



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Laurea Quadriennale in Fisica

Comportamento Dinamico Critico per un Gas Forzato su Reticolo

Relatore: Prof. Sergio Caracciolo
Correlatore: Andrea Sportiello

Cesare Mollica
Matricola: 562354
Anno Accademico: 2006/2007

P.A.C.S: 64.60.-i

Indice

Introduzione	iii
1 Non-Equilibrio	1
1.1 Troppi gradi di libertà	1
1.2 Equilibrio vs Non-Equilibrio	2
1.3 Gas Forzato su Reticolo	2
1.3.1 DLG Critico	4
1.3.2 IDLG in 3D	4
1.4 La scala microscopica	5
1.5 L'approccio mesoscopico	9
1.6 Correlazioni a lungo raggio sopra T_c	12
2 Il comportamento critico	17
2.1 Transizione di fase continua	17
2.1.1 Lunghezza di correlazione	17
2.1.2 Transizione di fase	18
2.1.3 Universalità e leggi a potenza	19
2.1.4 Quale metodo usare	19
2.1.5 I modelli	20
2.2 DLG Critico	21
2.3 Gruppo di Rinormalizzazione	25
2.3.1 Il funzionale dinamico	28
2.3.2 Approssimazione ad albero	29
2.3.3 Risultati esatti ad un loop	31
2.3.4 IDLG vs RDLG	32
3 Universalità in Discussione	35
3.1 Predizioni di Campo-Medio: le Fluttuazioni Trasverse	36
3.2 Short-Time Scaling	38
3.3 Utilizziamo le previsioni di Campo-Medio	40
3.4 Finite-Size Scaling Dinamico	40

4	Laboratorio	43
4.1	Definizione delle osservabili	46
4.1.1	Parametro d'ordine e suscettività	47
4.1.2	Lunghezza di correlazione	48
4.2	Preparazione iniziale	48
4.3	Multi-Spin-Coding	49
5	Evoluzione delle osservabili	53
6	Conclusioni	59
6.1	Teoria vs esperimento	59
6.2	Comportamento universale	69
6.3	Conclusioni	72
	Bibliografia	73

Introduzione

Questa tesi riguarda la dinamica dei *Driven Lattice Gas* ed in particolare il loro studio a tempi brevi.

La grande maggioranza dei sistemi di Meccanica Statistica sino ad oggi studiati, si concentra sulle proprietà di equilibrio, nello schema fornito da Gibbs.

Per quanto riguarda il non-equilibrio, un approccio generale tuttora manca, infatti non si conosce l'espressione analitica della misura che il sistema possiede, neppure nella fortunata situazione in cui venga raggiunto un univoco stato stazionario di non-equilibrio; è necessario dunque ricorrere allo studio di modelli semplificati che ne racchiudano le caratteristiche chiave. Uno dei primi tentativi è stato prodotto da Katz, Lebowitz e Spohn all'inizio degli anni ottanta, i quali studiarono lo stato stazionario di un Gas su Reticolo sotto l'azione di un campo esterno.

Il modello, che da quel momento in poi venne chiamato *Driven Lattice Gas* (DLG), è un ordinario Lattice Gas di Ising, con dinamica conservata, soddisfacente a condizioni periodiche al contorno, interazioni a primi vicini di tipo attrattivo, in contatto con un bagno termico e con la fondamentale caratteristica di possedere un campo forzante uniforme, il quale vizia il tasso di salti delle particelle lungo una determinata direzione. Tra le peculiarità che rendono il modello molto interessante, spiccano la presenza di un flusso costante di energia attraverso il sistema, il raggiungimento di uno stato stazionario di non-equilibrio, la nascita, anche lontano dalla temperatura critica, di correlazioni a lungo raggio, nonché la presenza di una transizione di fase a temperatura finita. Nonostante la sua semplicità il *Driven Lattice Gas* non è ancora stato risolto esattamente.

Allo stato attuale vi è un dibattito aperto circa la natura della transizione di fase, infatti Janssen, Schmittmann, Leung e Cardy (JSLC) hanno sviluppato una teoria di campo che riesce a catturare le caratteristiche base della transizione e che fornisce previsioni esatte a tutti gli ordini in ε per gli esponenti critici. Poiché però rimangono delle discrepanze, Garrido, de los Santos e Muñoz ritengono che il DLG nel limite di forzante infinita (IDLG) non si comporti come previsto da JSLC, ma appartenga invece alla classe di universalità del *Randomly Driven Lattice Gas* (RDLG), come apparentemente verificato in alcune simulazioni numeriche.

A causa di questi risultati contraddittori, risultano utili delle nuove indagini numeriche, al fine di decidere quale teoria descriva il comportamento critico del DLG.

Noi ci siamo concentrati sulle proprietà dinamiche dell'IDLG in 3D.

Abbiamo operato questa scelta poiché un tale studio non è presente in letteratura, ed inoltre poiché le caratteristiche dinamiche di un sistema sono di generale interesse per la fisica statistica e nel tempo è parso sempre più chiaro che tali proprietà sono importanti per completare la comprensione dei fenomeni critici. È ben noto che in generale molte caratteristiche, sia statiche che dinamiche, dei sistemi fisici, evidenziano delle anomalie se i parametri termodinamici sono in prossimità di un punto critico. Il comportamento singolare di molte osservabili risulta caratterizzato da un rilevante grado di universalità e dunque indipendente dai dettagli microscopici del sistema.

Nella dinamica critica si è particolarmente interessati agli aspetti universali dei processi di rilassamento; il sistema viene preparato dal punto di vista macroscopico e successivamente lasciato rilassare verso l'equilibrio (nel nostro caso verso lo stato stazionario di non-equilibrio). Noi abbiamo preparato il sistema in modo tale che ogni striscia di spin parallela al campo avesse globalmente "magnetizzazione" nulla, fissando così a zero, al tempo iniziale, il fattore di struttura e la suscettività (della teoria trasversa).

Lo short-time scaling è un metodo introdotto più di una decina di anni fa da Janssen e Schmittmann, utile all'estrazione degli esponenti critici, analizzando, come detto, l'evoluzione di un sistema da un certo stato verso l'equilibrio (o, chiaramente, verso lo stato stazionario di non-equilibrio). Per un sistema con un grande numero di siti come il nostro, lo studio delle proprietà universali dello stato stazionario diventa, dal punto di vista computazionale, estremamente oneroso; infatti uno studio classico presenta il noto fenomeno del rallentamento critico, che diverge con la taglia del sistema. D'altra parte, la regione critica universale di tempo breve appare quasi immediatamente, quindi si possono ottenere gli esponenti critici attraverso simulazioni molto più brevi.

Nel lavoro di tesi abbiamo quindi sviluppato un programma in C++, che modellizzasse un IDLG in 3D e, per ottenere più informazioni possibili, e dunque una migliore statistica senza perdere in tempo computazionale, abbiamo adottato la tecnica del Multi-Spin-Coding (MSC), ricavando l'esatta combinazione di operatori bit-a-bit che fosse adatta per la nostra dinamica e per il nostro sistema tridimensionale, accorgendoci poi di aver trovato un'espressione generale estendibile con facilità a dimensioni generiche. Per sistemi con una simmetria discreta, come il modello di Ising, è infatti possibile utilizzare il MSC, dal momento che un solo bit è necessario per contenere l'informazione di un singolo spin, dunque un intero può contenere l'informazione di più spin allo stesso tempo. Basandosi su questo fatto, gli spin di Ising di 32 sistemi, possono essere contenuti in un singolo intero di una macchina a 32 bit. Lo spin flip Monte Carlo viene dunque eseguito attraverso operatori bit-a-bit, in modo tale da aggiornare simultaneamente 32 sistemi con una singola sequenza di numeri random. In questo modo il tempo computazionale richiesto per ottenere una buona statistica viene notevolmente ridotto.

Una volta trovata in letteratura una stima per la temperatura critica misurata

per l'IDLG in 3D, abbiamo scelto una opportuna definizione invariante delle osservabili e lanciato diverse simulazioni alla temperatura critica per varie geometrie. Abbiamo quindi registrato l'evoluzione di tempo breve per il fattore di struttura, per la suscettività a vari momenti e per la lunghezza di correlazione, ed infine abbiamo estrapolato le caratteristiche universali del modello.

Capitolo 1

Non-Equilibrio

1.1 Troppi gradi di libertà

Per comprendere la grande maggioranza dei fenomeni che avvengono in natura, è necessario considerare molti gradi di libertà che interagiscono tra loro, sebbene sia spesso possibile ridursi a sottoproblemi in cui l'interazione o il numero di particelle coinvolte possa venire ricondotto all'interno di uno schema più semplice.

La Meccanica Statistica è quel ramo della Fisica che si occupa di studiare in dettaglio le osservabili macroscopiche di interesse, trattando il resto del sistema attraverso una adeguata distribuzione. Esempi canonici di tali osservabili sono le medie, le fluttuazioni, le correlazioni e le funzioni di risposta. Per rendere ancora più chiara la necessità di una trattazione statistica dei problemi fisici, basti pensare che sistemi comuni quali un cristallo, un liquido o un gas, coinvolgono più di 10^{23} elettroni, ed ogni coordinata di ogni elettrone rappresenta un grado di libertà.

Per contro, esistono metodi analitici che sono applicabili soltanto quando si tratta una sola variabile indipendente, cioè un solo grado di libertà. Come esempio si può pensare all'equazione di Schrödinger per la funzione d'onda $\psi(x, y, z)$ per un elettrone, la quale risulta semplice da calcolare se si riescono a separare le variabili, riscrivendo $\psi = \psi_1(r)\psi_2(\theta)\psi_3(\phi)$ in coordinate sferiche. Ora proviamo a pensare ciò che comporterebbe il calcolo della funzione d'onda per l'equazione di Schrödinger del sistema riguardante i 10^{23} elettroni.

In realtà, in molti casi, non è necessario tenere in conto tutti i gradi di libertà coinvolti in un sistema, infatti la risoluzione esatta di un problema fisico è raggiungibile solo in poche fortunate circostanze. Persino la stessa soluzione esatta che la Meccanica Quantistica fornisce per il sistema "Atomo di Idrogeno", viene raggiunta perchè si vincola il povero atomo alla temperatura nulla e a non avere interazioni con alcunché del proprio ambiente, come se fosse perso in un irreale vuoto cosmico.

La Meccanica Statistica invece si avvale del carattere intensivo ed estensivo delle osservabili per ricostruire le proprietà macroscopiche di un sistema complesso, attraverso un suo piccolo campione.

1.2 Equilibrio vs Non-Equilibrio

Molto del successo che sino ad oggi ha ottenuto la trattazione statistica della realtà fisica, è stato raggiunto all'interno dello schema fornito da Gibbs. Purtroppo, però, dobbiamo scontrarci con il fatto che, in natura, i fenomeni di equilibrio sono una rara eccezione; come semplice esempio di sistemi di non-equilibrio, basti pensare alla vastissima classe dei sistemi aperti.

Dal punto di vista tecnico, ciò che rende complessa la trattazione matematica del problema, riguarda la mancanza di uno schema teorico generale all'interno del quale operare. Infatti, i sistemi all'equilibrio termodinamico, vengono descritti attraverso il peso $e^{-\beta\mathcal{H}[\mathcal{C}]}$, mediante il quale è possibile calcolare le osservabili macroscopiche di interesse, mediando su opportuni ensembles. Una volta che sia specificata la Hamiltoniana microscopica $\mathcal{H}[\mathcal{C}]$, dove \mathcal{C} rappresenta una data configurazione del sistema, dal punto di vista teorico il problema risulta risolvibile.

A questo punto è possibile applicare i potenti metodi approssimati esistenti, come le espansioni in serie ed i metodi del *Gruppo di Rinormalizzazione*. Le difficoltà rimanenti attengono ad aspetti prettamente tecnici, nel senso che le somme sulle configurazioni potrebbero risultare non-esattamente ottenibili. Quindi, in aggiunta alle difficoltà tecniche associate con il calcolo di medie in sistemi a molti-corpi, siamo chiamati dapprima a risolvere il più fondamentale problema di trovare la distribuzione stazionaria.

Nei sistemi fuori-equilibrio, non si conosce l'espressione analitica della misura che il sistema possiede e questo rimane vero anche nella fortunata situazione in cui venga raggiunto uno stato-stazionario. Solitamente, in sistemi siffatti, il peso associato alla misura soddisfa ad una Master-Equation, la quale però, nei sistemi di interesse, non si riesce a risolvere in modo esatto.

Sono proprio queste difficoltà matematiche che hanno portato ad avere in letteratura uno studio molto più vasto dei fenomeni di equilibrio.

Per rendere la complessità di tale studio meno ardua, è possibile ridursi all'analisi di quei sistemi che abbiano raggiunto uno stato stazionario di non-equilibrio, così che le distribuzioni, sebbene non-Hamiltoniane, siano divenute tempo-indipendenti.

Questa classe di sistemi, sebbene non sia quella più generale, comprende moltissimi esempi in varie scienze quali la fisica, la biologia e la chimica.

1.3 Gas Forzato su Reticolo

I *Driven Diffusive Systems* (DDS), sono stati introdotti intorno agli anni '80, e rappresentano uno dei più celebri modelli utilizzati per descrivere i sistemi che raggiungono uno stato stazionario di non-equilibrio. Tra le peculiarità che li caratterizzano troviamo una dinamica conservata e la non soddisfazione del principio del bilancio dettagliato. Un fenomeno che rende il modello sempre di grande attualità, giace nella comparsa, anche sopra la temperatura critica, di correlazioni a lungo-raggio. Ricordiamo infatti che l'ordinario modello di Ising, che può venire

pensato come il parente di equilibrio più prossimo al (DDS), presenta invarianza di scala solo in prossimità della temperatura critica T_c . Durante gli anni '80, vi sono stati diversi studi rivolti ai sistemi di non-equilibrio. Uno dei più spesso analizzati è il Gas Forzato su Reticolo, a causa della semplicità della sua formulazione e ricchezza di proprietà. In particolare, esso è uno dei pochi semplici sistemi di non-equilibrio che mostrano delle transizioni di fase simili a quelle dei sistemi della meccanica statistica di equilibrio. La differenza tra un sistema diffusivo forzato e ed un sistema all'equilibrio risiede nel fatto che, sebbene entrambi raggiungano uno stato stazionario della loro rispettiva dinamica stocastica per grandi tempi, il sistema diffusivo forzato viene definito soltanto attraverso la sua dinamica, mentre un sistema di equilibrio risulta completamente caratterizzato una volta che sia stata definita la Hamiltoniana microscopica del sistema, indipendentemente dalla scelta della dinamica.

Il Driven Lattice Gas canonico è dunque un modello di gas su reticolo, governato da una dinamica di tipo Kawasaki e con un campo forzante. Il campo vizia il moto delle particelle lungo una direzione privilegiata, in modo tale che con l'imposizione di condizioni periodiche al contorno si origina una corrente di particelle lungo quella direzione. L'esistenza di una corrente stazionaria è la manifestazione della natura fuori-equilibrio dello stato stazionario.

Fisicamente il DLG risulta applicabile ai conduttori super-ionici e ad alcune proprietà fluide dei liquidi binari sotto gravità, sebbene più complicati a causa dei modi idrodinamici.

Il DLG è un sistema accoppiato con due riserve di energia, in modo tale che si stabilisca un flusso stabile di energia attraverso il sistema. Un esempio semplice di un tale schema può venire utilmente rappresentato da una resistenza che guadagna energia da una batteria e la perde attraverso l'atmosfera.

A causa di tutta questa incertezza, un utile approccio consiste nell'investigare dei sistemi che siano il più semplice possibile e che allo stesso tempo contengano l'essenza del problema. Proprio con questo spirito Lenz suggerì il modello di Ising (1925), nel tentativo di capire la natura della transizione di fase ferromagnetica.

Il *Driven Lattice Gas* rappresenta il tentativo di modellizzare un sistema di non-equilibrio. Se la forzante fosse assente, e dunque il sistema non fosse *Driven*, le particelle salterebbero verso i siti primi-vicini liberi con un tasso dovuto unicamente alle differenze nelle energie configurazionali tra lo stato di arrivo e quello di partenza.

Attraverso l'imposizione di condizioni periodiche al contorno, la master equation microscopica possiede una invarianza traslazionale, il che rende la descrizione del modello molto meno complessa, evitando inoltre tutti i tipici fenomeni di bordo. Su un reticolo finito, il sistema evolve verso uno stato stazionario di non-equilibrio, con una corrente di particelle non-nulla.

In principio, ricavando la soluzione della *Master Equation* a cui, dal punto di vista microscopico, soddisfa la misura associata al sistema, si troverebbe la distribuzione che il sistema raggiunge allo stato-stazionario e, attraverso questa, le quantità termodinamiche e le transizioni di fase. Poiché però la soluzione a questa

equazione lineare non si riesce a ottenere, ci si trova costretti ad accontentarsi di fare delle approssimazioni e poichè si è interessati al comportamento collettivo nel limite di bassa frequenza, una buona tecnica si ha nella descrizione continua a livello mesoscopico, in termini di una equazione di Langevin.

Questo approccio pone le basi per l'analisi in termini di una teoria di campo dei fenomeni critici.

Per tutte le temperature sopra quella critica, regione in cui il modello di Ising di equilibrio è analitico, le tipiche correlazioni nel sistema forzato risultano singolari nello spazio dei momenti, portando a decadimenti a legge di potenza nello spazio delle configurazioni.

Ciò che risulta utile fare per procedere nella complessità del problema, è avanzare attraverso argomenti fisici di tipo euristico, sfruttando anche le simmetrie del sistema.

