne.

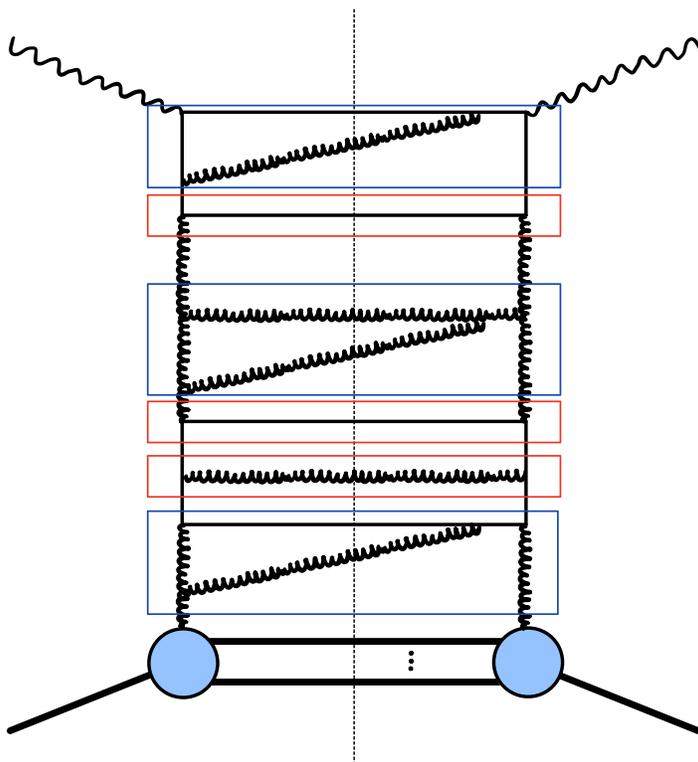


2PI

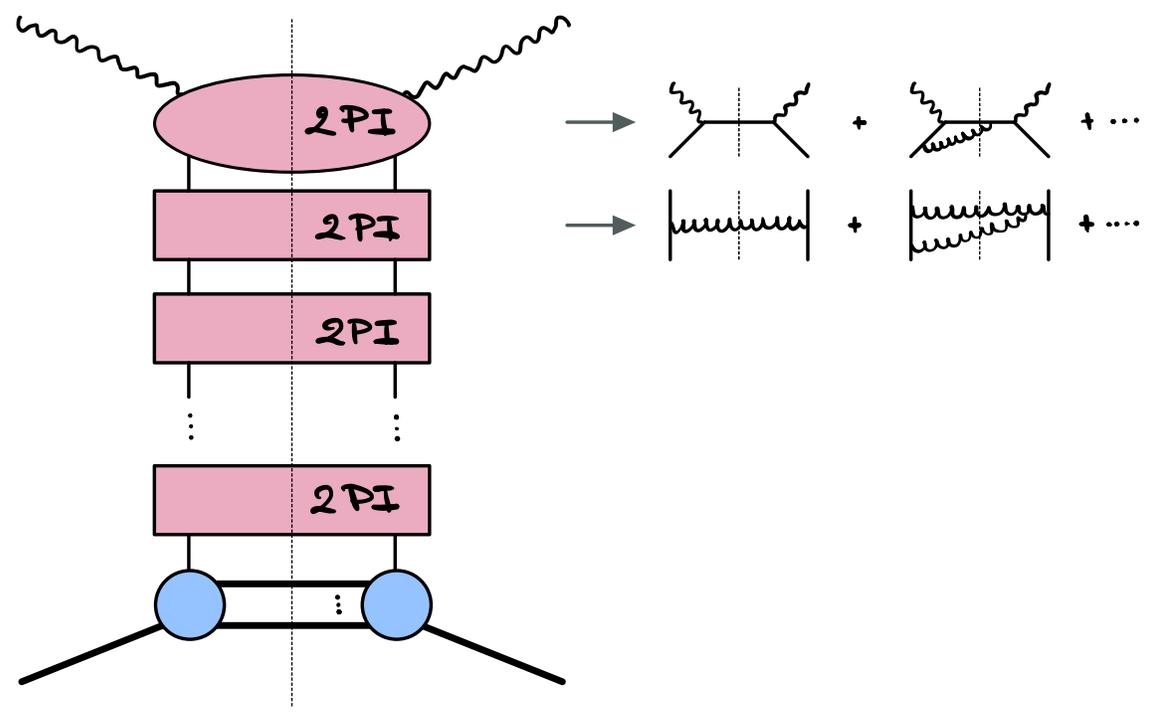


2PR

ci possiamo allora costruire una serie di possibili contributi come ad esempio



e moltiplicare i contributi diretti () e dei vertici fermioni (), trovando la generale struttura



