Il momento magnetico anomalo dei leptoni

Nicola Cabibbo

6 dicembre 2002

1 Il momento magnetico anomalo

In questa sezione calcoliamo il momento magnetico anomalo dell'elettrone (o di qualsiasi leptone) all'ordine α. Il calcolo è delineato nel Mandl e Shaw, ma vogliamo qui eseguirlo interamente, introducendo qualche semplificazione che rende il calcolo particolarmente compatto. Si assume che il lettore abbia presente la discussione del capitolo 9 del Mandl e Shaw[1].

1.1 Preliminari

Cominciamo con una premessa: tenendo presente la identità di Gordon (MS-A.80),

(1) $$2m\,\bar{u}(p')\gamma^\mu u(p) = \bar{u}(p')((p+p')^\mu + i\sigma^{\mu\nu}q_\nu)u(p)$$

dove $q = p' - p$, possiamo scrivere l'elemento di matrice $\bar{u}(p')\Lambda^\mu(p',p)u(p)$ come (vedi ad esempio (MS-10.66,10.67))

(2) $$\bar{u}(p')\Lambda^\mu(p',p)u(p) = \bar{u}(p')(F_1(q^2)\gamma^\mu + F_2(q^2)\frac{1}{2m}i\sigma^{\mu\nu}q_\nu)u(p)$$

D'altra parte,

(3) $$\Lambda^\mu(p',p) = L\gamma^\mu + \Lambda_c^\mu(p',p) \qquad \text{vedi (MS-9.53)}$$

e, se p', p corrispondono a momenti fisici ($p^2 = p'^2 = m^2$), si ha, nel limite di $q = 0,\ p = p'$,

(4) $$\bar{u}(p)\Lambda_c^\mu(p,p)u(p) = 0 \qquad \text{vedi (MS-9.54)}$$

Paragonando con la (2), dato che il termine in F_2 è esplicitamente proporzionale a q si vede che $F_1(0) = L$. Se quindi calcoliamo l'espressione in (2) omettendo termini di ordine $O(q^2)$ abbiamo

(5) $$\bar{u}(p')\Lambda^\mu(p',p)u(p) = \bar{u}(p')(L\gamma^\mu + F_2(0)\frac{1}{2m}i\sigma^{\mu\nu}q_\nu)u(p) + O(q^2)$$

Data l'identità di Ward, il termine L sarà esattamente cancellato dalla correzione alle linee esterne, per cui, (vedi par. 9.5 del Mandl e Shaw) la funzione vertice incluse *tutte* le correzioni del secondo ordine diviene:

(6) $$ie_0\bar{u}(p')\gamma^\mu u(p) \to i[e\bar{u}(p')\gamma^\mu u(p) + \frac{e}{2m}\bar{u}(p')e^2F_2(0)\,i\sigma^{\mu\nu}q_\nu)u(p)] + O(q^2)$$

[1] indicheremo con (MS-...) le equazioni tratte da [1].

In questa espressione abbiamo incluso l'effetto delle correzioni del secondo ordine alla linea fotonica che rinormalizzano la carica, $e_0 \to e$. Usando adesso la identità di Gordon (1), possiamo riscrivere il secondo membro separando il termine di carica $\propto (p+p')^\mu$ da quello di momento magnetico,

$$(7) \qquad ie_0\bar{u}(p')\gamma^\mu u(p) \to i[e\frac{p^\mu + p'^\mu}{2m}\bar{u}(p')u(p) + \bar{u}(p')(1+e^2F_2(0))\frac{e}{2m}(i\sigma^{\mu\nu}q_\nu)u(p)] + O(q^2)$$

Questo risultato mostra che il momento magnetico del leptone è pari a $(1+e^2F_2(0))$ magnetoni di Bohr. Per calcolare il valore di $F_2(0)$ dobbiamo calcolare l'espressione in eq. (2) e trattenere i termini lineari in q. Il calcolo si semplifica notevolmente se seguiamo le seguenti regole:

1. Omettere i termini che sono esplicitamente di ordine q^2.
2. Omettere i termini che sono $\propto \gamma^\mu$ Questi termini confluiscono nel parametro (divergente) L e sono eliminati dalla rinormalizzazione.

Notiamo che questa procedura ha due importanti vantaggi:

- Con la seconda regola abbiamo omesso i termini divergenti ultravioletti.
- Abbiamo anche eliminato la divergenza infrarossa, che è anche (MS-9.96a) $\propto \gamma^\mu$.
- Con la prima regola l'integrale si semplifica notevolmente.