Una strada molto fruttuosa nel fornire evidenze sul comportamento macroscopico del modello, si è dimostrata l'implementazione numerica, la quale appare molto valida, a patto che la dinamica microscopica, sebbene non possa che rimanere solo una caricatura di quella reale, ne preservi le caratteristiche chiave essenziali.

1.3.1 DLG Critico

Per quanto riguarda il comportamento critico, vi è una grande differenza tra il modello di Ising ordinario e quello forzato, consistente nella presenza di una forte anisotropia che fa scalare le correlazioni nella direzione longitudinale al campo, in modo differente rispetto alle correlazioni lungo le direzioni trasverse al campo stesso. Grazie alle tecniche della *Teoria dei Campi* nell'analisi del *Gruppo di Renormalizzazione*, molti degli esponenti critici vennero ottenuti analiticamente da Janssen, Schmittmann, Leung e Cardy, prima che questi venissero misurati nelle simulazioni. In questi studi, il punto fisso di Wilson-Fisher, il quale controlla le proprietà critiche del sistema non-forzato, risulta essere instabile, mentre un nuovo punto fisso non-Hamiltoniano viene trovato. Sorprendentemente, anche se questo approccio si basa su una espansione in potenze di $(5 - d)$, gli esponenti critici possono venire calcolati esattamente a tutti gli ordini, come risultato di una simmetria continua associata con questo punto fisso.

1.3.2 IDLG in 3D

Noi concentriamo la nostra attenzione verso l'*Infinitely Driven Lattice Gas* (IDLG) in 3D, il quale è un canonico sistema diffusivo forzato tridimensionale, definito su un reticolo cubico, dove i salti delle particelle lungo una data direzione reticolare, vengono favoriti da un campo esterno infinito, mentre quelli lungo le direzioni trasverse seguono la dinamica Kawasaki. Il nostro risultato giace nel fornire una indicazione circa quale delle differenti teorie esistenti sia valida nel descrivere il comportamento critico. Noi analizzeremo le proprietà dello scaling dinamico di taglia finita, utilizzando un insieme di reticoli di diverse dimensioni.

Uno degli aspetti più complessi che riguardano lo studio del DLG critico, risiede nel fatto che sono coinvolte due scale di lunghezza, e cioè ξ_{\parallel} e ξ_{\perp} divergono con esponenti differenti nella direzione longitudinale al campo e lungo le direzioni trasverse. Dunque si ha la comparsa di uno scaling fortemente anisotropo.

Dal punto di vista della teoria dei campi, il modello bidimensionale risulta maggiormente complicato di quelli in più alte dimensioni e questo è dovuto al fatto che la costante di accoppiamento per il campo ϕ^4 , denotata con la lettera u , risulta pericolosamente irrilevante per $d > 2$, ma diventa marginale in $d = 2$.

Mentre gli argomenti di scaling possono prevedere gli effetti di u nel finite-size scaling per $d > 2$, vi sono pochi indizi circa l'esistenza e la possibile forma delle associate correzioni logaritmiche in $d = 2$. Dunque questo può spiegare come mai l'accordo tra i test e la teoria in $d = 2$ non sia impeccabile; piccole deviazioni dallo scaling possono essere dovute alla presenza di piccole correzioni logaritmiche. Anche per questo motivo, un test più stringente risiede nel modello tridimensionale. Una delle caratteristiche più interessanti che riguardano il DLG è l'andamento a legge di potenza nelle correlazioni a lungo raggio per la densità di particelle, anche nella fase disordinata di alta temperatura. Questa è una manifestazione della violazione del teorema di fluttuazione-dissipazione nei sistemi diffusivi forzati.

Poiché però la validità dei risultati della teoria di campo non è ancora stata del tutto risolta, sono necessarie, come detto, ulteriori simulazioni Monte-Carlo, che per quanto riguarda i DLG risultano difficoltose, in quanto si ha la presenza di un lungo tempo di rilassamento e di correlazioni fortemente anisotrope, dovute l'una alla conservazione locale e l'altra al campo esterno.

1.4 La scala microscopica

Il noto *Ising Lattice Gas*, definito su un reticolo ipercubico d -dimensionale con N siti, è la base per il nostro modello. Ogni sito può esistere in due stati, pieno o vuoto, labellato da una variabile occupazionale $n_i = \{1, 0\}$, per il sito i -esimo. Questa scelta implica una interazione di volume escluso, poiché ogni sito non può contenere più di una particella. Un set completo $\{n_i\}$, con $i = 1, \dots, N$ identifica una particolare configurazione \mathfrak{C} . E' possibile passare dall'utilizzo della variabile n_i , allo spin di Ising s_i , attraverso la semplice mappa $s_i = 2n_i - 1$; in tal modo parlare di spin o di particelle e dunque di magneti o di gas, risulta del tutto equivalente.

Poiché siamo interessati alla dinamica conservata, considereremo soltanto configurazioni con un numero fissato di particelle $\sum_{i=1}^N n_i$, il che si traduce, in linguaggio di spin, a fissare la magnetizzazione.

L'energia interna di una particolare configurazione \mathfrak{C} è data dalla somma delle interazioni tra le particelle e, per mantenere il modello il più semplice possibile, queste vengono assunte essere a primi-vicini, il che conduce direttamente alla nota Hamiltoniana di Ising

$$\mathcal{H}[\mathfrak{C}] = -J \sum_{\langle i,j \rangle} n_i n_j \quad (1.1)$$

dove $\langle i, j \rangle$ denota la somma sui siti primi-vicini (pv).

Come è noto, una J positiva modella una interazione di tipo attrattivo (ferromagnetica, in linguaggio di spin), mentre una J negativa implica una interazione repulsiva tra le particelle (antiferromagnetica).

Le interazioni del sistema con l'ambiente, vengono rappresentate attraverso l'accoppiamento con un bagno termico alla temperatura T e dunque tutte le proprietà di equilibrio possono venire calcolate pesandole con la distribuzione *canonica*

$$P_{eq}(\mathfrak{C}) = \frac{e^{-\beta\mathcal{H}}}{Z}, \quad (1.2)$$

dove Z rappresenta la funzione di partizione e $\beta = \frac{1}{k_B T}$.

Fissando la densità delle particelle a $\rho = 1/2$, e dunque mantenendo, in linguaggio di spin, la magnetizzazione a zero, per $d > 1$, il Lattice Gas di Ising esibisce, alla temperatura critica T_c , la nota transizione di fase del second'ordine. Nel celeberrimo caso $d = 2$, su reticolo quadrato, T_c assume il valore di Onsager (1944) pari a $0.5673 \frac{J}{k_B}$. Tutte le proprietà critiche risultano universali ed appartenenti alla classe di universalità di Ising (Kadanoff, 1971).

Poiché il nostro interesse verte sul comportamento di non-equilibrio, abbiamo bisogno di specificare come una data configurazione \mathfrak{C} evolva verso quella nuova \mathfrak{C}' . Questo si può fare specificando un insieme di tassi di transizione $W[\mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{C}']$. Come conseguenza possiamo ora trattare la distribuzione di probabilità $P(\mathfrak{C}, t)$, la quale soddisfa alla *Master Equation* in tempo continuo:

$$\frac{\partial}{\partial t} P(\mathfrak{C}, t) = \sum_{\mathfrak{C}'} \{W[\mathfrak{C}' \rightarrow \mathfrak{C}]P(\mathfrak{C}', t) - W[\mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{C}']P(\mathfrak{C}, t)\} \quad (1.3)$$

o una simile equazione di bilancio in tempo discreto. La specifica scelta di W determina la dinamica del modello e, assieme con le condizioni periodiche al contorno, la distribuzione dello stato stazionario: $P^*(\mathfrak{C}) = P(\mathfrak{C}, t \rightarrow \infty)$. Per i sistemi di equilibrio, la scelta del tasso di transizione W deve venire vincolata per assicurare che $P^*(\mathfrak{C}) = P_{eq}(\mathfrak{C})$. Questa restrizione si può porre in modo molto conveniente nella forma della condizione del *bilancio dettagliato*:

$$\frac{W[\mathfrak{C}' \rightarrow \mathfrak{C}]}{W[\mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{C}']} = \frac{P_{eq}(\mathfrak{C})}{P_{eq}(\mathfrak{C}')}. \quad (1.4)$$

Il punto importante qui è che il rapporto

$$\frac{P_{eq}(\mathfrak{C})}{P_{eq}(\mathfrak{C}')} \quad (1.5)$$

si conosce esplicitamente ed è $\exp(\beta\Delta\mathcal{H})$, con $\Delta\mathcal{H} = \mathcal{H}(\mathfrak{C}) - \mathcal{H}(\mathfrak{C}')$.

È possibile dunque scegliere tassi di transizione della forma

$$W[\mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{C}'] = w(\beta\Delta\mathcal{H}), \quad (1.6)$$

con una appropriata w soddisfacente alla condizione

$$\frac{w(-x)}{w(x)} = e^x. \quad (1.7)$$

Per un sistema diffusivo, forzato o no, il numero totale di particella viene conservato e dunque per descrivere il salto delle particelle verso i siti vuoti primi-vicini, viene adottata una dinamica di tipo Kawasaki (1966,1972). Salti con range finiti più lunghi, mentre aggiungono complessità al modello, non conducono ad alcuna significativa differenza nel comportamento collettivo. Ora introduciamo il campo forzante, che labelliamo con \vec{E} , e al quale ci riferiremo come al campo “elettrico”, mentre immaginiamo che le particelle siano “cariche”. Nel nostro modello esso è uniforme nello spazio e nel tempo e punta lungo uno specifico asse reticolare. Esso vizia la probabilità di salto delle particelle, favorendo i salti lungo la sua direzione (e viceversa), mentre non ha influenza sulle direzioni trasverse. Localmente questo effetto risulta molto simile a quello del campo gravitazionale, così che, per determinate condizioni periodiche al contorno, esso può venire incorporato nella Hamiltoniana come una energia “potenziale”. In tali casi, lo stato stazionario del sistema risulta uno stato di equilibrio descritto da una distribuzione di Boltzmann. Il nostro interesse è precisamente quello di realizzare il tipo di condizioni che non permettano una rappresentazione globale di tipo Hamiltoniano, in modo tale che vebga indotto uno stato stazionario di non-equilibrio.

Sia che una energia potenziale globale venga definita oppure no, appare ragionevole scegliere dei tassi di transizione che includano il lavoro svolto localmente dal campo. Dunque semplicemente aggiungiamo un termine lE a $\Delta\mathcal{H}$ nelle funzioni dei tassi, dove: $l = (-1, 0, 1)$ per i salti (lungo, trasversi, contro) al campo \vec{E} , mentre E rappresenta il prodotto del modulo di \vec{E} , della “carica” delle particelle e di una costante reticolare. Dunque scegliamo:

$$W[\mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{C}'] = w[\beta(\Delta\mathcal{H} + lE)], \quad (1.8)$$

con w ancora soddisfacente la (1.7), una condizione di “bilancio dettagliato locale”. La specifica scelta di w determina completamente i tassi di transizione. Uno dei rate di transizione più noti è quello di Metropolis (1953), in cui si ha $w(x) = \min\{1, e^{-x}\}$.

Infine dobbiamo specificare le condizioni al bordo. Poichè, come detto, il nostro interesse è rivolto verso gli stati stazionari di non-equilibrio, la scelta più semplice da fare qui è quella delle condizioni periodiche al contorno (PBC). Chiaramente queste, mentre rispettano l’invarianza traslazionale, indurranno una corrente globale attraverso il sistema. Fornite queste condizioni, la topologia del reticolo diviene un toro, con un campo uniforme \vec{E} che gli “gira” attorno. Risulta fondamentale a questo punto notare che questo campo non può venire scritto come il gradiente di un potenziale elettrostatico; al contrario esso può venire prodotto da un flusso magnetico che cresce linearmente nel tempo. Proprio per lo stesso motivo, non è più ora possibile immaginare la gravità come la sorgente del campo. Quindi la

combinazione della forzante uniforme \vec{E} e delle *PBC* è la caratteristica chiave del modello. Questo esclude l'esistenza di una semplice Hamiltoniana effettiva che incorpori sia l'energia configurazionale delle particelle, sia la loro energia potenziale nel campo esterno.

Notiamo che sono proprio queste peculiarità del modello a rendere difficile la sua realizzazione sperimentale, infatti o noi abbandoniamo le *PBC* in favore del campo uniforme, poiché un flusso magnetico che cresce linearmente nel tempo si può mantenere solo per brevi tempi, oppure abbiamo bisogno di permettere al campo di essere tempo-dipendente.

Ora che abbiamo il modello completamente specificato, possiamo in principio trovare P^* risolvendo le equazioni lineari:

$$\sum_{\mathfrak{c}'} \{W[\mathfrak{c}' \rightarrow \mathfrak{c}]P^*(\mathfrak{c}') - W[\mathfrak{c} \rightarrow \mathfrak{c}']P^*(\mathfrak{c})\} = 0. \quad (1.9)$$

In pratica questo non si riesce a fare, tranne nel caso in cui si ponga $J = 0$, oppure se si trattano reticoli estremamente piccoli, di taglia 2×3 o 2×4 .

Per ricavare utili informazioni circa il comportamento collettivo, come le transizioni di fase, rivolgiamo la nostra attenzione alle simulazioni Monte Carlo e, nella convinzione che questo massimizzi gli effetti della dinamica di non-equilibrio, poniamo il campo forzante ad intensità infinita, modello che viene detto *Infinity Driven Lattice Gas (IDLG)*.

Si può notare come la conservazione del numero di particelle implichi che, alla transizione, la fase ordinata consista di fasi co-esistenti di regioni ricche di “particelle” ed altre ricche di “buche”, alle quali ci riferiamo come alle strisce. Nel caso forzato le strisce sono sempre parallele al campo \vec{E} , mentre strisce stabili ortogonali ad \vec{E} non sono mai state osservate. Per contro, nel modello non forzato, le strisce si possono orientare in tutte le direzioni.

Un ruolo centrale nel modello viene rappresentato dalle sue simmetrie, le quali giocano un ruolo chiave nella determinazione delle proprietà universali; infatti la versione microscopica del modello e la sua controparte mesoscopica continua devono soddisfare le stesse simmetrie se appartengono alla stessa classe di universalità.

Per quanto riguarda il nostro modello, tutti i tassi di transizione scelti in accordo con la (1.8) sono invarianti sotto le seguenti operazioni:

- traslazioni, modulo la peridicità del reticolo;
- inversione del campo e coniugazione di “carica” (c), consistente nello scambiare le “cariche” con le buche e viceversa, cioè $\vec{E} \Leftrightarrow -\vec{E}$ e $n_i \Leftrightarrow 1 - n_i$;
- inversione del campo e riflessione in y (R), la coordinata della direzione del campo, cioè $\vec{E} \Leftrightarrow -\vec{E}$ ed $y \Leftrightarrow -y$.

Combinando le ultime due si giunge all'invarianza sotto trasformazioni CR, cioè:

particella \Leftrightarrow *buca* ed $y \Leftrightarrow -y$.

1.5 L'approccio mesoscopico

Nel lavoro di tesi siamo interessati alle caratteristiche universali dell' *Infinitely Driven Lattice Gas*, dunque la nostra attenzione sarà certamente rivolta verso i fenomeni che attengono alle transizioni di fase del secondo ordine. Detto questo risulta chiaro che i fenomeni di tipo cooperativo non possono venire messi in evidenza attraverso una visione di tipo microscopico. Al fine di descrivere il comportamento collettivo al livello macroscopico risulta necessario partire con una visione di tipo "mesoscopico". Per il modello di Ising di equilibrio, la visione mesoscopica viene fornita tramite la Hamiltoniana di Landau-Ginzburg-Wilson (Amit 1984). Detto questo scriviamo una equazione del moto di Langevin per la densità di particelle $\rho(\vec{x}, t)$.

Dal punto di vista teorico, sarebbe possibile partire dalla *Master Equation* per la variabile occupazionale di sito n_i , ricavando poi la versione mesoscopica a grana-grossa per $\rho(\vec{x}, t)$, attraverso adeguate medie. Nella pratica questa strada non è percorribile, ma si preferisce invece postulare delle equazioni fenomenologiche, tipicamente sulla base delle simmetrie del modello e della fisica sottostante.