nota come DIAGRAMMA A SCALA. Osserviamo a questo punto che solo 2PI dipende dalle scale e quindi dal processo, mentre tutto il resto è indipendente, quindi può essere fattorizzato. Si introduce allora una SCALA DI FATTORIZZAZIONE μ_F arbitraria con cui riscriviamo l'integrale $\int \frac{dQ^2}{Q^2} \sim \int \frac{dk_{\perp}^2}{k_{\perp}^2}$, quindi

$$\int_{\mu_F^2}^{Q^2} \frac{dk_{\perp}^2}{k_{\perp}^2} \text{ (2PI) } \rightarrow \hat{\sigma}(\mu_F^2) \quad \text{HARD CROSS SECTION}$$

$$\int_{Q_0^2}^{\mu_F^2} \frac{dk_{\perp}^2}{k_{\perp}^2} \text{ (2PI) } \rightarrow \Gamma\left(\frac{\mu_F^2}{Q_0^2}\right) f^{(0)} \equiv f(\mu_F^2)$$

consistenti di arrivare alla FORMULA DI FATTORIZZAZIONE UNIVERSALE per il DIS, cioè

$$\sigma_{\text{DIS}}(Q^2) = \sum_{a=q,\bar{q},g} \int_0^1 dz f_{a/h}(z, \mu_F^2) \hat{\sigma}_{\text{DIS}}(z, \alpha_s(Q^2), Q^2, \mu_F^2),$$

dove le $f_{a,h}$ sono diventate partoniche, PDF, indipendenti del processo ma dipendenti delle scale μ_F^2 , e $\hat{\sigma}_{\text{DIS}}$ è la hard partone cross section, prova di regolarità collineare e quindi calcolabile anche in ordine di pQCD.

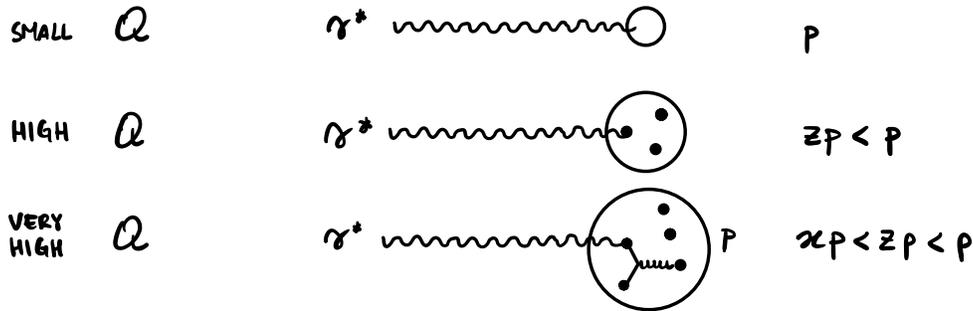
Immediatamente osserviamo che la scelta di μ_F^2 non è del tutto arbitraria in quanto nello sviluppo di $\hat{\sigma}$ abbiamo

$$\hat{\sigma}(\alpha_s, \mu_F) = \alpha_s^7 \left[\hat{\sigma}^{(0)} + \alpha_s \hat{\sigma}^{(1)}\left(\frac{Q}{\mu_F}\right) + \dots + \alpha_s^m \hat{\sigma}^{(m)}\left(\frac{Q}{\mu_F}\right) + \dots \right]$$