Possiamo quindi eseguire il calcolo senza ricorrere a regolarizzazioni ultraviolette o infrarosse, Ovvero più correttamente, ma in maniera del tutto equivalente, immaginare che si esegua la regolarizzazione, e che si omettano i termini $\propto \gamma^\mu$ (che nella teoria regolarizzata sono finiti). I termini che restano (cioè $F_2(0)$) sono finiti nel limite in cui si elimina la regolarizzazione. Questa via leggermente più complessa è seguita nel Mandl e Shaw.

1.2 Il calcolo

La grandezza da calcolare (vedi ad esempio (MS-9.48)) può essere scritta come

$$(8) \qquad \bar{u}(p')\Lambda^\mu(p',p)u(p) = \bar{u}\left(\frac{-i}{(2\pi)^4}\int d^4k \frac{N^\mu(k,p,p')}{(k^2+i\epsilon)((p'-k)^2-m^2+i\epsilon)((p-k)^2-m^2+i\epsilon)}\right)u$$

Dove il numeratore è dato da

$$(9) \qquad N^\mu(k,p,p') = \gamma^\alpha(\not{p}'-\not{k}+m)\gamma^\mu(\not{p}-\not{k}+m)\gamma_\alpha$$

Cominciamo con lo stabilire alcune relazioni tra le variabili:

$$(10) \qquad q^2 = (p'-p)^2 = 2m^2 - 2(pp'); \qquad (p'+p)^2 = 2m^2 + 2(pp') = 4m^2 - q^2$$

Possiamo combinare i due ultimi fattori del denominatore scrivendo:

$$(11) \qquad p' = Q + \frac{q}{2}; \quad p = Q - \frac{q}{2}; \qquad \text{dove: } Q = \frac{p+p'}{2}$$

Notiamo anche che $Q^2 = m^2 + q^2/4$ che, dato che vogliamo omettere termini $O(q^2)$, possiamo riscrivere come $Q^2 = m^2 + O(q^2)$. Abbiamo allora

$$\begin{aligned} ((p'-k)^2 - m^2 + i\epsilon)((p-k)^2 - m^2 + i\epsilon) &= (k^2 - 2(p'k) + i\epsilon)(k^2 - 2(pk) + i\epsilon) \\ = \big((k^2 - 2(Qk) + i\epsilon)^2 - (kq)^2\big) &= (k^2 - 2(Qk) + i\epsilon)^2 + O(q^2) \end{aligned} \tag{12}$$

Quindi, trascurando termini $O(q^2)$, possiamo riscrivere la (8) come

$$\bar{u}(p')\Lambda^\mu(p',p)u(p) = \frac{-i}{(2\pi)^4}\int d^4k \frac{\bar{u}\, N^\mu(k,p,p')u}{(k^2+i\epsilon)(k^2 - 2(Qk) + i\epsilon)^2} + O(q^2) \tag{13}$$

Il prossimo passo consiste nel combinare i denominatori in uno singolo, usando il trucco di Feynman (MS-10.13):

$$\begin{aligned} \bar{u}\Lambda^\mu(p',p)u &= \frac{-i}{(2\pi)^4}\int_0^1 2z\,dz \int d^4k \frac{\bar{u}\, N^\mu(k,p,p')u}{(k^2 - 2z(Qk) + i\epsilon)^3} + O(q^2) \\ &= \frac{-i}{(2\pi)^4}\int_0^1 2z\,dz \int d^4k \frac{\bar{u}\, N^\mu(k,p,p')u}{((k-zQ)^2 - z^2Q^2 + i\epsilon)^3} + O(q^2) \\ &= \frac{-i}{(2\pi)^4}\int_0^1 2z\,dz \int d^4k \frac{\bar{u}\, N^\mu(k,p,p')u}{((k-zQ)^2 - z^2m^2 + i\epsilon)^3} + O(q^2) \end{aligned} \tag{14}$$

Dove nell'ultimo passo abbiamo utilizzato il fatto che $Q^2 = m^2 + O(q^2)$. Possiamo ora eseguire un cambiamento di variabili[2]: $t = k - zQ;\ k = t + z(p+p')/2$, di modo che

$$\bar{u}\Lambda^\mu(p',p)u = \frac{-i}{(2\pi)^4}\int_0^1 2z\,dz \int d^4t \frac{\bar{u}\, N^\mu(t+zQ,p,p')u}{(t^2 - z^2m^2 + i\epsilon)^3} + O(q^2) \tag{15}$$