La simmetria principale presente in un sistema di tipo diffusivo come il nostro, è la conservazione del numero totale di particelle, sicché tutte le equazioni del moto per il campo di densità prendono la forma dell'equazione di continuità:

$$\partial_t \rho = -\vec{\nabla} \cdot \vec{J}. \quad (1.10)$$

Vicino all'equilibrio, la dinamica a grana-grossa del gas su reticolo di Ising con densità conservata, risulta invariante sotto traslazioni e rotazioni, così come sotto scambio particella-buca. Quest'ultimo è noto come *Model B* nella terminologia di Hohenberg-Halperin (1977). Esprimendo $\rho(\vec{x}, t)$ in termini della magnetizzazione locale:

$$\phi(\vec{x}, t) = 2\rho(\vec{x}, t) - 1 \quad (1.11)$$

e come $\mathcal{H}[\phi]$ l'Hamiltoniana di Landau-Ginzburg-Wilson:

$$\mathcal{H}[\phi] = \int d^d x \left\{ \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \phi)^2 + \frac{1}{2} \tau \phi^2 + \frac{u}{4!} \phi^4 + \dots \right\}, \quad (1.12)$$

l'equazione del moto diviene

$$\partial_t \phi = \nabla_i \left\{ \lambda \nabla_i \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \phi} + \xi_i \right\}. \quad (1.13)$$

In (1.12), $\tau \propto (T - T_c)$ misura la deviazione dal punto critico, mentre $u (> 0)$ è necessaria per la stabilità della teoria sotto T_c ed anche per spiegare la magnetizzazione spontanea. La corrente di Langevin viene denotata da ξ_i ed essendo Gaussiana con media nulla, la sua distribuzione può venire specificata dalle seguenti relazioni:

$$\langle \xi_i(\vec{x}, t) \rangle = 0 \quad (1.14a)$$

$$\langle \xi_i(\vec{x}, t) \xi_j(\vec{x}', t') \rangle = N_{ij} \delta(\vec{x} - \vec{x}') \delta(t - t') \quad (1.14b)$$

dove N_{ij} è la matrice di correlazione del rumore. Poiché questa dinamica è costruita per descrivere le fluttuazioni critiche attorno all'equilibrio termico, N_{ij} deve essere scelto in modo tale che il teorema di *Fluttuazione Dissipazione* (FDT) venga soddisfatto (Kubo, 1966), cioè:

$$N_{ij} = 2\lambda k_B T \delta_{ij}. \quad (1.15)$$

Questo assicura che la distribuzione stazionaria sia data dall'usuale peso di Boltzmann $e^{-\beta\mathcal{H}}$. Le equazioni (1.12-1.15) formano un completo insieme di specificazioni, dalle quale possono venire calcolate le proprietà critiche statiche e dinamiche; un metodo potente per la dinamica è dato dalla teoria perturbativa rinormalizzata. Infatti il *Gruppo di Rinormalizzazione*, attraverso l'espansione attorno alla dimensione critica superiore $d_c = 4$, conduce al noto punto fisso di Wilson-Fisher (1972).

Ora consideriamo l'influenza del campo forzante \vec{E} . Quest'ultimo genera un contributo aggiuntivo \vec{j}_E alla corrente \vec{J} . In principio, anche \vec{j}_E può venire calcolata esplicitamente con un procedimento a grana-grossa per la dinamica microscopica ma, anche in questo caso, nella pratica viene postulata la più semplice forma di $\vec{j}_E(\rho, \vec{E})$ consistente con le simmetrie. Essendo un vettore, questo deve risultare proporzionale ad \vec{E} , mentre il fattore rimanente deve essere isotropo ed invariante sotto

$$\text{particella} \Leftrightarrow \text{buca} \quad \text{e} \quad \vec{E} \Leftrightarrow -\vec{E}. \quad (1.16)$$

Dunque questo fattore deve essere pari in entrambi ϕ ed \vec{E} . Inoltre deve annullarsi se non sono presenti localmente particelle ($\rho = 0$) o buche ($1 - \rho = 0$). La scelta più semplice che riesca a soddisfare queste richieste è $\rho(1 - \rho)\vec{\varepsilon}$. Qui $\vec{\varepsilon}$ è una nuova funzione dispari a grana-grossa della grandezza microscopica \vec{E} , la cui forma precisa non è necessario conoscere. Quindi assorbendo ogni altra costante nella definizione di $\vec{\varepsilon}$ arriviamo alla:

$$\vec{j}_E = 4\rho(1 - \rho)\vec{\varepsilon} = (1 - \phi^2)\vec{\varepsilon}. \quad (1.17)$$

Come primo tentativo verso l'equazione del moto, si trova la tentazione di aggiungere all'equazione (1.13) il termine:

$$-\vec{\nabla} \cdot \vec{j}_E = \varepsilon \partial \phi^2, \quad (1.18)$$

dove ε è il modulo di $\vec{\varepsilon}$ e ∂ denota l'operatore di gradiente nella direzione del campo. Invece si ha motivo di ritenere che la piena isotropia, esemplificata in (1.15) e (1.13), non sopravviva al processo di grana-grossa per una dinamica microscopica fortemente anisotropa come la nostra. In altre parole, termini quali $\varepsilon \partial \phi^2$ generano anisotropie in entrambe (1.15) e (1.13). Dunque, la semplice aggiunta del termine (1.18) sarebbe adeguata solo per considerare gli effetti di E agli ordini più bassi. Per i casi generali ed in special modo per campi saturi (IDLG), dobbiamo

allargare il nostro spazio dei parametri e considerare gli accoppiamenti associati con i gradienti longitudinali essere differenti da quelli che controllano i gradienti trasversi. Similmente, la matrice di rumore si attende deviare dall'unità. A causa della invarianza CR, pari (dispari) potenze di ∂ , devono venire accompagnate da pari (dispari) potenze di ε . Infine, tutte le proprietà associate con il sottospazio trasverso $(d-1)$ -dimensionale sono isotrope.

La risultante equazione del moto di Langevin, può ora venire scritta. Denotando i gradienti *trasversi* con $\vec{\nabla}$, abbiamo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\phi(\vec{x}, t) = \lambda \{ & (\tau_{\perp} - \nabla^2)\nabla^2\phi + (\tau_{\parallel} - \alpha_{\parallel}\partial^2)\partial^2\phi - 2\alpha_{\times}\partial^2\nabla^2\phi \\ & + \frac{u}{3!}(\nabla^2\phi^3 + k\partial^2\phi^3) + \varepsilon\partial\phi^2 \} - (\vec{\nabla} \cdot \vec{\xi} + \partial\zeta). \end{aligned} \quad (1.19)$$

Poichè ci aspettiamo che le correlazioni di rumore siano anisotrope, denotiamo le correnti di Langevin trasverse e longitudinali con $\vec{\xi}$ e ζ , rispettivamente. N_{ij} risulta ancora diagonale, ma isotropa solo nel sottospazio trasverso. Denotando i due distinti valori con n_{\perp} e n_{\parallel} , abbiamo, invece di (1.15) e (1.14), le:

$$\langle \vec{\nabla} \cdot \vec{\xi}(\vec{x}, t) \vec{\nabla}' \cdot \vec{\xi}(\vec{x}', t') \rangle = n_{\perp}(-\nabla^2)\delta(\vec{x} - \vec{x}')\delta(t - t') \quad (1.20a)$$

$$\langle \partial\zeta(\vec{x}, t) \partial'\zeta(\vec{x}', t') \rangle = n_{\parallel}(-\partial^2)\delta(\vec{x} - \vec{x}')\delta(t - t'). \quad (1.20b)$$

Le equazioni (1.19-1.20) possono sembrare descrivere niente di più che un sistema di equilibrio con accoppiamenti anisotropi in (1.1) e/o coefficienti di trasporto anisotropi. Invece, per tali sistemi, il *Teorema di Fluttuazione Dissipazione* (FDT) continua a valere e quindi, per lo meno, la matrice di rumore deve essere proporzionale alla matrice di diffusione, D_{ij} . Detto in altri termini, per sistemi anisotropi vicini all'equilibrio, si deve avere:

$$\frac{\tau_{\perp}}{\tau_{\parallel}} = \frac{n_{\perp}}{n_{\parallel}}. \quad (1.21)$$

Al contrario, la forzante \vec{E} conduce il sistema fuori equilibrio, il che porta, anche se si raggiunge lo stato stazionario di non-equilibrio, alla violazione del *Teorema di Fluttuazione- Dissipazione* (FDT) e dunque vale la relazione:

$$\frac{\tau_{\perp}}{\tau_{\parallel}} \neq \frac{n_{\perp}}{n_{\parallel}}. \quad (1.22)$$

È molto importante notare che il (FDT) è rotto a tutte le temperature sopra la criticalità. In secondo luogo, vogliamo illustrare un'altra tra le grosse differenze tra questo sistema ed uno anisotropo vicino all'equilibrio e cioè in come i parametri trasportino l'informazione circa la transizione di fase del secondo ordine. Per il sistema all'equilibrio, valendo l'FDT, entrambe τ_{\parallel} e τ_{\perp} risultano inversamente proporzionali alla suscettività statica e dunque entrambe devono svanire a T_c con lo stesso esponente critico γ , sebbene la loro ampiezza possa differire. Al contrario, fuori equilibrio l'FDT non vale e teoricamente esistono tre possibilità quando T viene abbassata verso T_c :

- $\tau_{\perp} \rightarrow 0$ ma $\tau_{\parallel} > 0$;
- $\tau_{\perp} > 0$ ma $\tau_{\parallel} \rightarrow 0$;
- entrambe nulle.

In pratica questi parametri devono venire scelti in modo tale da riprodurre, per lo meno qualitativamente, quello che viene osservato. Nelle simulazioni, viene osservata solo la separazione in fase con le interfacce *parallele* al campo forzante, il che conduce ad adottare la scelta:

$$\tau_{\parallel} > 0 \quad \text{con} \quad \tau_{\perp} \rightarrow 0 \quad (1.23)$$

per descrivere la criticalità. Contemporaneamente, entrambe n_{\parallel} e n_{\perp} , essendo le varianze nelle correnti di rumore, devono mantenersi positive. Detto questo si capisce che la violazione del *Teorema di Fluttuazione Dissipazione*, inteso come nel senso indicato in (1.22), risulta massima a T_c . L'equazione di Langevin (1.19), assieme con le correlazioni di rumore (1.20) e l'FDT (1.22), formano la base per molti studi analitici. Nella regione critica τ_{\perp} è piccolo e dunque sia il rumore, sia le non-linearità, devono venire prese in considerazione. Poiché le espansioni perturbative canoniche falliscono in questo regime, risulta necessario ricorrere alla teoria di campo rinormalizzata. Ben oltre la regione critica, le fluttuazioni del parametro d'ordine locale sono piccole, in modo tale che gli effetti delle non-linearità siano anch'esse trascurabili e così la teoria diviene essenzialmente Gaussiana e si risolve in modo semplice. Notiamo che le violazioni dell'FDT conducono ad effetti molto drammatici, come quello di correlazioni a lungo raggio nel regime di *alta* temperatura.

1.6 Correlazioni a lungo raggio sopra T_c

È noto che, lontano dal punto critico, il modello di Ising all'equilibrio presenta correlazioni a corto-raggio, controllate dalla lunghezza di correlazione finita ξ . Queste decadono in modo esponenziale quando, detta r la tipica separazione inter-particellare, quest'ultima diviene grande se comparata con ξ . Tradotta nello spazio dei momenti, questa proprietà prende la forma di "analiticità nell'origine". Per quanto concerne il modello forzato, si ha che le correlazioni, decadono a legge di potenza per tutte le temperature $T > T_c$. Le loro trasformate di Fourier, i fattori di struttura, mostrano una discontinuità singolare nell'origine. Si può mostrare che questo tipo di singolarità sono di tipo differente rispetto a quelle critiche, infatti è presente una lunghezza di correlazione finita, e può venire estratto un decadimento esponenziale nascosto, simile al comportamento di equilibrio. È inoltre possibile ricondurre il comportamento invariante di scala, con la violazione dell'FDT. Per temperature ben oltre la temperatura critica T_c , un buon numero di proprietà possono venire comprese attraverso una equazione del moto linearizzata. Il punto

partenza è:

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi(\vec{x}, t) = \lambda \{(\tau_{\perp} - \alpha_{\perp}\nabla^2)\nabla^2\phi + (\tau_{\parallel} - \alpha_{\parallel}\partial^2)\partial^2\phi - 2\alpha_{\times}\partial^2\nabla^2\phi\} - (\vec{\nabla} \cdot \vec{\xi} + \partial\zeta) \quad (1.24)$$

con il rumore soddisfacente alla condizione $\langle \vec{\xi} \rangle = \langle \zeta \rangle = 0$ ed alle (1.20). Risulta semplice trovare tutte le correlazioni attraverso una equazione lineare di Langevin definendo $\phi(\vec{x}, t) \equiv \int e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} + \omega t)}\phi(\vec{k}, \omega)$, così che la soluzione di (1.24) risulti:

$$\phi(\vec{k}, \omega) = \{i\omega + \Lambda(\vec{k})\}^{-1}(-i)\{\vec{k} \cdot \vec{\xi} + k_{\parallel}\zeta\} \quad (1.25)$$

dove

$$\Lambda(\vec{k}) \equiv \lambda\{\tau_{\perp}k_{\perp}^2 + \tau_{\parallel}k_{\parallel}^2 + (\alpha_{\perp}k_{\perp}^4 + 2\alpha_{\times}k_{\parallel}^2k_{\perp}^2 + \alpha_{\parallel}k_{\parallel}^4)\}. \quad (1.26)$$

Poiché il rumore ha media nulla, si ottiene immediatamente, come atteso, $\langle \phi \rangle = 0$. Oltre a questo, utilizziamo le (1.20) per ottenere il fattore di struttura *dinamico*:

$$S(\vec{k}, \omega) \equiv \langle \phi(\vec{k}, \omega)\phi(-\vec{k}, -\omega) \rangle = \frac{\vec{k} \cdot \mathbb{N} \cdot \vec{k}}{\omega^2 + \Lambda^2(\vec{k})} \quad (1.27)$$

dove \mathbb{N} denota la matrice di rumore diagonale, cioè:

$$\vec{k} \cdot \mathbb{N} \cdot \vec{k} \equiv n_{\perp}k_{\perp}^2 + n_{\parallel}k_{\parallel}^2. \quad (1.28)$$

Dalla (1.27) arriviamo al fattore di struttura dello stato *stazionario* $S(\vec{k})$, che è l'analogo del fattore di struttura statico per i sistemi di equilibrio, attraverso integrazione su ω :

$$S(\vec{k}) = \frac{\vec{k} \cdot \mathbb{N} \cdot \vec{k}}{2\Lambda(\vec{k})}. \quad (1.29)$$

Scrivendo $2\Lambda(\vec{k}) = \vec{k} \cdot \mathbb{D} \cdot \vec{k} + O(k^4)$, dove \mathbb{D} è la matrice di diffusione, cioè:

$$\vec{k} \cdot \mathbb{D} \cdot \vec{k} \equiv 2\lambda(\tau_{\perp}k_{\perp}^2 + \tau_{\parallel}k_{\parallel}^2) \quad (1.30)$$

troviamo in comportamento per \vec{k} piccolo del fattore di struttura:

$$S(\vec{k}) \rightarrow \frac{\vec{k} \cdot \mathbb{N} \cdot \vec{k}}{\vec{k} \cdot \mathbb{D} \cdot \vec{k}} \quad (1.31)$$

Per lo stato stazionario di non-equilibrio, noi ci dobbiamo aspettare la violazione del *Teorema di Fluttuazione-Dissipazione* (1.22):

$$\mathbb{N} \not\propto \mathbb{D} \quad (1.32)$$

così che (1.31) dipenda da θ , l'angolo tra \vec{k} ed \vec{E} . Detto in altri termini, S possiede una discontinuità nell'origine. Contrariamente alle singularità critiche, questa discontinuità risulta finita e può venire caratterizzata dal rapporto:

$$R \equiv \frac{S(\vec{k}_\perp \rightarrow 0, k_\parallel = 0)}{S(\vec{k}_\perp = 0, k_\parallel \rightarrow 0)}. \quad (1.33)$$

Chiaramente $|R|$ è il limite superiore nel rapporto di ogni altra coppia di limiti di $S(\vec{k})$. Notiamo che le simulazioni mostrano che $R > 1$ sempre. Osserviamo inoltre che all'interno della approssimazione lineare (1.24), l'FDT non viene strettamente violata sebbene $\mathbb{N} \not\propto \mathbb{D}$. Noi ci riferiremo alla condizione (1.32) come alla condizione di violazione dell'FDT. Se invece descriviamo un sistema vicino all'equilibrio, allora l'FDT richiede che $\mathbb{N} \propto \mathbb{D}$, così che R diventi uguale all'unità ed $S(\vec{k} \rightarrow 0)$ una costante θ -indipendente (la suscettività statica). In particolare, per un sistema isotropo, si avrebbe $\tau_\perp = \tau_\parallel = \tau$ ed $\mathbb{N} \propto \mathbb{I}$, la matrice identità (1.15). Dunque la celebre forma di Ornstein-Zernike del fattore di struttura statico $\frac{1}{\beta(\tau + O(k^2))}$ verrebbe ritrovata. Ora mostriamo come come questa singularità si traduca in decadimenti a legge di potenza nello spazio delle configurazioni. A causa della invarianza traslazionale, la correlazione a due punti dipende solo da (\vec{x}, t) , la separazione spaziale e temporale tra i punti, ed è data da:

$$G(\vec{x}, t) \equiv \langle \phi(\vec{x}, t) \phi(\vec{0}, 0) \rangle \propto \int e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} + \omega t)} S(\vec{k}, \omega) \quad (1.34)$$

e dunque la correlazione a tempi-uguali risulta:

$$G(\vec{x}, 0) \propto \int e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x})} S(\vec{k}) \quad (1.35)$$

il cui comportamento per grande r ($r \equiv |\vec{x}|$) viene controllato da (1.31), e cioè:

$$G(r \rightarrow \infty) \propto \int e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x})} \frac{\vec{k} \cdot \mathbb{N} \cdot \vec{k}}{\vec{k} \cdot \mathbb{D} \cdot \vec{k}}. \quad (1.36)$$

Poiché \mathbb{D} è positiva e diagonale, possiamo riscalarle i momenti e le corrispondenti coordinate definendo:

$$\vec{k}' \equiv \mathbb{D}^{-1/2} \cdot \vec{k} \quad e \quad \vec{x}' \equiv \mathbb{D}^{-1/2} \cdot \vec{x}. \quad (1.37)$$

Dunque il denominatore è semplicemente k'^2 mentre il numeratore diviene $\vec{k}' \cdot \mathbb{M} \cdot \vec{k}'$, con

$$\mathbb{M} \equiv \mathbb{D}^{-1/2} \mathbb{N} \mathbb{D}^{-1/2}. \quad (1.38)$$

Estraendo questo fattore dall'integrale, otteniamo:

$$G(r' \rightarrow \infty) \propto \vec{\nabla}' \cdot \mathbb{M} \cdot \vec{\nabla}' \int \frac{e^{i(\vec{k}' \cdot \vec{x}')}}{k'^2} \propto \vec{\nabla}' \cdot \mathbb{M} \cdot \vec{\nabla}' (r')^{2-d}. \quad (1.39)$$

Per uno stato di equilibrio, con o senza anisotropie, l’FDT assicura che $\mathbb{M} \propto \mathbb{I}$, sicché $G(r \rightarrow \infty) = 0$, dove è importante notare che questo risultato si ottiene trascurando termini $O(k^4)$, i quali producono l’atteso decadimento esponenziale. Questa proporzionalità è attesa fallire per il nostro stato stazionario di non-equilibrio, possiamo infatti estrarre una parte non-banale *traceless* di \mathbb{M} che scriveremo con $\bar{\mathbb{M}}$, dove definiamo $\bar{\mathbb{M}} \equiv \mathbb{M} - (Tr\mathbb{M}/d)\mathbb{I}$. Denotando un vettore unitario nella direzione radiale con \hat{r}' e portando fuori la differenziazione, arriviamo all’espressione:

$$G(r' \rightarrow \infty) \propto \frac{\hat{r}' \cdot \bar{\mathbb{M}} \cdot \hat{r}'}{(r')^d}, \quad (1.40)$$

che è il celeberrimo decadimento a legge di potenza. Mentre osserviamo come le correlazioni a lungo raggio appaiano in questo caso, è naturale domandarsi se esista un insieme di condizioni per la loro comparsa. Sebbene non esistano prove rigorose, sono stati avanzati forti argomenti in favore del seguente:

- una dinamica conservata,
- uno stato stazionario di non-equilibrio,
- una anisotropia spaziale associata con la dinamica.