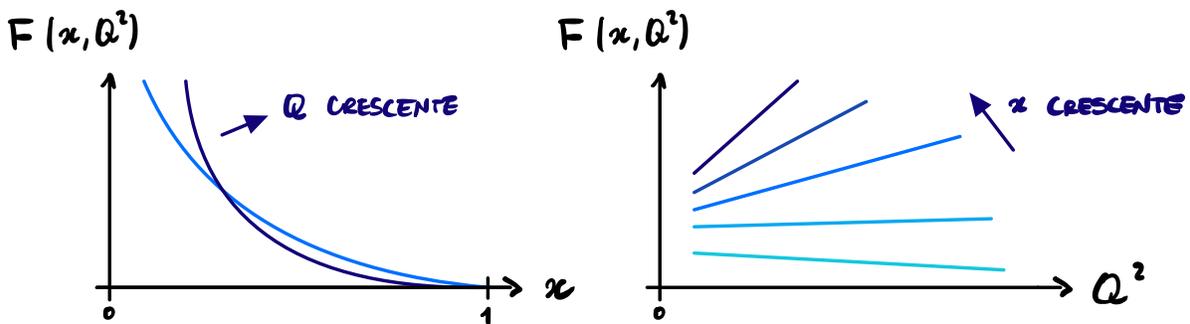
con $\hat{\sigma}^{(m)}\left(\frac{Q}{\mu_F}\right) \sim \log^m \frac{Q^2}{\mu_F^2}$, quindi se $\mu_F \ll Q$ allora viene meno la validità dello sviluppo perturbativo; per tanto occorre che μ_F sia lontana dalle regioni IR e si sceglie $\mu_F = O(Q)$.

Un secondo luogo la dipendenza delle PDF dalle scale μ_F comporta la violazione dello scaling di Bjorken: a grande Q^2 le $F(x, Q^2)$ dipendono logaritmicamente da Q^2/μ_F^2 . Possiamo capirlo esistivamente pensando allo scattering di un α^* su un protone p aumentando Q un po' alla volta. Man mano che Q^2 cresce diventa sempre più probabile lo scattering con partoni a un

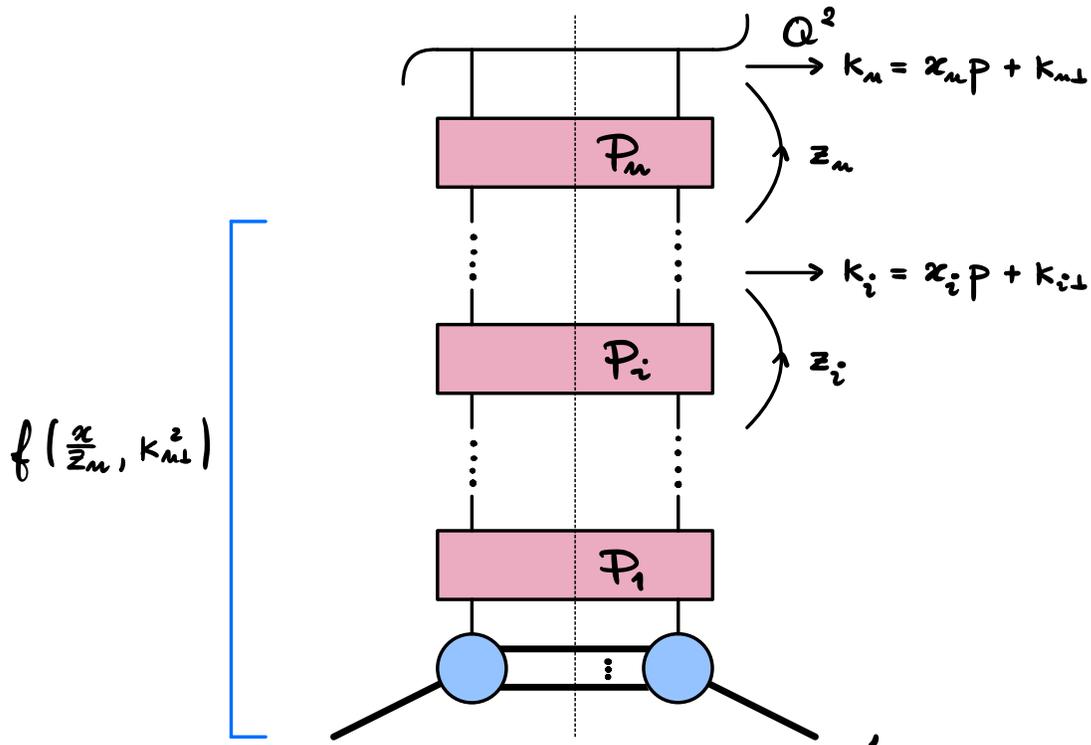
pulso minore : possiamo dal protone ai quarks costituenti e da questi alle componenti: fluttuazioni virtuali.