A questo punto notiamo che in $N^\mu(t+zQ,p,p')$, eq. (9) compariranno termini di ordine zero in t, oltre a termini lineari e quadratici in t. I termini lineari si annullano (MS-10.2). I termini quadratici in t danno un contributo proporzionale a γ^μ e possono essere omessi. A questo proposito vedere la discussione delle eq. (MS-10.62 $\div$ 10.65). Possiamo allora scrivere, indicando esplicitamente i termini omessi con $(\propto \gamma^\mu)$:

$$\bar{u}\Lambda^\mu(p',p)u = \frac{-i}{(2\pi)^4}\int_0^1 2z\,dz \int d^4t \frac{\bar{u}\, N^\mu(\frac{z(p+p')}{2},p,p')u}{(t^2 - z^2m^2 + i\epsilon)^3} + O(q^2) + (\propto \gamma^\mu) \tag{16}$$

Dato che il nominatore non dipende da t possiamo ora eseguire l'integrale in t che risulta (MS-10.1)

$$\int \frac{d^4t}{(t^2 - z^2m^2 + i\epsilon)^3} = -i\frac{\pi^2}{2z^2m^2} \tag{17}$$

di modo che

$$\bar{u}\Lambda^\mu(p',p)u = \frac{-1}{16\pi^2m^2}\int_0^1 \frac{dz}{z}\,\bar{u}\, N^\mu(\frac{z(p+p')}{2},p,p')u + O(q^2) + (\propto \gamma^\mu) \tag{18}$$

Calcoliamo ora il fattore (vedi eq. 9)

$$X = \bar{u}\, N^\mu(\frac{z(p+p')}{2},p,p')u = \bar{u}\,\gamma^\alpha(\not{p}' - \frac{z(\not{p}+\not{p}')}{2} + m)\gamma^\mu(\not{p} - \frac{z(\not{p}+\not{p}')}{2} + m)\gamma_\alpha u$$

[2] Questo passo è legittimo solo se l'integrale è convergente; per questo immaginiamo di aver fatto una regolarizzazione e di passare al limite alla fine del calcolo.

che con le identità (MS-A14a,b) riscriviamo

$$X = \bar{u}(p') \left(-2(\not{p} - \frac{z(\not{p}+\not{p}')}{2})\gamma^\mu(\not{p}' - \frac{z(\not{p}+\not{p}')}{2}) + 4m(1-z)(p+p')^\mu - 2m^2\gamma^\mu \right) u(p)$$

L'ultimo termine è $(\propto \gamma^\mu)$ e può essere omesso. Nel primo termine utilizziamo l'equazione di Dirac usando a sinistra $\not{p} = \not{p}' - \not{q} = m - \not{q}$ ed a destra $\not{p}' = \not{p} + \not{q} = m + \not{q}$:

$$\begin{aligned} X &= \bar{u}(p') \left[-2 \left(m(1-z) - \not{q}(1-\frac{z}{2}) \right) \gamma^\mu \left(m(1-z) + \not{q}(1-\frac{z}{2}) \right) + 4m(1-z)(p+p')^\mu \right] u(p) + (\propto \gamma^\mu) \\ &= \bar{u}(p') \left[4m(1-z)(1-\frac{z}{2})\frac{1}{2}[\not{q}\,,\,\gamma^\mu] + 4m(1-z)(p+p')^\mu \right] u(p) + O(q^2) + (\propto \gamma^\mu) \end{aligned}$$

e usando la relazione $[\not{q}\,,\,\gamma^\mu] = 2i\sigma^{\mu\nu}q_\nu$, e l'identità di Gordon, otteniamo

(19) $$\bar{u}\, N^\mu(\frac{z(p+p')}{2}, p, p')u = -2m\, z(1-z)\bar{u}(p')i\sigma^{\mu\nu}q_\nu u(p) + O(q^2) + (\propto \gamma^\mu)$$

Infine, sostituendo nella (18), ed eseguendo l'integrale su z,

(20) $$\bar{u}e^2\Lambda^\mu(p', p)u = \frac{e^2}{8\pi^2}\,\bar{u}\,\frac{1}{2m}\sigma^{\mu\nu}q_\nu\, u + O(q^2) + (\propto \gamma^\mu)$$

Paragonando con la eq. (5) otteniamo che

(21) $$e^2 F_2(0) = \frac{e^2}{8\pi^2} = \frac{\alpha}{2\pi}$$

Quindi all'ordine α il momento magnetico di un leptone è $1 + \frac{\alpha}{2\pi}$ magnetoni di Bohr.