La prima condizione già da sola fa emergere decadimenti a legge di potenza anche per sistemi di equilibrio, se non fosse che l’FDT forza tutte le ampiezze di tutti i termini che porterebbero un contributo del genere a svanire. In questo senso, uno stato di equilibrio è in un certo senso “vincolato”. La seconda condizione rilascia il precedente vincolo, in modo tale che le leggi a potenza ricompaiano in modo naturale. L’ultimo ingrediente è più sottile e necessario solamente per produrre leggi a potenza nelle correlazione a due particelle.

Per concludere questa parte introduttiva, indaghiamo la natura *traceless* di $\bar{\mathbb{M}}$ ed estraiamo un decadimento esponenziale nascosto \bar{G} . I decadimenti a legge di potenza nelle correlazioni a due punti, ricordano il comportamento del modello di Ising di equilibrio alla *criticalità*. Comunque vi è una significativa differenza; infatti nell’ultimo il decadimento a legge di potenza conduce ad un integrale divergente $\int \mathcal{G} d^d x$, che è la suscettività statica. Similmente lo stesso si potrebbe attendere per il caso forzato, invece, l’ampiezza di r^{-d} è tutt’altro che definita positiva, come si vede bene in (1.40).

Infatti la natura *traceless* di $\bar{\mathbb{M}}$ conduce ad una ampiezza nulla per r^{-d} una volta che venga eseguita una media sugli angoli di \hat{r}' . Dunque $\int \mathcal{G} d^d x$ risulta convergente, sebbene non ci sia possibile identificare questa quantità come la suscettività. Detto questo, possiamo ritrovare il convenzionale comportamento che le “correlazioni lontano dal punto critico decadono *esponenzialmente*”.

Per fare questo definiamo una funzione di correlazione mediata attraverso:

$$G(\bar{r}') \equiv \int \frac{d\Omega'}{S_d} G(\vec{x}', 0) \quad (1.41)$$

dove $S_d \equiv 2\pi^{d/2}/\Gamma(d/2)$ è la superficie della sfera unitaria d-dimensionale. La media eseguita distrugge il decadimento esponenziale (1.40). Per trovare ora il decadimento esponenziale abbiamo bisogno di fare la trasformata di Fourier di (1.41), cioè una simile media per (1.29). Svolgendo i conti otteniamo una espressione del tipo:

$$\bar{S}(k') = \frac{\bar{\chi}}{1 + \bar{\xi}^2 k'^2} \quad (1.42)$$

dove $\bar{\chi}$ e $\bar{\xi}$ sono opportune funzioni dei parametri e della dimensione reticolare. Nuovamente enfatizziamo il fatto che la quantità trovata (1.42) non può venire pensata come ad una versione di non-equilibrio di quella di equilibrio. Infatti l'FDT qui è violato e dunque non esiste una semplice relazione che legghi le funzioni di correlazione e di risposta.

Comunque per un test della (1.42) possiamo porre tutte le anisotropie a zero, cioè $\tau_{\perp} = \tau_{\parallel} = \tau$ eccetera, e ritrovare i risultati di equilibrio con $\bar{\chi}$ essere la suscettività statica e $\bar{\xi}$ la lunghezza di correlazione. Avendo quindi trovato \bar{S} essere della forma di Ornstein-Zernike, è un passaggio canonico arrivare al decadimento esponenziale nello spazio delle configurazioni:

$$\bar{G}(r' \rightarrow \infty) \propto \frac{e^{-r'/\bar{\xi}}}{(r')^{\frac{|d-1|}{2}}}. \quad (1.43)$$

Capitolo 2

Il comportamento critico

Il cuore del comportamento critico di un sistema fisico risulta composto dallo *scaling*, dall' *universalità* e dalla *non-analiticità*. L'ipotesi dello *scaling* afferma che le parti singolari dominanti di tutte le quantità termodinamiche sono funzioni omogenee generalizzate dei loro argomenti. Le analisi del gruppo di rinormalizzazione forniscono uno schema nel quale le proprietà di *scaling* possono venire derivate, l'*universalità* capita e le *singolarità* calcolate.

2.1 Transizione di fase continua

Introduciamo ora brevemente alcuni concetti generali riguardanti i *Fenomeni Critici*, che risulteranno molto utili nella futura comprensione dei vari temi affrontati, durante lo studio del comportamento critico del nostro modello.

2.1.1 Lunghezza di correlazione

Per comprendere appieno le transizioni di fase del secondo ordine, è fondamentale capire che in particolari regioni fisiche, un sistema possiede alcune osservabili che sovrastano completamente i suoi dettagli microscopici. Esiste un indicatore, che più di ogni altro, ci segnala quando un sistema inizia a diventare critico e questo è proprio dato dalla *lunghezza di correlazione*. Per provare a capire cosa si nasconde dietro questo nome, introduciamo un esempio e precisamente prendiamo un campione macroscopico di un materiale, misurandone alcune sue proprietà, come la densità o la magnetizzazione. Dividiamo ora il sistema in due parti circa uguali, mantenendo fisse le variabili esterne come la pressione e la temperatura. Le proprietà macroscopiche di ogni campione saranno le stesse di quelle del campione totale; lo stesso rimane vero se il processo viene ripetuto. Dopo molte iterazioni deve accadere qualcosa di diverso, poiché come sappiamo la materia è composta da atomi e molecole, le cui proprietà individuali sono molto differenti da quelle del campione che vanno a costituire nel loro insieme. La scala di lunghezza alla quale le proprietà dei singoli pezzi vengono a differire da quelle del campione inte-

gro, fornisce una stima di ciò che viene chiamata “lunghezza di correlazione” del sistema. Questa è una distanza entro la quale le fluttuazioni dei gradi di libertà microscopici risultano molto correlati tra loro. Le fluttuazioni che in due punti del campione distano molto più della lunghezza di correlazione del sistema, risultano effettivamente disconnesse e dunque non fa molta differenza se, nella misura delle proprietà macroscopiche, la connessione venga del tutto interrotta. In condizioni ordinarie, un campione di materiale non troppo bizzarro, ha lunghezza di correlazione dell'ordine di poche distanze interatomiche e questo implica che possiamo considerare solo un piccolo insieme di atomi del materiale per farci un'idea adeguata del suo comportamento macroscopico. È chiaro che questa vuole essere una immagine di tipo qualitativo, in quanto, nel caso appena esposto, emergerebbero, per esempio, dei notevoli fenomeni di bordo. Il punto fondamentale della questione risiede nel fatto che il valore della lunghezza di correlazione di un certo sistema, dipende esclusivamente dalle condizioni esterne che ne determinano lo stato, quali la temperatura e la pressione.

2.1.2 Transizione di fase

È noto che i sistemi fisici possano cambiare repentinamente il loro comportamento macroscopico, quando alcune loro quantità vengano gradualmente modificate. I punti ai quali succede vengono detti *punti critici* e solitamente segnano la presenza di una transizione di fase da uno stato della materia verso un altro.

Esistono due modi possibili in cui una tale transizione può avere luogo. Nel primo caso i diversi stati della materia coesistono al punto critico, pur rimanendo distinti gli uni dagli altri, manifestando diverse proprietà macroscopiche. Poco lontano dal punto critico, esiste invece una sola fase le cui proprietà risultano connesse in modo continuo ad una delle fasi critiche coesistenti. In questo caso ci aspettiamo di trovare un comportamento discontinuo nelle quantità termodinamiche, una volta passati attraverso il punto critico e dunque da una fase stabile all'altra. Queste transizioni vengono dette del *primo-ordine* o *discontinue*. Degli esempi celebri sono la fusione di un solido tridimensionale e la condensazione di un gas in un liquido. Un aspetto fondamentale da sottolineare in modo molto marcato, giace nel fatto che nelle transizioni del primo ordine la lunghezza di correlazione rimane *finita*. Questa caratteristica ha una enorme rilevanza, dal momento che è fortemente connessa con l'applicabilità del potente schema del Gruppo di Rinormalizzazione.

La situazione cambia drasticamente quando si consideri una transizione *continua*, nella quale la lunghezza di correlazione diviene *infinita*. Come sopra esposto, questo implica che le fluttuazioni risultano correlate su tutte le scale, il che forza l'intero sistema ad esistere in una unica fase critica. Quindi le diverse fasi che esistono ai due lati del punto critico, devono divenire identiche in esso. Si vince che nella transizione di fase del secondo ordine, le differenze esistenti tra le varie quantità termodinamiche delle fasi competitive, come la densità di energia o la magnetizzazione, vanno a zero in modo graduale. Esempi comuni di un tale tipo di transizione sono il ferromagnete alla temperatura di Curie ed un fluido al punto cri-

tico liquido-gas. Il fatto che un numero enorme di gradi di libertà siano fortemente correlati tra loro, rende lo studio delle transizioni di fase continue intrinsecamente difficile.

2.1.3 Universalità e leggi a potenza

Tra i comportamenti più interessanti che si possono riscontrare in un sistema fisico, certamente vi è l'*Invarianza di Scala*. Gli esempi più comuni che si possono citare riguardano materiali quali i magneti o i fluidi, una volta che un parametro particolare del sistema venga portato verso una regione critica, che fa emergere una transizione di fase del secondo ordine.

Lo schema che si è dimostrato fino ad oggi il più adeguato nel descrivere e spiegare l'auto-organizzazione di questi sistemi, è certamente il *Gruppo di Rinormalizzazione*.

Il concetto dello *Scaling* risulta centrale nella comprensione di molti sistemi complessi, sia che si tratti di scale astronomiche, di oggetti macroscopici comuni quali magneti o fluidi, o addirittura delle interazioni tra i fondamentali costituenti della materia. Infatti tutti questi sistemi hanno un enorme numero di gradi di libertà che interagiscono in modo altamente non-lineare.

Molte proprietà di un sistema vicino ad una transizione di fase del secondo ordine, risultano indipendenti dai dettagli microscopici delle interazioni tra i singoli costituenti. Esse appartengono invece ad una delle differenti classi di universalità, ognuna individuata soltanto da caratteristiche globali come le simmetrie della Hamiltoniana sottostante o il numero delle dimensioni spaziali del sistema. Questo fenomeno, all'interno dello schema del Gruppo di Rinormalizzazione, prende il nome di Universalità.

Tipicamente, nelle vicinanze di un punto critico, la lunghezza di correlazione e le altre quantità termodinamiche, mostrano andamenti a legge di potenza nei parametri che specificano le distanze dal punto critico, come per esempio la temperatura ridotta nel ferromagnete. Gli esponenti che caratterizzano questi andamenti, vengono detti *esponenti critici*, i quali sono numeri puri, solitamente non semplici interi o razionali, che dipendono dalla classe di Universalità. Gli andamenti a legge di potenza sono una manifestazione del comportamento di scaling e tali dipendenze si hanno a tutti i livelli nei sistemi fisici.

2.1.4 Quale metodo usare

Risulta chiaro, a questo punto, come non sia possibile comprendere appieno il fenomeno delle transizioni di fase continue, tramite un metodo perturbativo canonico o l'utilizzo delle tecniche di campo-medio. Il campo-medio fornisce risultati esatti per modelli che possiedono interazioni a lungo raggio e per questi si possono calcolare gli esponenti critici. La teoria di campo-medio può inoltre essere utilizzata come punto zero di qualche sviluppo perturbativo. Per dimensioni sufficientemente alte, in particolare sopra la dimensione critica superiore del modello in esame,

esso è esatto e nella sua applicazione non vengono trovate divergenze, ma gli esponenti critici Gaussiani. Sotto la dimensione critica superiore invece, la teoria di campo-medio fa emergere delle divergenze che non sappiamo come curare e dunque si palesa la necessità di un differente approccio. Dunque il campo-medio per i fenomeni critici non fornisce risposte adeguate.

La situazione risulta più efficacemente affrontata grazie al Gruppo di Rinormalizzazione, il quale ha avuto origine alla fine degli anni '70, grazie alle idee di Leo Kadanoff, sviluppate successivamente da Kenneth Wilson (il quale poi vinse per questo lavoro il premio Nobel) e da Michael Fisher, che diedero vita al Gruppo di Rinormalizzazione applicato ai fenomeni critici, detto anche Gruppo di Rinormalizzazione alla Wilson. I sistemi fisici che manifestano una transizione di fase continua, possiedono una lunghezza di correlazione infinita, che costringe a considerare l'interazione tra infiniti gradi di libertà, i quali cooperano in modo altamente non-lineare. Da un certo punto di vista, questa caratteristica, sembra complicare a tal punto il problema, da non renderlo di possibile risoluzione. Invece, proprio questo comportamento invariante di scala, indica la via attraverso la quale si possa giungere sia ad una comprensione qualitativa del fenomeno, che ad un calcolo quantitativo dei parametri di interesse.

Nella filosofia del Gruppo di Rinormalizzazione, vengono variati alcuni parametri caratteristici del sistema, avendo cura di non modificarne le proprietà misurabili sulla scala dei tempi o delle lunghezze di interesse. In questo modo si eliminano quei dettagli microscopici che non concorrono, nella regione critica, alla caratterizzazione del sistema stesso. Una volta individuata la regione critica sulla traiettoria canonica, la quale è composta da tutte le condizioni iniziali del sistema, ci si muove verso il punto fisso mediante riscaldamento del parametro scelto, in modo tale da integrare via dal problema i momenti veloci, i quali non concorrono a caratterizzare il sistema nella regione critica. Essi possono venire pensati come dei dettagli irrilevanti che nascondono alla vista la dinamica rilevante.

Tutti i sistemi che vengono mappati, attraverso la traiettoria rinormalizzata, nello stesso punto fisso, appartengono alla stessa classe di Universalità. Questo significa che le osservabili di interesse avranno in comune lo stesso set di esponenti critici, i quali caratterizzano l'andamento a potenza delle osservabili nella regione critica.

2.1.5 I modelli

Come abbiamo più volte ricordato, i sistemi di equilibrio con molti gradi di libertà, vengono descritti dalle leggi della Meccanica Statistica ed inoltre sappiamo che in questo caso il problema matematico risulta ben definito. Le quantità fisiche vengono calcolate attraverso medie, utilizzando la distribuzione di Gibbs $e^{-\beta\mathcal{H}}$; le quantità termodinamiche come il calore specifico o la magnetizzazione, si ottengono tramite derivazione della funzione di partizione $Z = \text{Tr} e^{-\beta\mathcal{H}}$, o, equivalentemente, dell'energia libera $F = -\beta^{-1} \ln Z$. Anche quando la Hamiltoniana H risulta rela-

tivamente semplice, il calcolo della Z si rivela molto difficoltoso e nel caso di una Hamiltoniana che sia piuttosto realistica, diventa una impresa impossibile.

Questo ha condotto alla necessità di semplificare di molto i modelli, anche se sempre nel tentativo di inglobarne le caratteristiche chiave del sistema reale in esame.

Nello studio dei fenomeni atomici, si cerca di costruire un modello che sia il più aderente possibile alla Hamiltoniana reale, ma che comunque risulti risolvibile almeno in modo approssimato. Una volta che i parametri vengano adeguatamente aggiustati, ci si attende che i risultati di un tale studio risultino molto prossimi ai dati forniti dall'esperimento reale. Non ci si aspetta certamente una sovrapposizione esatta, poichè inevitabilmente il modello sviluppato ometterà qualche contributo.

Ecco che ora si palesa la grande semplificazione dovuta alla caratteristica peculiare delle transizioni continue. Se costruiamo un modello nel tentativo di descrivere un sistema fisico che manifesti una transizione del secondo ordine, grazie all'Universalità dei fenomeni critici, ci si può attendere che modelli molto semplici, restituiscano risultati che, negli aspetti universali, *esattamente* si sovrappongano al comportamento del sistema reale. Comunque, anche se la schematizzazione che stiamo illustrando in questo momento risulta molto semplificata, è un fatto che modelli teorici che attengano al comportamento critico, possano venire testati con maggiore precisione rispetto a quanto avvenga in molte altre aree della fisica.