Da termini di plot tale relazione si presenta quindi nelle seguenti forme a o funto.



Abbiamo quindi che la PDF dipendeva da μ_F^2 e tale dipendenza funzionale può essere compresa con le EQUAZIONI DI EVOLUZIONE DI ALTARELLI-PARISI. Per le ragioni sopraccitate possiamo $\mu_F^2 = Q^2$ e quindi ci chiediamo come trovare $f(x, Q'^2)$ da $f(x, Q^2)$. In che il caso che abbiamo una struttura sterata che lega la PDF a n celle a quella a $n-1$ celle, evolenti del diagramma



per cui risulta che

$$f(x, Q^2) = f^{(0)}(x) + \int_{x_0}^{Q^2} \frac{dk_{m\perp}^2}{k_{m\perp}^2} \int_x^1 \frac{dz_m}{z_m} P_m(\alpha_s(k_{m\perp}^2), z_m) f\left(\frac{x}{z_m}, k_{m\perp}^2\right),$$

dove $f^{(0)}(x)$ è una PDF base; ma allora, facendo la derivata logaritmica si ottiene l'equazione di evoluzione

$$\frac{d}{d \log Q^2} f(x, Q^2) = \int_x^1 \frac{dz}{z} P(\alpha_s(Q^2), z) f\left(\frac{x}{z}, Q^2\right), \quad (AP)$$

che è un'equazione integro-differenziale del I ordine, risolvibile tramite l'assegnazione di un $f(x, Q_0^2)$, dove Q_0^2 è una scala di input nella regione perturbativa: $Q_0^2 \gtrsim \Lambda_{QCD}^2$. A ciò dobbiamo aggiungere la dipendenza del flavor, quindi, definendo la convoluzione

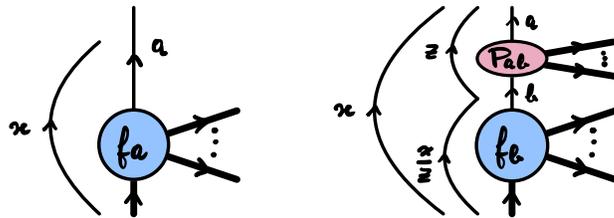
$$(g \otimes f)(x) \equiv \int_x^1 \frac{dz}{z} g(z) f\left(\frac{x}{z}\right),$$

abbiamo il sistema

$$\begin{cases} \frac{d}{d \log Q^2} f_q(x, Q^2) = P_{qq} \otimes f_q + P_{q\bar{q}} \otimes f_{\bar{q}} + P_{qg} \otimes f_g \\ \frac{d}{d \log Q^2} f_{\bar{q}}(x, Q^2) = P_{\bar{q}\bar{q}} \otimes f_{\bar{q}} + P_{\bar{q}q} \otimes f_q + P_{\bar{q}g} \otimes f_g \\ \frac{d}{d \log Q^2} f_g(x, Q^2) = P_{gg} \otimes f_g + P_{gq} \otimes f_q + P_{g\bar{q}} \otimes f_{\bar{q}} \end{cases}$$

o equivalentemente

$$\frac{d}{d \log Q^2} f_a(x, Q^2) = \sum_b \int_x^1 \frac{dz}{z} P_{ab}(z) f_b\left(\frac{x}{z}\right).$$