2 Integrali

Vogliamo derivare il seguente risultato per integrali che compaiono in teoria delle perturbazioni, citato senza dimostrazione nel Mandl e Shaw, [1], eq. (MS-10.23):

(22) $$I(t, D, n) = \int \frac{d^D k}{[k^2 - s + i\epsilon]^n} = i\pi^{D/2}(-1)^n \frac{\Gamma(n - D/2)}{\Gamma(n)} \frac{1}{s^{n-D/2}}$$

Gli integrali si estendono su uno spazio con D dimensioni, $k = \{k_0, k_1, ...k_{D-1}\}$, con metrica di Minkowski: $k^2 = k_0^2 - k_1^2.... - k_{D-1}^2$. Assumeremo che s sia reale e positivo [3]. Nella realtà siamo interessati al caso $D = 4$, ma vogliamo anche considerare una continuazione analitica a valori arbitrari di D definita dal risultato nella (22) che è una funzione analitica di D, a parte poli in $D/2 = n,\ n+1, \ldots$.

La funzione Γ è definita da

(23) $$\Gamma(x) = \int_0^\infty dy\, y^{x-1}e^{-y}; \qquad \Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1); \qquad \Gamma(n) = (n-1)!$$

Prima di tutto conviene ruotare il cammino di integrazione nella variabile k_0, dalla posizione orizzontale a quella verticale. Se si ruota in senso antiorario non si incontrano singolarità, come mostrato dalla figura 1.

[3] Il valore di $I(t, D, n)$ per valori complessi di s, qualora interessi, può essere ottenuto per continuazione analitica del risultato ottenuto.

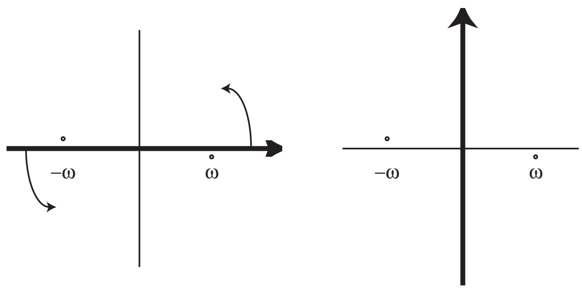

Figura 1: La rotazione di Wick

Questa operazione è detta rotazione di Wick. Dopo la rotazione possiamo passare al limite $\epsilon \to 0$ dato che le due singolarità in $k_0 = \pm\omega = \pm\sqrt{s + k_1^2 .... + k_{D-1}^2}$ sono distanti dal cammino di integrazione.

Possiamo quindi porre: $k_0 = ik_D$ e $dk_0 = i\, dk_D$, e possiamo riscrivere l'integrale come

$$I(t, D, n) = i(-1)^n \int \frac{d^D p}{[p^2 + s]^n} \tag{24}$$

dove $p = \{k_1, \ldots k_{D-1}, k_D\}$ è un vettore a D dimensioni con metrica euclidea, $p^2 = k_1^2 + k_2^2 \ldots + k_D^2$. Per calcolare l'integrale passiamo a coordinate polari nello spazio a D dimensioni. Dato che l'integrando non dipende dalle variabili angolari, queste possono essere integrate direttamente, e con il cambiamento di variabili $x = p^2/s,\ p\, dp = s\, dx/2$ otteniamo:

$$I(t, D, n) = i(-1)^n \int \frac{p^{D-1} dp\, d\Omega_D}{[p^2 + s]^n} = i(-1)^n \frac{\Omega_D}{2s^{n-D/2}} \int_0^\infty \frac{x^{(D-2)/2} dx}{(1 + x)^n} \tag{25}$$

L'integrale è convergente in $x \to \infty$ se $n > D/2$. L'angolo solido in D dimensioni è dato[4] da

$$\Omega_D = \frac{2\pi^{D/2}}{\Gamma(D/2)} \tag{26}$$

Che riproduce i noti risultati: $\Omega_2 = 2\pi$ e, dato che $\Gamma(3/2) = \frac{1}{2}\Gamma(1/2) = \pi^{1/2}/2$, $\Omega_3 = 4\pi$. In quattro dimensioni si ottiene $\Omega_4 = 2\pi^2$. L'integrale residuo si esprime mediante la funzione Beta (Vedi [2], cap. 15 per una dimostrazione, ma usiamo la notazione di [3]),

$$B(z, w) = \int_0^\infty \frac{x^{z-1} dx}{(1 + x)^{z+w}} = \frac{\Gamma(z)\, \Gamma(w)}{\Gamma(z + w)} \tag{27}$$

e ritroviamo infine il risultato della (22). Notiamo che per $D = 4$ si ritrova il risultato della eq. (MS-10.1).

Riferimenti bibliografici

[1] F. Mandl e G. Shaw, *Quantum Field Theory*, Wiley, 1984.

[2] H. Jeffreys e M. Jeffreys, *Methods of Mathematical Physics*, Cambridge University Press, 1972

[3] M. Abramowitz e I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover, 1972.

[4] Come si dimostra facilmente considerando un integrale gaussiano.