Un'altra grande semplificazione che può venire operata in tutti i sistemi a temperatura finita, risiede nel fatto che le fluttuazioni termiche dominano completamente quelle quanto-meccaniche e quindi i modelli che si studiano vengono descritti da Hamiltoniane classiche. Questo comporta immediatamente che il calcolo della funzione di partizione, coinvolga somme sul classico spazio delle fasi e ciò rimane vero sebbene la fisica sottostante, anche responsabile di fenomeni come le interazioni di scambio magnetiche o la superfluidità, possano essere di natura quanto-meccanica.

2.2 DLG Critico

In un celebre articolo Onsager (1944) dimostrò che per il modello di Ising di equilibrio, si manifesta una transizione di fase del secondo ordine per

$$T_c \simeq 0.5673J/k_B \quad \text{e} \quad \rho_c = 1/2.$$

Nel DLG una transizione da uno stato disordinato ad uno a fasi separate, sopravvive all'aggiunta della forzante e la natura di questa transizione rimane del secondo ordine. Il campo esterno caratterizza il sistema con una forte anisotropia, la quale fa scalare i momenti trasversi e longitudinali con differenti potenze e fa sì che la dimensione critica superiore passi da $d_c = 4$ a $d_c = 5$. Il tutto risulta riconducibile alla "massima" violazione dell'FDT, o equivalentemente, alla rottura della supersimmetria che sottostà alla dinamica di equilibrio.

Quando T si avvicina a T_c , la lunghezza di correlazione ξ diverge, così che le

quantità termodinamiche siano dominate da questa grandezza piuttosto che dai dettagli microscopici ed inoltre esibiscano il noto comportamento di *scaling*.

Ora, per studiare il modello, non possiamo utilizzare il funzionale *energia libera*, poiché non risulta ben definito; quest'ultimo è un canonico punto di partenza nella discussione dello *scaling*. Questa è infatti un'altra grossa differenza di questi modelli rispetto a quelli di equilibrio. Non risulta neppure possibile iniziare lo studio del nostro sistema "magnetico" attraverso la magnetizzazione stessa, poiché ci siamo vincolati ad una dinamica conservata in cui, come detto, ci restringiamo alla occupazione della metà dei siti, in modo tale che sia accessibile la transizione di fase del secondo ordine. Osservabili più adeguate sono invece le funzioni di correlazione a due punti ed il fattore di struttura.

Un modo conveniente di caratterizzare queste funzioni omogenee è quello di introdurre una scala esterna dei momenti μ . Inizieremo con il fattore di struttura dinamico (S) e la sua trasormata di Fourier spaziale, la funzione di correlazione a due punti (G).

Dapprima notiamo che in sistemi con una forte anisotropia, differenti componenti di \vec{k} o \vec{x} scalano con differenti esponenti. Per semplicità, investighiamo solo il caso avente una sola componente "longitudinale" di \vec{k} scalare come $\mu^{1+\Delta}$, con $\Delta > 0$, mentre le rimanenti $d-1$ "trasverse" scalano ancora linearmente. Il nuovo indice Δ caratterizza la dimensione anomala dei momenti longitudinali, e verrà chiamato *esponente di anisotropia*.

Vedremo che S e G verranno associati a differenti esponenti del tipo η . Concentrandoci prima sul fattore di struttura abbiamo:

$$S(\vec{k}_\perp, \vec{k}_\parallel, t, \tau) = \mu^{-2+\eta} S(\vec{k}_\perp/\mu, \vec{k}_\parallel/\mu^{1+\Delta}, t\mu^z, \tau/\mu^{1/\nu}), \quad (2.1)$$

dove \vec{k} è il vettore d'onda, \vec{x} è la distanza tra due punti, t è il tempo, τ è il parametro critico $\propto (T-T_c)$, mentre η , ν e z sono i familiari esponenti critici. Risulta tutt'altro che ovvio come mettere in relazione gli indici ν , z ed η agli esponenti che governano la lunghezza di correlazione, il tempo di rilassamento caratteristico, così come il comportamento per piccoli momenti del fattore di struttura critico. In particolare, a causa della anisotropia, sono presenti due lunghezze di correlazione. Vedremo tra breve come questi indici possano venire associati con le dimensioni anomale del parametro critico τ , del tempo t e del campo d'ordine ϕ .

Pensiamo alla (2.1) come fenomenologicamente data ed analizziamo le sue conseguenze. Per vedere come i momenti scalano con $(T-T_c)$ seguiamo la procedura di *scaling standard* e scegliamo $\mu = \tau^\nu$. In netto contrasto con l'anisotropia debole, abbiamo la necessità di definire *due* esponenti di tipo ν :

$$\vec{k}_\perp \sim \tau^{\nu_\perp} \quad \text{e} \quad \vec{k}_\parallel \sim \tau^{\nu_\parallel}, \quad (2.2)$$

con

$$\nu_\perp = \nu \quad \text{e} \quad \nu_\parallel(1 + \Delta). \quad (2.3)$$

Similmente ponendo $\mu = t^{-1/z}$, otteniamo due esponenti critici dinamici

$$z_\perp = z \quad \text{e} \quad z_\parallel = z/(1 + \Delta), \quad (2.4)$$

indicanti che piccole perturbazioni con $\vec{k}_\perp \equiv 0$ decadono diversamente da quelle con $\vec{k}_\parallel \equiv 0$.

Ora studiamo il comportamento del fattore di struttura per piccolo momento. Restringendoci per convenienza alla criticalità ed a $t = 0$, cioè al fattore di struttura dello stato stazionario, possiamo definire due esponenti di tipo η , η_\perp ed η_\parallel , in relazione a quali componenti di \vec{k} vengano estratte dalla (2.1). Sopprimendo t e τ scriviamo:

$$S(\vec{k}_\perp, \vec{k}_\parallel) = k_\perp^{-2+\eta_\perp} s_\perp(k_\parallel/k_\perp^{1+\Delta}), \quad (2.5a)$$

$$S(\vec{k}_\perp, \vec{k}_\parallel) = k_\parallel^{-2+\eta_\parallel} s_\parallel(k_\perp/k_\parallel^{1/(1+\Delta)}), \quad (2.5b)$$

dove abbiamo assunto l'isotropia nei separati sottospazi e denotato $(|\vec{k}_\perp|, |\vec{k}_\parallel|)$ con (k_\perp, k_\parallel) , così che s_\perp e s_\parallel siano due funzioni di una singola variabile. Da queste troviamo

$$\eta_\perp = \eta \quad e \quad \eta_\parallel = (\eta + 2\Delta)/(1 + \Delta). \quad (2.6)$$

Notiamo ora che, poichè \vec{k}_\perp scala linearmente con μ , così come nei casi di equilibrio, gli esponenti trasversi ν_\perp e z_\perp possono essere determinati tramite le dimensioni anomale di τ e t , senza traccia di Δ . Gli indici longitudinali differiscono dalle loro controparti trasverse attraverso un contributo coinvolgente Δ , in modo tale che ponendo $\Delta = 0$ si ristabilisca l'usuale scaling isotropo. A parte la loro relazione con ν , z ed η , questi due insiemi di esponenti non sono indipendenti. Essi sono in relazione attraverso l'esponente di *anisotropia* Δ :

$$\nu_\perp = \nu_\perp(1 + \Delta), \quad z_\parallel = z_\perp/(1 + \Delta), \quad (2.7a)$$

$$-2 + \eta_\parallel = (-2 + \eta_\perp)/(1 + \Delta). \quad (2.7b)$$

A causa della anisotropia, la componente longitudinale scala con $\mu^{1+\Delta}$:

$$G(\vec{x}_\perp, \vec{x}_\parallel, t, \tau) = \mu^{d+\Delta-2+\eta} G(\vec{x}_\perp \mu, \vec{x}_\parallel \mu^{1+\Delta}, t \mu^z, \tau / \mu^{1/\nu}). \quad (2.8)$$

Ora ci restringiamo alla condizione $t = \tau = 0$ ed estraiamo varie componenti di \vec{x} . Denotando $|\vec{x}_\perp|$ e $|\vec{x}_\parallel|$ con r_\perp e r_\parallel , abbiamo:

$$G(\vec{x}_\perp, \vec{x}_\parallel) = r_\perp^{-d+2-\eta'_\perp} g_\perp(r_\parallel/r_\perp^{1+\Delta}), \quad (2.9a)$$

$$G(\vec{x}_\perp, \vec{x}_\parallel) = r_\parallel^{-d+2-\eta'_\parallel} g_\parallel(r_\perp/r_\parallel^{1/(1+\Delta)}), \quad (2.9b)$$

dove abbiamo seguito le (2.5) ed associato gli esponenti di tipo η con $G(\vec{x})$: η'_\perp ed η'_\parallel .

Usando la (2.8) vediamo che questi due η differiscono dalle loro controparti nello spazio dei momenti:

$$\eta'_\perp = \eta + \Delta \quad e \quad \eta'_\parallel = \frac{\eta - \Delta(d-3)}{1 + \Delta}. \quad (2.10)$$

Chiaramente, essi soddisfano anche ad una legge di scaling tipo (2.7b):

$$d - 2 + \eta'_{\parallel} = (d - 2 + \eta'_{\perp}) / (1 + \Delta). \quad (2.11)$$

Dunque, in genere, abbiamo bisogno di *quattro* differenti esponenti del tipo η , contrariamente al singolo η nel caso del modello di Ising di equilibrio. Queste distinzioni sono in particolar modo importanti quando le predizioni teoriche vengono comparate con i dati delle simulazioni, che possono essere presentati sia nello spazio dei momenti, sia nello spazio reale. Denotiamo dunque i nostri quattro η con η_{\perp}^{MS} , η_{\parallel}^{MS} , η_{\perp}^{RS} , η_{\parallel}^{RS} . Notiamo che questi esponenti hanno significato e risultano misurabili se le funzioni di scaling s_{\perp} , s_{\parallel} , g_{\perp} , e g_{\parallel} diventano costanti finite e non nulle quando i loro argomenti svaniscono. Per il *Driven Lattice Gas* canonico, questo è vero, al livello Gaussiano o al livello di approssimazione ad albero, solo per s_{\perp} e g_{\parallel} , infatti, come vedremo, entrambe le $s_{\parallel}(0)$ e $g_{\perp}(0)$ svaniscono. Mentre S e G sono correlazioni di due campi: $\langle \phi \phi \rangle$, vi è un'altra correlazione a due punti nella dinamica, la funzione di risposta: $\langle \tilde{\phi} \phi \rangle$, dove $\tilde{\phi}$ è il campo di *Martin-Siggia-Rose* (1973). Per i sistemi di equilibrio, il *Teorema di Fluttuazione-Dissipazione* (FDT) fornisce una relazione tra essi, così che, per esempio, l'esponente della suscettività γ possa venire estratto da entrambe. A causa della violazione dell'FDT, ci riferiremo all'ultimo come alla suscettività, che rappresenta la funzione di risposta del campo d'ordine $\phi(\vec{k}, \omega)$ ad una piccola perturbazione "magnetica" esterna $h(\vec{k}, \omega)$:

$$\chi(\vec{k}, \omega, \tau) \equiv k^2 \langle \tilde{\phi}(\vec{k}, \omega) \phi(-\vec{k}, -\omega) \rangle, \quad (2.12)$$

in cui il fattore k^2 è il risultato della dinamica conservata, che previene ϕ dal rispondere ad un campo omogeneo h .

In parallelo al fattore di struttura S , possiamo definire:

$$S_{11}(\vec{k}, \omega, t) \equiv \langle \tilde{\phi}(\vec{k}, \omega) \phi(-\vec{k}, -\omega) \rangle, \quad (2.13)$$

dove a pedice viene indicato che si ha la presenza di un campo di tipo $\tilde{\phi}$ e di un campo ϕ . In questa notazione, la S trattata precedentemente viene denotata con il simbolo S_{02} . Postulando la legge di scaling in modo analogo a quanto fatto per la (2.1), scriviamo:

$$S_{11} = \mu^{-z + (\bar{\mu}/2) + (\mu/2)} S_{11}(\vec{k}_{\perp}/\mu, \vec{k}_{\parallel}/\mu^{1+\Delta}, \omega/\mu^z, \tau/\mu^{1/\nu}). \quad (2.14)$$

Focalizzandosi sulla risposta a campi statici h , poniamo $\omega = 0$. Per arrivare all'esponente γ , prendiamo il limite $\vec{k} \rightarrow 0$. Comunque, possiamo non porre $k \equiv 0$, a causa della legge di conservazione. Data la forte anisotropia, possiamo considerare due separati limiti:

$$\chi_{\perp} \equiv \chi(\vec{k}_{\perp} \rightarrow 0, \vec{k}_{\parallel} = 0) \quad \text{e} \quad \chi_{\parallel} \equiv \chi(\vec{k}_{\perp} = 0, \vec{k}_{\parallel} \rightarrow 0), \quad (2.15)$$

che possiamo indicare rispettivamente come la suscettività trasversa e la suscettività longitudinale. Assumendo che queste siano finite e non-nulle, possiamo nuovamente

scegliere $\mu = \tau^\nu$ quando sostituiamo la (2.14) nella (2.12). Definendo due esponenti di tipo γ ,

$$\chi_\perp \sim \tau^{-\gamma_\perp} \quad \text{e} \quad \chi_\parallel \sim \tau^{-\gamma_\parallel}, \quad (2.16)$$

troviamo che

$$\gamma_\perp = \nu(z - \frac{1}{2}\tilde{\eta} - \frac{1}{2}\eta - 2) \quad \text{e} \quad \gamma_\parallel = \nu(z - \frac{1}{2}\tilde{\eta} - \frac{1}{2}\eta - 2(1 + \Delta)). \quad (2.17)$$

Tranne Δ , queste γ possono apparire a prima vista, differenti dalla usuale $\nu(2 - \eta)$. Si ritrova la vecchia forma tenendo conto dell’FDT, infatti esiste anche un’altra definizione della “susceptività”:

$$\tilde{\chi} \equiv S(\vec{k} \rightarrow 0, t = 0, \tau). \quad (2.18)$$

Utilizzando la (2.1) e facendo le stesse assunzioni di prima, arriviamo all’espressione $\tilde{\chi} \sim \tau^{-\nu(2-\eta)}$. Per i sistemi di equilibrio con $\Delta = 0$, l’FDT garantisce che $\chi = \tilde{\chi}$, e si ottiene, in aggiunta al solito $\gamma = \nu(2 - \eta)$, la legge di scaling $z - z_0 = (\tilde{\eta} - \eta)/2$, dove z_0 è la dimensione “naive” della scala dei tempi. Per sistemi di non-equilibrio, $\chi \neq \tilde{\chi}$ in generale, così ancora possiamo definire due $\tilde{\chi}$ come in (2.15), e dunque due $\tilde{\gamma}$ come in (2.16). Ancora, se assumiamo che i limiti siano costanti generiche, troviamo che:

$$\tilde{\gamma}_\perp = \tilde{\gamma}_\parallel = \nu(2 - \eta). \quad (2.19)$$

Comunque, come nel caso di s_\parallel , questa assunzione per il DLG al livello Gaussiano fallisce e $\tilde{\gamma}_\parallel$ svanisce. Una strada canonica per giungere all’esponente del parametro d’ordine β , data la forma della funzione di correlazione a due punti, è quella di studiare $G \sim \phi^2$. Dunque $\phi(\vec{x}, t)$ scala come $\mu^{(d+\Delta-2+\eta)}$, il che risulta consistente con i modelli di equilibrio caratterizzati da forte anisotropia. Utilizzando $\mu = \tau^\nu$ veniamo condotti alla:

$$\beta = \frac{1}{2}\nu(d + \Delta - 2 + \eta). \quad (2.20)$$

In realtà la (2.20) nel DLG canonico fallisce, a causa della presenza di un operatore *pericolosamente irrilevante*. Una analisi più attenta, condotta utilizzando l’equazione di stato di scaling, produce come risultato $\beta = \frac{1}{2}$.

2.3 Gruppo di Rinormalizzazione

Il moderno approccio al comportamento critico, viene convenzionalmente riunito sotto il titolo di “Gruppo di Rinormalizzazione” (RG). Questa terminologia è piuttosto sfortunata, infatti la struttura matematica della procedura, non è certamente quella di un gruppo ed inoltre neppure la rinormalizzazione nella teoria quantistica dei campi è un elemento essenziale, sebbene abbia una intima connessione con alcune sue formulazioni. Lo schema del Gruppo di Rinormalizzazione può venire applicato a problemi molto slegati dalla teoria dei campi.

L’origine del nome può venire rintracciata nella fisica delle particelle del 1960, quando si sperava ottimisticamente che ogni cosa di fondamentale si trovasse in

fisica, potesse venire spiegata in termini di simmetrie e teoria dei gruppi, piuttosto che in termini di dinamica.

Una delle prime applicazioni delle idee del Gruppo di Rinormalizzazione, in effetti, fu l'esotico soggetto del comportamento ad alta energia dell'elettrodinamica quantistica rinormalizzata.

Ci volle la visione di Kenneth Wilson, per realizzare che tali metodi avevano un campo di applicazione molto più vasto nelle teorie di scaling dei fenomeni critici, che venne formulata da Fisher, Kadanoff ed altri nell'ultima parte della decade.

Il Gruppo di Rinormalizzazione è uno schema, un insieme di idee, che devono venire adattate alla natura del problema sotto mano.

Tutti gli studi del Gruppo di Rinormalizzazione hanno in comune l'idea di riesprimere i parametri che definiscono un problema, in termini di alcuni altri, forse più semplici, mentre mantengono inalterati quegli aspetti fisici del problema che sono di interesse. Questo può avvenire attraverso un qualche processo di granagrossa dei gradi di libertà di corta distanza, come nel problema dei fenomeni critici, dove è di interesse la fisica di grande distanza.