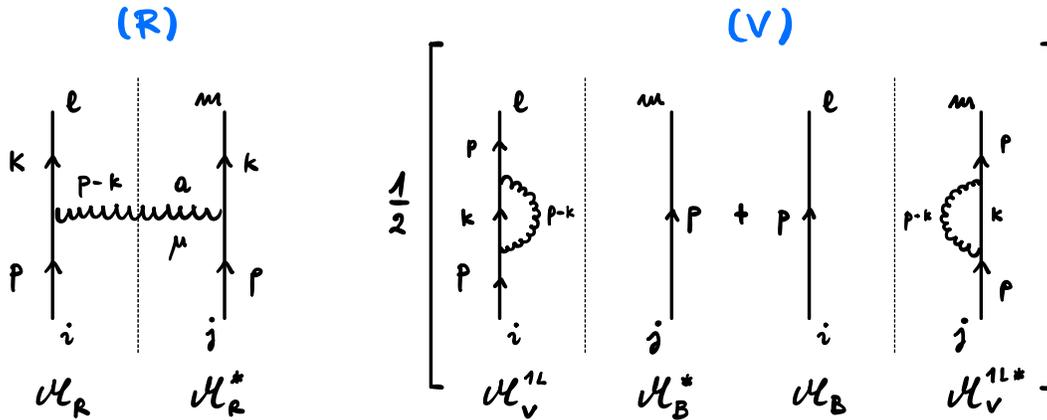
A questo punto l'attenzione si sposta sulle P_{ab} , anche note come [ALTARELLI-PARISI SPLITTING FUNCTIONS](#), calcolabili in pQCD e indipendenti dal processo:

$$P_{ab} \sim \boxed{2PI} = \left(\left(\text{diagram 1} + \text{diagram 2} \right) + \left(\text{diagram 3} + \text{diagram 4} + \dots \right) \right) =$$

$$= \frac{\alpha_s}{\pi} P_{ab}^{(0)}(z) + \left(\frac{\alpha_s}{\pi} \right)^2 P_{ab}^{(1)}(z) + \left(\frac{\alpha_s}{\pi} \right)^3 P_{ab}^{(2)}(z) + \dots$$

A titolo di esempio vediamo il calcolo esplicito di $P_{ab}^{(0)}$

nel caso in cui abbiamo $q \rightarrow q+g$; un termine di divergenza
 un abbiamo



dove dobbiamo pensare al quark uscente come linea virtuale
 che si attacca ad un vertice chiuso, come nel DIS, per cui
 nella parte reale abbiamo $k^2 \neq 0$ (off-shell) e $p^2 = (p-k)^2 = 0$,
 mentre nella parte virtuale $p^2 = 0$ e $k^2, (p-k)^2 \neq 0$.

Partiamo da (R) e scegliamo di porci nella gauge fixing
 axiale, esse quelle in cui $n^\mu A_\mu = 0$: $n^2 = 0 \wedge n \cdot p \neq 0$, in
 cui recuperiamo la covarianza di Lorentz e in cui

$$\mu \text{ wavy } \nu_{p-k} = d^{\mu\nu}(p-k) = -\eta^{\mu\nu} + \frac{(p-k)^\mu n^\nu + n^\mu (p-k)^\nu}{(p-k) \cdot n}.$$

Introduciamo la PARAMETRIZZAZIONE DI SUDAKOV

$$k^\mu = z p^\mu + k_\perp^\mu + \beta m^\mu \Rightarrow k^2 = k_\perp^2 + 2z\beta p \cdot m$$

in questo k_\perp : $p \cdot k_\perp = p \cdot m = 0$ per scelta, quindi

$$\beta = \frac{k^2 - k_\perp^2}{2z p \cdot m};$$

dopo averci

$$0 = (p-k)^2 = -2p \cdot k + k^2 \Rightarrow k^2 = 2p \cdot k = 2\beta p \cdot m = \frac{k^2 - k_{\perp}^2}{z}$$

$$\Rightarrow k^2 = \frac{k_{\perp}^2}{1-z}.$$

A questo punto, poiché $m \cdot A = 0$, deve valere che

$$(p-k)_{\mu} d^{\mu\nu} (p-k) = 0 \Rightarrow \begin{cases} p_{\mu} d^{\mu\nu} = k_{\mu} d^{\mu\nu} = \frac{k_{\perp\mu}}{1-z} d^{\mu\nu} + O(\alpha) \\ p_{\mu} p_{\nu} d^{\mu\nu} = \frac{2p \cdot (p-k) p \cdot m}{(p-k) \cdot m} = -\frac{k_{\perp}^2}{1-z}. \end{cases} \quad (AG)$$

Calcolando il propagatore (R) allora abbiamo che

$$(R) = \delta_{ij} t_{ei}^a t_{jm}^a \frac{\not{k}}{k^2} \not{\alpha}^{\mu} \not{\alpha}^{\nu} \frac{\not{k}}{k^2} d_{\mu\nu} (p-k),$$

sfruttando la simmetria di $d_{\mu\nu}$ poi possiamo scrivere

$$\not{k} \not{\alpha}^{\mu} \not{\alpha}^{\nu} \not{k} \rightarrow \frac{1}{2} \not{k} (\not{\alpha}^{\mu} \not{\alpha}^{\nu} + \not{\alpha}^{\nu} \not{\alpha}^{\mu}) \not{k} =$$

$$= \not{k} (p^{\mu} \not{\alpha}^{\nu} + p^{\nu} \not{\alpha}^{\mu} - \eta^{\mu\nu} \not{k}) \not{k}.$$

quindi, poiché $\not{q} \not{a} \not{q} = 2q \cdot a \not{q} - q^2 \not{a}$, abbiamo

$$(R) = \frac{\delta_{em} C_F}{k^4} [4 p^{\mu} p^{\nu} \not{k} - k^2 (p^{\mu} \not{\alpha}^{\nu} + p^{\nu} \not{\alpha}^{\mu}) + \eta^{\mu\nu} k^2 (\not{k} - \not{k})] d_{\mu\nu} (p-k).$$

Eseguiamo ora il limite collineare ($k_{\perp} \sim 0$) sfruttando (AG)

$$(R) \sim \frac{\delta_{em} C_F}{k^4} \left[-4 \frac{k_{\perp}^2}{1-z} z \not{k} - 2 k^2 (1-z) \not{k} \right] =$$

$$= \frac{\delta_{em} C_F}{(k^2)^2} (-2k^2) \left[\frac{2z}{1-z} + (1-z) \right] \not{k} [1 + O(k_{\perp})] =$$

$$= \frac{\delta_{em} C_F}{k^2} \frac{1+z^2}{1-z} \not{k} [1 + O(k_{\perp})],$$

per cui concluderemo che

$$\left[\mathcal{P}_{qq}^{(0)}(z) \right]_{\text{REAL}} = C_F \frac{1+z^2}{1-z}.$$

Nel limite $z \rightarrow 1$, cioè quando il gluone emesso è soffice, allora abbiamo la divergenza soffice

$$\left[\mathcal{P}_{qq}^{(0)}(z) \right]_{\text{REAL}} \sim \frac{2C_F}{1-z},$$

che deve cancellarsi con la parte virtuale

$$\left[\mathcal{P}_{qq}^{(0)}(z) \right]_{\text{VIRT}} = -\delta(1-z) \int_0^1 dz' \left[\mathcal{P}_{qq}^{(0)}(z') \right]_{\text{REAL}} \Theta(1-z' > \varepsilon),$$

IR CUTOFF
↓

quindi in totale

$$\mathcal{P}_{qq}^{(0)}(z) = C_F \left[\frac{1+z^2}{(1-z)_+} + \frac{3}{2} \delta(1-z) \right],$$

da cui abbiamo la distribuzione

$$\frac{1}{(1-z)_+} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{1}{1-z} \Theta(1-z > \varepsilon) - \delta(1-z) \int_0^{1-\varepsilon} dz' \frac{1}{1-z'} \right],$$

quindi per una funzione liscia $f(z)$, ad esempio la distribuzione partonica, allora

$$\int_0^1 dz f(z) \frac{1}{(1-z)_+} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{1-\varepsilon} dz \frac{f(z) - f(1)}{1-z}$$

che è finita.