Qualunque sia la motivazione, tali metodi finiscono tutti con equazioni matematiche descrittive del flusso del Gruppo di Rinormalizzazione in qualche complicato spazio dei parametri. L'essenza del metodo risiede proprio nello studio di tali flussi ed in quello che ci suggeriscono sul problema fisico. Tra le notevoli proprietà di un sistema critico, che emergono attraverso uno studio di questo tipo, vi sono l'invarianza di scala e l'universalità.

I sistemi che esibiscono dei decadimenti a legge di potenza, segnalano la presenza di una struttura sottostante invarianza di scala. Nel caso che tali strutture siano non-banali, macroscopicamente molti (o teoricamente infiniti) gradi di libertà devono venire considerati: tali sistemi sono detti essere critici. Le analisi del *Gruppo di Rinormalizzazione* (RG) si dimostrano essere fondamentali verso la comprensione quantitativa dei fenomeni critici. Con questo tipo di approccio, le proprietà invarianti di scala vengono estratte attraverso trasformazioni che rintracciano la fisica del sistema mediante la variazione di una lunghezza (o momento) di scala microscopica, come per esempio il *cut-off* del reticolo. I punti fissi di tali trasformazioni possono poi venire identificati come sistemi invarianti di scala. Se esiste una lunghezza associata (come la lunghezza di correlazione), in tali sistemi, essa deve essere o nulla o infinita, con l'ultimo caso detto "critico" o "non-banale". L'analisi delle osservabili tipiche (come la correlazione e le funzioni di risposta), nelle vicinanze di un tale punto, conduce alla identificazione degli esponenti critici. Infine le classi di universalità possono venire comprese, ed in esse molti sistemi vengono mappati in un singolo punto fisso sotto queste trasformazioni.

Per trovare i punti fissi e calcolare le loro proprietà associate in modo quantitativo, abbiamo bisogno di utilizzare tecniche analitiche e numeriche, entrambe infatti possiedono vantaggi e difetti. Risultati analitici esatti sono molto rari e solitamente si procede attraverso qualche forma di trattamento perturbativo. Seguendo l'idea di Wilson, il quale scoprì il parametro chiave per una sistematica espansione, svilupperemo la nostra teoria perturbativa in potenze di $\varepsilon \equiv d_c - d$, dove

con d_c indichiamo la dimensione critica superiore. Punti fissi, esponenti e tutte le altre quantità di interesse possono venire calcolate come potenze in serie di ε . Per svolgere i calcoli perturbativi, i metodi di teoria dei campi si dimostrano essere i più potenti e questo vale sia per i fenomeni critici statici, sia dinamici.

Nella statica, il punto di partenza è la Hamiltoniana \mathcal{H} , espressa come un funzionale del parametro d'ordine locale: il campo $\phi(\vec{r})$. Medie termiche sull'ensemble *canonico* vengono calcolate in termini di un integrale funzionale, con il peso di Boltzmann $e^{-\beta\mathcal{H}[\phi]}/Z$. Nella dinamica, il punto di partenza è una equazione di Langevin del moto per il campo $\phi(\vec{r}, t)$, in cui le fluttuazioni termiche vengono introdotte attraverso il rumore. Sebbene una espansione perturbativa possa essere svolta attraverso diretta iterazione dell'associata equazione integrale, risulta tecnicamente maggiormente conveniente introdurre un campo di risposta di Martin-Siggia-Rose $\tilde{\phi}(\vec{r}, t)$ e riscrivere l'equazione di Langevin in termini di un funzionale dinamico $\mathcal{F}[\tilde{\phi}, \phi]$. In questo formalismo, le medie sul rumore vengono fornite in termini di funzionali integrali con peso $e^{-\mathcal{F}[\tilde{\phi}]}$:

$$\langle \cdot \rangle \equiv \int \mathcal{D}\tilde{\phi} \mathcal{D}\phi \cdot \exp(-\mathcal{F}[\tilde{\phi}, \phi]). \quad (2.21)$$

Data la forte analogia con le teorie di campo di equilibrio, possono venire utilizzati metodi canonici di teoria di campo. Simmetrie continue e le loro potenti conseguenze nella forma di identità di Ward possono venire sfruttate. Inoltre le correlazioni e le funzioni di risposta vengono trattate sullo stesso piano, con le une date da medie solo sui campi ϕ e le altre su entrambi i campi ϕ e $\tilde{\phi}$. Le quantità di interesse fisico sono le funzioni di Green connesse, mediate su \tilde{n} campi di tipo $\tilde{\phi}$ ed n campi di tipo ϕ , e denotate con il simbolo $G_{\tilde{n}n}$. Tutte le informazioni essenziali sono contenute nelle parti *irriducibili ad una particella* (one-particle irreducible – OPI), con le gambe esterne “amputate”, note come *funzioni vertice* ed indicate con $\Gamma_{\tilde{n}n}$. È molto importante notare come questo formalismo sia del tutto generale, una volta che venga definita l'equazione di Langevin.

Attraverso la filosofia del *Gruppo di Rinormalizzazioni* e le tecniche della *Teoria dei Campi*, è possibile dimostrare che esiste un funzionale dinamico che cattura le proprietà critiche del DLG canonico e che la dimensione critica superiore è $d_c = 5$. L'approssimazione ad albero, ritenuta valida sotto d_c , conduce agli esponenti ed alle funzioni di *scaling* all'ordine zero in ε . Le proprietà di *scaling* sotto d_c necessitano di tutta l'efficacia della struttura del *Gruppo di Rinormalizzazione* e nella approssimazione ad un loop, fornisce i risultati per il punto fisso. Il risultato eccezionale che inoltre si ottiene sono gli esponenti critici del DLG canonico a tutti gli ordini in ε .

2.3.1 Il funzionale dinamico

Ricordando l'equazione di Langevin mesoscopica (1.19) con le condizioni (1.20), si ha che il funzionale dinamico associato è dato dall'espressione:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\tilde{\phi}, \phi] = \int dt d^n x \lambda \left\{ \tilde{\phi}(\vec{x}, t) \left[\frac{\partial}{\lambda \partial t} - (\tau_{\perp} - \nabla^2) \nabla^2 - (\tau_{\parallel} - \alpha_{\parallel} - \alpha_{\parallel} \partial^2) \partial^2 \right. \right. \\ \left. \left. + 2\alpha_{\times} \partial^2 \nabla^2 \right] \phi(\vec{x}, t) - \frac{u}{3!} \tilde{\phi} (\nabla^2 + k \partial^2) \phi^3 + \varepsilon (\partial \tilde{\phi}) \phi^2 \right. \\ \left. + \frac{1}{2\lambda} \tilde{\phi} (n_{\parallel} \partial^2 + n_{\perp} \nabla^2) \tilde{\phi} \right\}. \quad (2.22) \end{aligned}$$

Notiamo che il coefficiente del termine $\tilde{\phi}$ trasporta l'informazione della parte deterministica dell'equazione di Langevin, mentre i coefficienti del termine in $\tilde{\phi}^2$ vengono riconosciuti come gli elementi di matrice del rumore. La natura Gaussiana del rumore assicura l'assenza di termini più alti rispetto a termini quadratici in $\tilde{\phi}$. Medie compiute con il funzionale (2.22) si riferiscono alla dinamica dello stato stazionario e risultano invarianti per traslazione rispetto allo spazio ed al tempo.

Se $e^{-\mathcal{F}}$ fosse puramente Gaussiano, cioè se potessimo dimenticarci dei termini non-quadratici in (2.22), gli integrali in (2.21) potrebbero venire calcolati in modo esatto. Ma quando T viene abbassata verso T_c , una tale approssimazione non risulta più valida poiché almeno uno dei τ diventa molto piccolo, segnalando la nascita di singolarità infrarosse. Tenendo anche i termini legati a potenze più alte e trattandole perturbativamente, viene rivelato il fatto che le singolarità infrarosse risultano dominanti se d è minore di una dimensione critica d_c , la quale può venire determinata attraverso il *power counting*, il quale comunque richiede una comparazione dei termini dominanti della teoria critica.

Abbiamo già notato che, teoricamente, esistono tre possibilità per la teoria critica:

1. $\tau_{\perp} \rightarrow 0$ ma $\tau_{\parallel} > 0$;
2. $\tau_{\perp} > 0$ ma $\tau_{\parallel} \rightarrow 0$;
3. entrambi nulli.

In modo corrispondente si hanno tre possibili dimensioni critiche d_c , date dai valori 5, 4.5 ed 8, in netto contrasto con il valore del modello di Ising di equilibrio $d_c = 4$. Si può vedere che la scelta opportuna risulta la (1), il che conduce alla importantissima forma finale del funzionale dinamico per il modello diffusivo forzato alla criticalità:

$$\mathcal{F}_c[\tilde{\phi}, \phi] = \int dt d^n x \lambda \left\{ \tilde{\phi}(\vec{x}, t) \left[\frac{\partial}{\lambda \partial t} + \nabla^4 - (\tau_{\parallel} \partial^2) \right] \phi(\vec{x}, t) + \varepsilon (\partial \tilde{\phi}) \phi^2 + \tilde{\phi} \nabla^2 \tilde{\phi} \right\}, \quad (2.23)$$

in cui abbiamo tolto tutti i termini irrilevanti e riscritto $n_{\perp} = 2\lambda$.

Al fine di studiare le proprietà vicino alla criticalità, dobbiamo aggiungere il termine:

$$\int dt d^n x \lambda \tau_{\perp} \tilde{\phi}(\vec{x}, t) (-\nabla^2) \phi(\vec{x}, t) \quad (2.24)$$

alla $\mathcal{F}_c[\tilde{\phi}, \phi]$.

Si può mostrare che, all'interno dello spazio dei parametri della (2.23), esiste un punto fisso non banale per $d < 5$, il che da origine ad un comportamento critico anomalo. Notiamo che la (2.23) possiede tre simmetrie in aggiunta a quelle precedentemente viste, due sono semplici trasformazioni di scala, cioè \mathcal{F} risulta invariante sotto:

$$(i) \quad \phi \rightarrow \alpha \phi, \quad \tilde{\phi} \rightarrow \alpha \tilde{\phi}, \quad x_{\parallel} \rightarrow \alpha^{-2} x_{\parallel}, \quad \tau_{\parallel} \rightarrow \alpha^{-4} \tau_{\parallel}, \quad \varepsilon \rightarrow \alpha^{-3} \varepsilon \quad (2.25a)$$

$$(ii) \quad \phi \rightarrow \beta \phi, \quad \tilde{\phi} \rightarrow \beta^{-1} \tilde{\phi}, \quad \varepsilon \rightarrow \beta^{-1} \varepsilon. \quad (2.25b)$$

La terza è invece una trasformazione ‘‘Galileiana’’, caratterizzata dal parametro continuo a :

$$(iii) \quad x_{\parallel} \rightarrow x_{\parallel} + 2\lambda \varepsilon a t, \quad \phi \rightarrow \phi + a, \quad \tilde{\phi} \rightarrow \tilde{\phi}, \quad (2.26)$$

con \vec{x}_{\perp} e t invariati. È da notare che gli argomenti di ϕ e $\tilde{\phi}$ risultano trasformati.

Poiché le perturbazioni attorno a $\varepsilon = 0$ devono essere pari nei campi, le serie devono essere in potenze di ε^2 . Utilizzando la prima invarianza, identifichiamo un parametro effettivo per una espansione g :

$$g \equiv A_{\varepsilon} \mu^{-\varepsilon} \tau_{\parallel}^{-3/2} \varepsilon^2 \quad (2.27)$$

dove A_{ε} è un conveniente fattore numerico dipendente da ε . La terza invarianza è l'origine di una identità di Ward.

Vediamo ora l'importanza del termine ‘‘irrelevante’’

$$\frac{u}{3!} \tilde{\phi} \nabla^2 \phi^3. \quad (2.28)$$

Sebbene questo termine risulti irrilevante nel senso del Gruppo di Rinormalizzazione e per lo studio dei punti fissi, esso non può venire dimenticato nella trattazione sotto T_c , dove esso assicura la stabilità della fase ordinata. Prendendo un ruolo molto simile al termine $u\phi^4$ nel modello di equilibrio per $d > d_c = 4$, esso viene identificato come un operatore pericolosamente irrilevante. Si può dimostrare che questo termine gioca un ruolo essenziale nella determinazione della equazione di stato e dell'esponente critico β .

2.3.2 Approssimazione ad albero

Una volta identificata la dimensione critica superiore essere $d_c = 5$, si può procedere con una espansione in ε , in cui $\varepsilon = d_c - d = 5 - d$. L'approssimazione ad albero (*tree-approximation*), oltre ad essere il punto di partenze di una in loop, risulta essere una teoria di ‘‘campo medio’’, e fornisce molti risultati corretti per

$d > d_c$, inoltre non deve trattare con dimensioni anomale e tutti gli esponenti si trovano attraverso un semplice *power counting*. Inoltre a questo livello il fattore di struttura e le funzioni di correlazione a due punti, vengono determinate attraverso unicamente dalle parti quadratiche del funzionale. Nel linguaggio del gruppo di rinormalizzazione, l'approssimazione ad albero viene associata con un punto fisso Gaussiano. Essendo la parte Gaussiana della (2.23), e denotandola con la \mathcal{F}_0 , rappresenta un sistema critico. Esso inoltre, nel caso $d > d_c$ risulta stabile rispetto alle parti non-Gaussiane di \mathcal{F}_c . Attraverso il funzionale critico \mathcal{F}_0 scritto in forma matriciale nello spazio $\{\vec{k}, \omega\}$ si arrivano a definire le funzioni a due punti di Green connesse $\langle \tilde{\phi}(\vec{k}, \omega) \phi(-\vec{k}, -\omega) \rangle$ e $\langle \phi(\vec{k}, \omega) \phi(-\vec{k}, -\omega) \rangle$, dove:

$$\vec{G}_{11}(\vec{k}, \omega) = \frac{1}{i\omega + \lambda(\vec{k}_\perp^4 + \tau_\parallel k_\parallel^2)} \quad (2.29a)$$

$$\vec{G}_{02}(\vec{k}, \omega) = \frac{2\lambda k_\perp^2}{\omega^2 + \lambda^2(\vec{k}_\perp^4 + \tau_\parallel k_\parallel^2)^2}. \quad (2.29b)$$

Nel dominio delle t queste sono rispettivamente $\langle \phi(\vec{k}, t) \tilde{\phi}(-\vec{k}, 0) \rangle$ e $\langle \phi(\vec{k}, t) \phi(-\vec{k}, 0) \rangle$, con:

$$\vec{G}_{11}(\vec{k}, t) = \Theta(t) \exp\{-\lambda(\vec{k}_\perp^4 + \tau_\parallel k_\parallel^2)t\} \quad (2.30a)$$

$$\vec{G}_{02}(\vec{k}, t) = \frac{k_\perp^2}{\vec{k}_\perp^4 + \tau_\parallel k_\parallel^2} \exp\{-\lambda(\vec{k}_\perp^4 + \tau_\parallel k_\parallel^2)|t|\} \quad (2.30b)$$

dove Θ è la funzione a gradino, che mostra la natura causale della (2.30a).

Mentre il funzionale \mathcal{F}_0 è un punto fisso associato con una teoria critica, risulta possibile descrivere la dipendenza dalla temperatura di una teoria critica vicina, mediante l'aggiunta del termine (2.24).

Notiamo che i termini non-Gaussiani in (2.23) e (2.22) verranno trattati perturbativamente; i due più importanti sono quelli associate con le costanti di accoppiamento ε ed u .

Notiamo che $G_{02}(\vec{k}, \omega)$ non è altro che il fattore di struttura dinamico $S(\vec{k}, \omega)$, definito in (1.27). Dunque riscrivendo $G_{02}(\vec{k}, \omega)$ nella forma (2.1), facilmente possiamo identificare i seguenti esponenti:

$$\Delta = 1, \quad \nu = 1/2 \quad \text{e} \quad z = 4 \quad (2.31)$$

così che

$$\nu_\perp = 1/2, \quad \nu_\parallel = 1, \quad z_\perp = 4 \quad \text{e} \quad z_\parallel = 2. \quad (2.32)$$

Naturalmente questi valori sono in accordo con quelli che si ottengono attraverso semplice *power counting*. Similmente, riscrivendo la (2.30b) con $t = 0$ nella forma (2.5a) e (2.5b), ci permette di identificare:

$$\eta = 0 \quad (2.33)$$

$$\eta_{\perp} = 0 \quad \text{e} \quad \eta_{\parallel} = 1 \quad (2.34)$$

così come le funzioni di scaling s_{\perp} ed s_{\parallel} .

Usando poi le leggi di scaling (2.10) con i nostri esponenti η e Δ , si ottengono gli esponenti in spazio reale:

$$\eta'_{\perp} = 1 \quad \text{e} \quad \eta'_{\parallel} = (3 - d)/2. \quad (2.35)$$

Studiando poi il propagatore $G_{11}(\vec{K}, \omega)$, il quale è semplicemente S_{11} della (2.13), possiamo utilizzare la (2.14) ed identificare la dimensione anomala del campo $\tilde{\phi}$. Ciò che otteniamo è

$$\tilde{\eta} = 0 \quad (2.36)$$

ed infine, con l'aiuto delle leggi di scaling (2.17) e (2.31), otteniamo:

$$\gamma_{\perp} = 1 \quad \text{e} \quad \gamma_{\parallel} = 0. \quad (2.37)$$

Infine è possibile ricavare che $\beta = 1/2$.