Presumendo abbiamo che

$$q \rightarrow q+g : \quad \mathcal{P}_{qq}^{(0)}(z) = C_F \left[\frac{1+z^2}{(1-z)_+} + \frac{3}{2} \delta(1-z) \right],$$

$$g \rightarrow g+g : \quad P_{gg}^{(0)}(z) = 2C_A \left[\frac{z}{(1-z)_+} + \frac{1-z}{z} + z(1-z) \right] + \frac{1}{6} \delta(1-z) (11C_A - 2N_f) ,$$

$$g \rightarrow q+q : \quad P_{qg}^{(0)}(z) = T_R [z^2 + (1-z)^2] ,$$

$$q \rightarrow g+q : \quad P_{gq}^{(0)}(z) = C_F \left[\frac{1+(1-z)^2}{z} \right] ;$$

osserviamo che per le ultime due non abbiamo divergenze in quanto non c'è emissione soffice.

Dal PM sappiamo che per il potere $p = \text{und}$ dove \underline{u} è l'indice della PDF sono tali che

$$\begin{cases} \int_0^1 dx [f_u(x, Q^2) - f_{\bar{u}}(x, Q^2)] = 2 \\ \int_0^1 dx [f_d(x, Q^2) - f_{\bar{d}}(x, Q^2)] = 1 \\ \int_0^1 dx [f_f(x, Q^2) - f_{\bar{f}}(x, Q^2)] = 0, \quad f = c, s, b, \end{cases}$$

perciò, derivando rispetto a Q^2 , grazie alle **(AP)**, abbiamo le **SUM RULES** seguenti:

$$\int_0^1 dx [P_{q;a}(x) - P_{\bar{q};a}(x)] = 0 ,$$

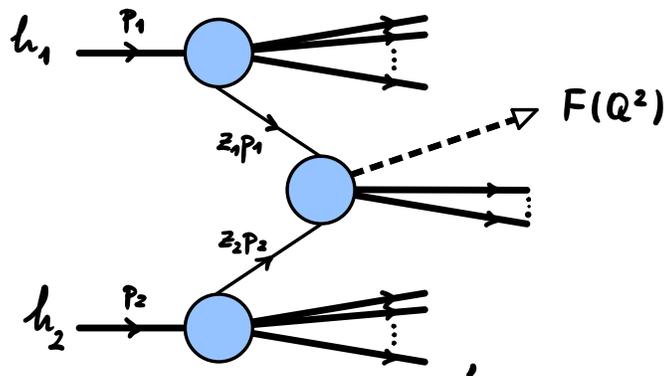
$$\sum_a \int_0^1 dx x P_{ab}(x) = 0 .$$

COLLISIONI ADRONICHE

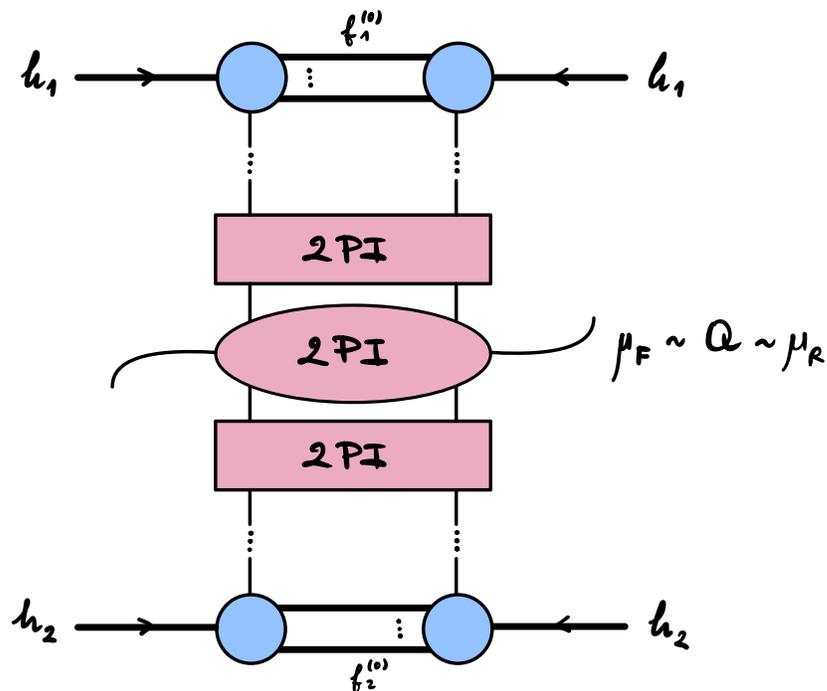
Il tipico processo su esume e'

$$h_1 + h_2 \rightarrow F(Q) + X,$$

con X stato adronico finale su cui siamo inclusivi.
 Dal punto di vista del PM abbiamo



questo è la fattizzazione, a differenza del DIS, abbiamo



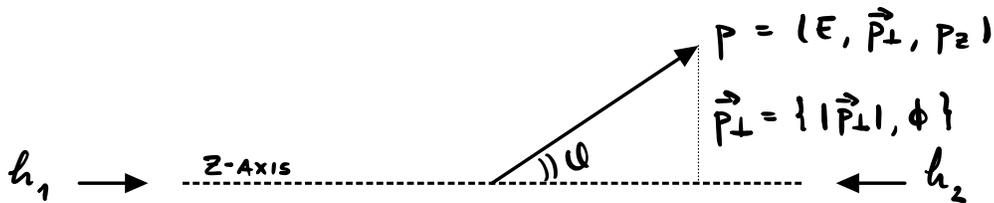
quindi

$$\sigma_{h_1, h_2}(p_1, p_2; Q^2) = \sum_{a,b} \int_0^1 dz_1 \int_0^1 dz_2 f_{a/h_1}(z_1, \mu_F^2) f_{b/h_2}(z_2, \mu_F^2) \hat{\sigma}_{ab}(z, p_1, p_2; \alpha_s(\mu_R^2), Q^2, \mu_R^2, \mu_F^2)$$

↑
↑
↑
HADRONIC XS
PDFS
PARTONIC XS

a meno dei termini $O\left(\left(\frac{\Lambda_{QCD}^2}{Q^2}\right)^p\right)$, detti HIGHER TWISTS, di origine non perturbativa.

Per quanto riguarda la cinematica abbiamo



con \vec{P}_\perp invariante per boost lungo z e si definisce la RAPIDITA'

$$y \equiv \frac{1}{2} \log \left(\frac{E + p_z}{E - p_z} \right),$$

quindi nel limite $\vec{P}_\perp = 0$ scopriamo che $p_z = \pm E$, quindi $y = \pm \infty$ e smette facendo un boost lungo z risulta che $y = y + \text{cost}$, perciò Δy è invariante sotto tali boost, non fare abbiamo la solita massa invariante $p^2 = M^2$.

Un po' vedere che la rapidità coincide nel CM e'

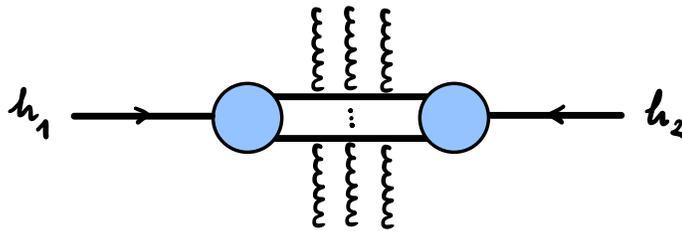
$$y = \hat{y} + \frac{1}{2} \log \frac{z_1}{z_2},$$

con \hat{y} rapidità partone.

Enumeriamo ora i possibili processi che possono avere

nelle collisioni asintotiche.

(i) **LOW- p_{\perp} HADRONS** : un processo abbiamo emissione di adioni a basso p_{\perp} provenienti dalle regioni IR ma cui sappiamo che la QCD è enhanced; non essendo una scala dove $Q^2 \gg \Lambda_{QCD}^2$ non possiamo applicare la pQCD per questo fondo che è la parte preponderante dello spettro finale ($\sigma_{(i)} \sim 1 \div 100 \text{ mb}$)



(ii) **RARE HARD-SCATTERING** : eventi rari non cui c'è un sottoprocesso perturbativo duro, da cui emerge un prodotto finale $F(Q^2)$, $Q^2 \gg \Lambda_{QCD}^2$, che possiamo descrivere con pQCD ($\sigma_{(ii)} \sim 1 \mu\text{b} \ll \sigma_{(i)}$).