2.3.3 Risultati esatti ad un loop

Ora ci dedichiamo alla prima approssimazione oltre il livello ad albero ed, in accordo con lo schema del Gruppo di Rinormalizzazione, ci aspettiamo che, nella regione $d < d_c$, emergano non-banali correzioni agli esponenti della teoria Gaussiana, i quali possono venire calcolati come potenze in serie di $\varepsilon \equiv d_c - d$.

Rivolgiamo la nostra attenzione ora verso la ricerca del comportamento di scaling singolare, sotto la dimensione critica superiore e dunque sotto le cinque dimensioni. Qui, tenendo in conto le fluttuazioni da un punto di vista perturbativo, fa emergere sempre di più le divergenze, così che appaia evidente la necessità di utilizzare il potente schema teorico della teoria di campo rinormalizzata. Partendo dal funzionale dinamico critico \mathcal{F}_c risulta necessaria soltanto una singola rinormalizzazione indipendente. Esiste un punto fisso stabile infrarosso non-banale, il quale origina una dimensione anomala per Δ . Grazie alle invarianze di scala (2.25) e (2.26), la correzione alla Δ segue esattamente a tutti gli ordini in $\varepsilon \equiv 5 - d$. In modo sorprendente, non un singolo diagramma risulta necessario calcolare per ottenere questo risultato. Inoltre, non vengono incontrate divergenze nella rinormalizzazione di λ, ϕ e $\tilde{\phi}$, mentre è sufficiente solo una rinormalizzazione aggiuntiva per τ in (2.24). Dunque i loro esponenti associati mantengono i valori Gaussiani. D'altra parte, poiché $u \equiv 0$ al punto fisso \mathcal{F}_c , le proprietà critiche sotto T_c come β , possono venire trovate solo dopo una attenta analisi di tutti gli operatori irrilevanti che si mischiano con la (2.28). I risultati che si ottengono per gli esponenti indipendenti sono:

$$\Delta = 1 + \frac{\varepsilon}{3}; \quad z = 4; \quad \eta = \tilde{\eta} = 0; \quad \nu = \frac{1}{2}; \quad \beta = \frac{1}{2}. \quad (2.38)$$

Lo studio delle funzioni di scaling conduce alle:

$$\eta_{\perp} = 0, \quad \eta_{\parallel} = (6 + 2\varepsilon)/(6 + \varepsilon), \quad (2.39a)$$

$$z_{\perp} = 4, \quad z_{\parallel} = 12/(6 + \varepsilon), \quad (2.39b)$$

$$\nu_{\perp} = 2, \quad \nu_{\parallel} = 1 + \varepsilon/6, \quad (2.39c)$$

$$\tilde{\gamma} = 1. \quad (2.39d)$$

Studiando infine le correlazioni in spazio reale, si ha:

$$\eta'_{\perp} = 1 + \varepsilon/3 \quad \text{e} \quad \eta'_{\parallel} = (3 - d)(3 + \varepsilon)/(6 + \varepsilon). \quad (2.40)$$

2.3.4 IDLG vs RDLG

Garrido, de los Santos e Muñoz, come di recente hanno dichiarato in un comune lavoro, ritengono che, in riferimento alla relazione:

$$\vec{j}_E = 4\rho(1 - \rho)\vec{\varepsilon} = (1 - \phi^2)\vec{\varepsilon}, \quad (2.41)$$

il campo ε vada a zero nel caso in cui E sia preso infinito e la temperatura $T \rightarrow T_c$. In questo modo l'IDLG e l'RDLG verrebbero descritti dallo stesso modello, infatti osserviamo che mentre, per l'IDLG vale l'equazione di Langevin

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\phi(\vec{x}, t) = \lambda \{ & (\tau_{\perp} - \nabla^2)\nabla^2\phi + (\tau_{\parallel} - \alpha_{\parallel}\partial^2)\partial^2\phi - 2\alpha_{\times}\partial^2\nabla^2\phi \\ & + \frac{u}{3!}(\nabla^2\phi^3 + k\partial^2\phi^3) + \varepsilon\partial\phi^2 \} - (\vec{\nabla} \cdot \vec{\xi} + \partial\zeta), \end{aligned} \quad (2.42)$$

per il RDLG, si ha

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\phi(\vec{x}, t) = \lambda \{ & (\tau_{\perp} - \nabla^2)\nabla^2\phi + (\tau_{\parallel} - \alpha_{\parallel}\partial^2)\partial^2\phi - 2\alpha_{\times}\partial^2\nabla^2\phi \\ & + \frac{u}{3!}(\nabla^2\phi^3 + k\partial^2\phi^3) \} - (\vec{\nabla} \cdot \vec{\xi} + \partial\zeta). \end{aligned} \quad (2.43)$$

Dove per entrambe si ha rumore Gaussiano:

$$\langle \vec{\nabla} \cdot \vec{\xi}(\vec{x}, t) \vec{\nabla}' \cdot \vec{\xi}(\vec{x}', t') \rangle = n_{\perp}(-\nabla^2)\delta(\vec{x} - \vec{x}')\delta(t - t'), \quad (2.44a)$$

$$\langle \partial\zeta(\vec{x}, t) \partial'\zeta(\vec{x}', t') \rangle = n_{\parallel}(-\partial^2)\delta(\vec{x} - \vec{x}')\delta(t - t'). \quad (2.44b)$$

Osserviamo che al livello Gaussiano, le due equazioni di Langevin (2.42) e (2.43), sono esattamente le stesse.

Per quanto riguarda il comportamento critico, vediamo cosa succede ai due funzionali. Abbiamo visto che per *L'Infinitely Driven Lattice Gas* si ha:

$$\mathcal{F}_c[\tilde{\phi}, \phi] = \int dt d^n x \lambda \left\{ \tilde{\phi}(\vec{x}, t) \left[\frac{\partial}{\lambda \partial t} + \nabla^2(\nabla^2 - \tau_{\perp}) - (\tau_{\parallel}\partial^2) \right] \phi(\vec{x}, t) + \varepsilon(\partial\tilde{\phi})\phi^2 + \tilde{\phi}\nabla^2\phi \right\}. \quad (2.45)$$

Per il *Randomly Driven Lattice Gas* vale invece il funzionale critico dato dalla:

$$\mathcal{F}_c[\tilde{\phi}, \phi] = \int dt d^n x \lambda \left\{ \tilde{\phi}(\vec{x}, t) \left[\frac{\partial}{\lambda \partial t} + \nabla^2 (\nabla^2 - \tau_\perp) - (\tau_\parallel \partial^2) \right] \phi(\vec{x}, t) + u \tilde{\phi} \nabla^2 \phi^3 + \tilde{\phi} \nabla^2 \tilde{\phi} \right\}. \quad (2.46)$$

Osserviamo che nel funzionale (2.45) abbiamo eliminato l'operatore pericolosamente irrilevante $\tilde{\phi} \nabla^2 \phi^3$.

Le due relazioni appena ottenute, sembrano simili ed invece manifestano cruciali differenze qualora si sviluppi, nello schema del Gruppo di Rinormalizzazione, in $\epsilon = d_c - d$.

Notiamo inoltre che la (2.45) soddisfa alle potenti simmetrie (2.25) e (2.26), l'ultima delle quali abbiamo chiamato trasformazione "Galileiana."

Alla criticalità è necessario svolgere una analisi di scaling, infatti la teoria Gaussiana non risulta più sufficiente a questo punto, poichè compaiono delle fluttuazioni su tutte le scale. All'interno dello schema del Gruppo di Rinormalizzazione, la simmetria di tipo "Galileiano" permette di ottenere risultati esatti per la (2.45). Per quanto riguarda invece il funzionale (2.46), questa potente simmetria non vale più e dunque la procedura del Gruppo di Rinormalizzazione risulta valida soltanto fino al secondo ordine in $\epsilon = d_c - d$.

Per quanto riguarda l'RDLG, si ha che risolvendo le equazioni differenziali del Gruppo di Rinormalizzazione, otteniamo la seguente relazione di scaling per la funzione vertice:

$$\begin{aligned} \Gamma_{n, \tilde{n}}(k_\parallel, \vec{k}_\perp, t, \tau, u, L_\parallel, L_\perp) &= \\ &= \lambda^{-d+1-\frac{n}{2}(d-1+\eta/2)-\frac{\tilde{n}}{2}(d+3+3/2\eta)} \Gamma_{n, \tilde{n}}(\lambda^{1+\Delta} k_\parallel, \vec{k}_\perp \lambda, t \lambda^{-4}, \tau \lambda^2, \lambda^{-2\sigma u}). \end{aligned} \quad (2.47)$$

Qui si hanno solo risultati al secondo ordine in $\epsilon = d_c - d$, con d_c dimensione critica superiore del modello. Gli esponenti indipendenti che si ottengono sono:

$$\eta = \frac{4}{243} \epsilon^2, \quad (2.48)$$

$$\nu_\perp = \frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{12} + \frac{\epsilon^2}{18} \left[\frac{67}{108} + \ln \frac{2}{\sqrt{2}} \right]. \quad (2.49)$$

Notiamo infine che in entrambi i modelli competitivi, la dimensione critica inferiore è $d_c^{inf} = 2$, e dunque ci aspettiamo delle correzioni logaritmiche agli andamenti a potenza; si ritiene comunque che siano piccoli.

Capitolo 3

Universalità in Discussione

Nel 1986, Janssen, Schmittmann, Leung e Cardy, come detto, proposero una equazione di Langevin per il campo di densità a grana-grossa, la quale incorporava le principali caratteristiche del *Driven Lattice Gas*, e che poteva dunque descrivere il comportamento critico del DLG. Nella fattispecie, una dinamica conservata, una anisotropia indotta da un campo esterno. Attraverso uno studio canonico del Gruppo di Rinormalizzazione gli esponenti critici vennero calcolati esattamente in generica dimensione d , con $2 < d < d_c = 5$. Questa teoria prevede un forte comportamento anisotropo con correlazioni che crescono con differenti esponenti a seconda che venga scelta la direzione longitudinale al campo, o una di quelle relative allo spazio trasverso.

Una caratteristica estremamente importante della teoria di JSJC, la quale sarà il cuore del nostro studio, è data dal fatto che le fluttuazioni trasverse, e dunque quelle associate ai vettori d'onda trasversi, diventano Gaussiane nel limite critico. Sebbene siano state ottenute diverse conferme della teoria di JSJC, attraverso estensive simulazioni numeriche, rimangono ancora delle discrepanze.

Le conclusioni di JSJC sono state recentemente messe in discussione da Garrido et al. Essi credono che il DLG per $E = \infty$ (IDLG), non venga descritto dalla teoria di JSJC, ma appartenga piuttosto alla classe di universalità del Randomly-Driven-Lattice-Gas (RDLG). In questo modello, la direzione del campo esterno viene scelta a caso ad ogni tempo.

Lo studio del gruppo di rinormalizzazione svolto da Schmittmann e Zia intorno al 1991, riguardo al RDLG, conduce invece a delle notevoli differenze, infatti:

- (i) la dimensione critica superiore è $d_c = 3$;
- (ii) l'esponente critico di anisotropia risulta essere $\Delta = 1 + O((3 - d)^2)$;
- (iii) le fluttuazioni critiche trasverse non sono Gaussiane.

Appare dunque evidente che questa classe di universalità risulta alquanto diversa da quella di JSJC.

Ciò non di meno, intorno al 2001 Achahbar, Garrido, Marro, Muñoz, e poco dopo Albano e Saracco, apparentemente trovarono che il DLG in $d = 2$ appartenesse alla classe di universalità dell'RDLG.

Risulta chiaro a questo punto, dati tutti questi risultati contraddittori, quanto risultino necessarie delle nuove indagini numeriche, al fine di decidere quale di queste due teorie realmente descriva la classe di universalità del DLG.

Ci focalizzeremo sulle fluttuazioni trasverse, dal momento che queste, nella teoria di JSLC, conducono ad una affermazione molto forte: le funzioni di correlazione trasverse sono Gaussiane. Quindi oltre agli esponenti critici, risulta possibile calcolare esattamente le funzioni di scaling di diverse osservabili e costruire test rigorosi rispetto ai dati.

3.1 Predizioni di Campo-Medio: le Fluttuazioni Trasverse

Concentriamoci dunque sulle fluttuazioni trasverse poiché, come detto, possono selezionare la corretta descrizione di teoria dei campi. Si può provare che esse sono di tipo Gaussiano, in accordo con le predizioni della teoria di campo proposta da Janssen, Schmittmann, Leung e Cardy.

Iniziamo la nostra analisi attraverso il funzionale dinamico dell IDLG. Per il momento trascuriamo l'operatore pericolosamente irrilevante, così che si ottenga:

$$J[s, \tilde{s}] = \lambda \int dt d^d x \tilde{s} [\lambda^{-1} \partial_t + \nabla_{\perp}^2 (\nabla_{\perp}^2 - \tau_{\perp}) - \tau_{\parallel} \partial_{\parallel}^2] s + \epsilon (\partial_{\parallel} \tilde{s}) s^2 + \tilde{s} \nabla_{\perp}^2 \tilde{s}. \quad (3.1)$$

Qui abbiamo usato la notazione canonica di Schmittmann e Zia. Certamente, i termini non-perpendicolari hanno una gamba del tipo k_{\parallel} attaccata, così che, imponendo $k_{\parallel} = 0$, otteniamo il seguente funzionale:

$$J[s, \tilde{s}] = \lambda \int dt d^d x \tilde{s} [\lambda^{-1} \partial_t + \nabla_{\perp}^2 (\nabla_{\perp}^2 - \tau_{\perp})] s + \tilde{s} \nabla_{\perp}^2 \tilde{s}. \quad (3.2)$$

Nel seguito, indicheremo $\nabla_{\perp} = \nabla$, $k_{\perp} = k$, e $\tau_{\perp} = \tau$. Notiamo inoltre che per semplicità abbiamo posto $d - 1 = d$.

Possiamo a questo punto riconoscere questo funzionale come la parte gaussiana del funzionale dinamico per il Modello B (nella terminologia di Hohenberg-Halperin).

Discutiamo ora le condizioni iniziali, in modo tale da definire gli estremi di integrazione per t .

Considerando le condizioni iniziali per $t = 0$, abbiamo:

$$J[s, \tilde{s}] = \lambda \int_0^{\infty} dt \int d^d x \tilde{s} [\lambda^{-1} \partial_t + \nabla_{\perp}^2 (\nabla_{\perp}^2 - \tau_{\perp})] s + \tilde{s} \nabla_{\perp}^2 \tilde{s}. \quad (3.3)$$

Risulta necessaria una media anche sulle condizioni iniziali, così dobbiamo aggiungere una parte al funzionale dinamico:

$$Z[s, \tilde{s}] = \int [s, i\tilde{s}] e^{-J[s, \tilde{s}] - H_0[s_0]} \delta\left(\int s_0(x)\right) \delta\left(\int a(x)\right) \quad (3.4)$$

dove

$$H_0[s_0] = \frac{\tau_0}{2} \int dx (s_0(x) - a(x))^2 \quad s_0(x) = s(x, t=0). \quad (3.5)$$

Notiamo che abbiamo incluso le parti che assicurano $\int d^d x s_0(x) = 0$ e $\int d^d x a(x) = 0$.

Comunque queste parti non entreranno direttamente nel calcolo. Infatti esse modificano unicamente il comportamento di momento nullo della teoria. Da ora in poi esse verranno trascurate.

Chiameremo brevemente $G = J + H_0$. Cerchiamo di calcolare il funzionale generatore delle funzioni connesse, che si legge:

$$W[h, \tilde{h}] = \int [s, i\tilde{s}] e^{-G[s, \tilde{s}] + \int_0^\infty dt \int d^d x h(x, t) s(x, t) + \tilde{h}(x, t) \tilde{s}(x, t)}, \quad (3.6)$$

e questo può venire fatto risolvendo le seguenti due equazioni variazionali, con le relative condizioni iniziali:

$$[-\partial_t + k^2(k^2 + \tau)] \tilde{s}_c(k, t) = h(k, t) \quad (3.7a)$$

$$[\partial_t + k^2(k^2 + \tau)] s_c(k, t) - 2k^2 \lambda \tilde{s}_c(k, t) = \tilde{h}(k, t) \quad (3.7b)$$

$$\tilde{s}(k, t = \infty) = 0 \quad (3.7c)$$

$$s_0(k) - a(k) = \tau_0^{-1} \tilde{s}(k, 0). \quad (3.7d)$$

Queste equazioni sono scritte in una rappresentazione mista tempo-momento, al fine di mostrare in un modo più semplice come queste possano venire risolte. Scrivendo esplicitamente le soluzioni:

$$\tilde{s}_c(k, t) = \int_0^\infty dt' e^{-\lambda k^2(k^2 + \tau)(t' - t)} h(k, t') \quad (3.8a)$$

$$\begin{aligned} s_c(k, t) = & \int_0^\infty dt' \left[e^{-\lambda k^2(k^2 + \tau)(t - t')} \tilde{h}(k, t') + \right. \\ & + \frac{e^{-\lambda k^2(k^2 + \tau)[t' - t]} - (1 - \tau_0^{-1}(k^2 + \tau)) e^{-\lambda k^2(k^2 + \tau)(t' + t)}}{k^2 + \tau} + \\ & \left. + a(k) e^{-\lambda k^2(k^2 + \tau)t} \right]. \end{aligned} \quad (3.8b)$$

Ora dobbiamo espandere attorno a queste soluzioni ed integrare; usando la condizione di normalizzazione $W[0, 0] = 0$ otteniamo:

$$W[h, \tilde{h}] = \frac{1}{2} \int_0^\infty dt \int d^d x h(x, t) s_c(x, t) + \tilde{h}(x, t) \tilde{s}_c(x, t) + a(x, t) \delta(t) \tilde{s}_c(x, t). \quad (3.9)$$

Possiamo esprimere le soluzioni in termini dei nuclei, in modo tale che il funzionale scritto sopra si trasformi in:

$$W[\tilde{h}, h] = \left(h, G\tilde{h} + \frac{1}{2}Ch \right) + \int_0^\infty dt \int d^d k h(-k, t) G(k, t, 0) a(k). \quad (3.10)$$

Dove non esplicitamente scritto, abbiamo usato una notazione abbreviata per l'integrazione su t e k . Abbiamo chiamato $G(k, t, t')$ il propagatore e con $C(k, t, t')$ il correlatore. Notiamo che dalla espressione del funzionale generatore $W[h, \tilde{h}]$ si può vedere che la funzione a due punti $\langle s(-k, t') s(k, t) \rangle$ non dipende dalle condizioni iniziali.

Esplicitamente, il propagatore ed il correlatore sono:

$$G(k, t, t') = \theta(t - t') e^{-\lambda k^2 (k^2 + \tau)(t - t')} \quad (3.11a)$$

$$C(k, t, t') = \frac{e^{-\lambda k^2 (k^2 + \tau)[t' - t]} - (1 - \tau_0^{-1}(k^2 + \tau)) e^{-\lambda k^2 (k^2 + \tau)(t' + t)}}{k^2 + \tau}. \quad (3.11b)$$

Una caratteristica della teoria di JSLC, risiede nel fatto che essa derivi da un processo a grana-grossa di una master-equation definita su reticolo, così risulta possibile assumere che:

$$\langle s(-k, t') s(k, t) \rangle_{latt} = Z \langle s(-k, t') s(k, t) \rangle = ZC(k, t, t'). \quad (3.12)$$

Noi siamo interessati alla funzione di correlazione a tempi uguali:

$$C(k, t, t') = Z \frac{1 - (1 - \tau_0^{-1}(k^2 + \tau)) e^{-\lambda k^2 (k^2 + \tau)(t' + t)}}{k^2 + \tau}. \quad (3.13)$$

Questa si può ulteriormente semplificare assumendo $\tau_0^{-1} = 0$:

$$C(k, t, t') = Z \frac{1 - e^{-\lambda k^2 (k^2 + \tau)(t' + t)}}{k^2 + \tau}. \quad (3.14)$$

Dunque abbiamo dato una giustificazione della formula usata da Sergio Caracciolo nelle sue note sullo short-time scaling, partendo dalla teoria di JSLC.

3.2 Short-Time Scaling

Adesso vogliamo verificare se le fluttuazioni trasverse, si dimostrano essere Gaussiane, come predetto dalle analisi di teoria di Campo svolte da Janssen, Schmittmann, Leung e Cardy. Abbiamo tutto, infatti nel precedente paragrafo abbiamo ristretto

il funzionale dinamico critico al sottospazio trasverso. Il problema che subito troviamo, risiede nel fatto che per un sistema con un grande numero di siti come il nostro, estensive simulazioni numeriche sono troppo onerose per potersi fare, dal momento che il noto fenomeno del rallentamento critico, diverge con la taglia del reticolo. Risulta inoltre rilevante che per il nostro sistema, l'esponente dinamico critico sia $z = 4$. Dunque dobbiamo ricorrere a qualche altra tecnica, che ci permetta di estrapolare le caratteristiche universali del modello, in modo meno dispendioso in termini di tempo computazionale necessario per ottenere i risultati. In un famoso articolo del 1988, Janssen, Schaub e Schmittmann, studiarono le proprietà del rilassamento critico del Modello A (puro rilassamento dissipativo), partendo da uno stato iniziale macroscopicamente preparato e caratterizzato da valori di non-equilibrio per il parametro d'ordine e le correlazioni. Usando un approccio del gruppo di rinormalizzazione, osservarono che esistevano dei primi istanti nel processo di rilassamento che mostravano un comportamento universale.

È ben noto che molte proprietà statiche e dinamiche dei sistemi fisici, mostrano delle anomalie se i parametri termodinamici si avvicinano ad un punto critico. Il comportamento singolare di molte osservabili viene caratterizzato da un largo grado di universalità, e dunque risulta indipendente dai dettagli microscopici della descrizione fisica e matematica del sistema. Nella dinamica critica si è particolarmente interessati agli aspetti universali dei processi di rilassamento. Uno stato iniziale viene preparato da un punto di vista macroscopico ed è poi lasciato rilassare verso l'equilibrio (o, chiaramente, verso lo stato stazionario di non-equilibrio). Il comportamento del sistema per grandi tempi è già stato studiato in modo approfondito. Nei tempi brevi di tipo microscopico, dopo pochissimo tempo dall'inizio del rilassamento, il comportamento viene governato da dei processi di tipo microscopico che non sono affatto universali, ma dipendono dalle caratteristiche del singolo sistema in esame. Questo tempo viene denominato "microscopic initial slip", ed il comportamento del sistema in questo periodo può venire compreso soltanto attraverso una teoria microscopica.

Il periodo di grande interesse è quello appena successivo, denominato "critical initial slip", all'interno del quale il sistema, come detto, mostra le caratteristiche universali. Proviamo a fare un esempio della preparazione iniziale macroscopica del sistema e del successivo rilassamento: consideriamo per semplicità un ordinario modello di Ising a temperatura $T \gg T_c$, il quale essendo molto lontano dalla temperatura critica, avrà tutte le correlazioni che risulteranno a corto raggio. Successivamente permettiamo al sistema di avere magnetizzazione non nulla, attraverso la presenza di un campo magnetico esterno. Ora spegnamo il campo esterno e portiamo immediatamente la temperatura a $T \simeq T_c$. Quello che si nota è l'emergere, nelle tipiche osservabili termodinamiche, di un processo di rilassamento, il quale evidenzia il "critical initial slip". Il punto centrale della questione risiede nel fatto che successivamente al brusco abbassamento della temperatura, sia il parametro d'ordine, sia le correlazioni, mostrano valori di non-equilibrio e dunque risulta possibile studiare dei valori iniziali di non-equilibrio nei primi stadi del processo di rilassamento.

3.3 Utilizziamo le previsioni di Campo-Medio

Assumiamo ora un comportamento di *campo-medio* per le fluttuazioni trasverse.

Prepariamo il sistema di modo che a tempo iniziale si abbia magnetizzazione nulla. Più precisamente fissiamo una configurazione fortemente perpendicolare alla forzante, di modo che al tempo zero si abbia magnetizzazione nulla lungo ogni striscia di spin longitudinale al campo.

Iniziamo con l'assunzione che la funzione trasversa a due-punti su reticolo sia data dall'espressione

$$G[k, t] = Z \frac{1 - e^{-2\lambda t \hat{k}^2 (\hat{k}^2 + \tau)}}{\hat{k}^2 + \tau} \quad (3.15)$$

con le solite definizioni e λ che determina l'unità di tempo.

Segue per la dimensione trasversa $L = L_{\perp}$

$$G\left(\frac{2\pi n}{L}, t\right) \approx Z L^2 \left[\frac{1 - e^{-2\lambda \frac{t}{L^4} 4\pi^2 n^2 (4\pi^2 n^2 + \tau L^2)}}{4\pi^2 n^2 + \tau L^2} \right], \quad (3.16)$$

e per piccoli tempi

$$G\left(\frac{2\pi n}{L}, t\right) \sim Z L^2 2\lambda \frac{t}{L^4} 4\pi^2 n^2, \quad (3.17)$$

indipendentemente da τ , quindi

$$\chi = G\left(\frac{2\pi}{L}, t\right) \sim Z L^2 2\lambda \frac{t}{L^4} 4\pi^2. \quad (3.18)$$

Inoltre ci attendiamo che

$$m^2 = \frac{\pi \chi}{4L_{\parallel} L_{\perp}^2 \sqrt{2}} \sim \frac{2\lambda \pi^3 t}{L_{\parallel} L_{\perp}^4} \quad (3.19)$$

ed infine

$$\xi^2 = \frac{L^2}{32\pi^2} \left[\frac{G\left(\frac{2\pi}{L}, t\right)}{G\left(\frac{6\pi}{L}, t\right)} - 1 \right] \sim -\frac{L^2}{36\pi^2} + L^2 \frac{5}{9} 2\lambda \frac{t}{L^4} 4\pi^2. \quad (3.20)$$

3.4 Finite-Size Scaling Dinamico

Poniamo ora $\tau = 0$ e fissiamo

$$T = 2\lambda (2\pi)^4 \frac{t}{L^4}, \quad (3.21)$$

così che:

$$G\left(\frac{2\pi n}{L}, t\right) \sim \frac{Z L^2}{(2\pi n)^2} \left(1 - e^{-n^4 T} \right). \quad (3.22)$$

Seguono ora immediatamente

$$\frac{\chi}{L^2} = \frac{Z(1 - e^{-T})}{4\pi^2}, \quad (3.23)$$

$$m^2 L_{\parallel} L_{\perp}^4 \sim 1 - e^{-T} \quad (3.24)$$

ed inoltre la

$$\frac{\xi^2}{L^2} = \frac{1}{32\pi^2} \left(-1 + 9 \frac{1 - e^{-T}}{1 - e^{-81T}} \right). \quad (3.25)$$

L'ultima formula riesce anche a prevedere quando ξ^2 , che risulta essere inizialmente negativa, si annulli.

Un'altra osservabile che risulta molto utile per la nostra discussione è

$$\frac{\xi^2}{\chi} = \frac{1}{8Z} \left(-\frac{1}{1 - e^{-T}} + 9 \frac{1}{1 - e^{-81T}} \right), \quad (3.26)$$

la quale interpola tra 0 e $1/Z$ ed è probabilmete la miglior candidata per discriminare tra i vari modelli stocastici.

Capitolo 4

Laboratorio

Ora descriveremo l'apparato sperimentale che ci ha fornito le importanti evidenze numeriche caratterizzanti il lavoro di tesi.

Purtroppo l'*Infinitely Driven Lattice Gas*, non può venire studiato attraverso una realizzazione fisica reale. Siamo dunque costretti ad implementare il modello dal punto di vista computazionale.

Abbiamo utilizzato il noto linguaggio di programmazione chiamato C++, costruendo sette classi che gestiscono l'intero sistema. Brevemente diamo una descrizione qualitativa di queste ultime:

- *Lattice* si occupa della costruzione del reticolo tridimensionale;
- *Dato* gestisce la grande mole di dati, definendo in modo opportuno le medie, gli errori ed ogni stimatore collegato alla analisi statistica dei dati;
- *Ispins* definisce tutte le osservabili di interesse, gestisce la tecnica del *Monte Carlo*, prepara la configurazione iniziale del sistema in modo utile al successivo rilassamento, implementa la trasformazione di Fourier discreta sfruttando la libreria denominata *FTW3*, inserisce la temperatura nel modello, sceglie la dinamica del sistema (Kawasaki, Metropolis, ...);
- *MSC* ottimizza la spesa computazionale attraverso la tecnica che descriveremo successivamente, denominata *Multi-Spin-Coding*;
- *RNG* contiene il generatore della catena di numeri casuali, il quale è stato scritto da Parisi, Rapuano ed A. Sokal;
- *tatoer* stampa in formato **.gif* le immagini di tutte le sezioni del reticolo tridimensionale, così che si possa osservare, anche "all'interno" del reticolo stesso, quale tipo di organizzazione si stia raggiungendo;
- *sample* è la classe che sovrintende al processo globale, infatti qui si trova il *main*, in cui impostiamo tutti i parametri del modello, quali le dimensioni, la temperatura, i tempi da campionare, ...

Detto questo, passiamo ora alla parte sperimentale del lavoro.

Per sua natura, un modello computazionale non raggiungerà mai un punto critico reale, poichè non è possibile allocare nella memoria di un calcolatore infiniti gradi di libertà. Per fare un esempio, pensiamo ad un sistema di equilibrio in cui si ha la funzione di partizione ordinaria con il peso di Boltzmann $e^{-\beta\mathcal{H}(p,q)}$ e dunque $Z(\beta) = \sum_{\sigma} e^{-\beta\mathcal{H}(p,q)}$. L'interesse verso queste funzioni di partizione, nasce quando divergono, infatti le transizioni di fase si hanno quando compaiono delle singolarità nella funzione di partizione stessa. La singolarità comporta una non-analiticità in β , ma:

- \mathcal{H} è analitica;
- l'esponenziale è una funzione analitica.

Dunque la non-analiticità compare quando i termini nella somma diventano infiniti, quando passo da una somma ad una serie, ovvero nel limite termodinamico. È interessante osservare come una singolarità matematica porti alla osservazione di un notevole fenomeno fisico.

Detto questo, risulterà chiara l'impossibilità computazionale di far divergere quella somma. Dunque, per studiare il comportamento critico del modello, ci rivolgiamo al *finite-size scaling*. Data la memoria limitatata del calcolatore, anche se ci mettiamo al punto critico, non troviamo divergenze; l'andamento delle osservabili non sarà a legge di potenza, ma avrà code che vengono depresse molto rapidamente. Quindi per estrarre il comportamento critico dalle osservabili, studiamo come esse scalano al variare, in generale, della temperatura e della taglia. Il nostro sarà uno studio del *finite-size scaling dinamico*, poichè, come più volte detto, ci rivolgiamo allo studio delle proprietà di tempo breve; in particolare fisseremo $T \simeq T_c$ e varieremo la taglia dei reticoli.

Per lo studio di taglia finita, abbiamo fatto evolvere, nella fase di rilassamento, le seguenti dieci geometrie:

- $100 \times 36 \times 36$,
- $140 \times 36 \times 36$,
- $80 \times 36 \times 36$,
- $60 \times 36 \times 36$,
- $60 \times 120 \times 120$,
- $60 \times 90 \times 90$,
- $60 \times 70 \times 70$,
- $60 \times 50 \times 50$,
- $120 \times 90 \times 90$.

Poichè teoricamente non è nota la temperatura critica dell'IDLG tridimensionale, abbiamo utilizzato il valore ottenuto da Leung e Wang in un lavoro numerico svolto nel 1991. Essi si sono concentrati sullo studio critico dell'*Infinitely Driven Lattice Gas* in 3D termalizzato. Prima di poter acquisire i dati, hanno dovuto aspettare che il sistema raggiungesse lo stato stazionario, il che ha comportato l'attesa, a T_c , di un tempo pari a circa $10 \cdot e^8$ Monte Carlo steps. Notiamo che questa lunga simulazione è necessaria per tutte le geometrie che si implementano ed oltretutto, fissata la geometria, per tutti i diversi semi utilizzati per migliorare la statistica. Gli stessi autori dichiarano che il totale ammontare di tempo CPU speso è stato dell'ordine di sette anni su un IBM SP2, il che fornisce una stima della richiesta computazionale necessaria per raggiungere una buona statistica in questo modello.

Questo rende ancora più notevole il risultato da noi raggiunto infatti, come ricordo, abbiamo ricavato gli esponenti critici e le varie costanti delle osservabili implementate, in perfetto accordo con le attese di teoria dei campi svolte da JSLC, con una spesa computazionale pari al mese. È anche molto rilevante che, utilizzando la teoria della dinamica critica sviluppata da JSS si ottengono, durante il "critical initial slip", le caratteristiche universali attese.

Leung e Wang hanno plottato al variare della temperatura lo scaling nei massimi della suscettività, così come da loro definita, per le quattro geometrie $113 \times 18 \times 18$, $193 \times 22 \times 22$, $367 \times 28 \times 28$, $524 \times 32 \times 32$.

Per verificare se il programma da noi implementato funzionasse correttamente, abbiamo studiato, per varie temperature, come variasse la suscettività da loro definita, per la geometria $113 \times 18 \times 18$, ottenendo il grafico (4.1).

Riportiamo di seguito la definizione della suscettività data da Leung e Wang:

$$\chi = \frac{L_{\parallel} L_{\perp}}{T \sin(\pi/L_{\perp})} [\langle \phi^2 \rangle - \langle \phi \rangle^2], \quad (4.1)$$

dove

$$\phi = \frac{1}{2L_{\parallel} L_{\perp}} \sin\left(\frac{\pi}{L_{\perp}}\right) \sqrt{|\tilde{\sigma}(0, 1, 0)|^2 + |\tilde{\sigma}(0, 0, 1)|^2}, \quad (4.2)$$

e

$$\tilde{\sigma}(1, m, n) = \sum_{x=0}^{L_{\parallel}-1} \sum_{y=0}^{L_{\perp}-1} \sum_{z=0}^{L_{\perp}-1} \sigma_{x,y,z} e^{\frac{2\pi i l x}{L_{\parallel}}} e^{\frac{2\pi i (m y + n z)}{L_{\perp}}}, \quad (4.3)$$

con $\sigma_i \pm 1$.

Un buon fit della curva di Leung e Wang per la suscettività è $\chi[L_{\parallel}] = 4 \cdot \left(\frac{L_{\parallel}}{100}\right)^{7/8}$.

L'inserto è in scala logaritmica ed il dato che abbiamo è in perfetto accordo con il loro, infatti dal nostro grafico si evince che il picco della suscettività vale 4.5 circa (ovviamente $\ln[4.5] = 1.5$ circa). Guardando i grafici di Leung-Wang, dalla loro figura abbiamo ricavato la loro retta (in scala logaritmica), e precisamente $\chi[L] \simeq 4\left(\frac{L}{100}\right)^{7/8}$ che per $L = 114$ diventa $\chi[114] = 4.48592$.

Dunque confidiamo nel nostro apparato "sperimentale".

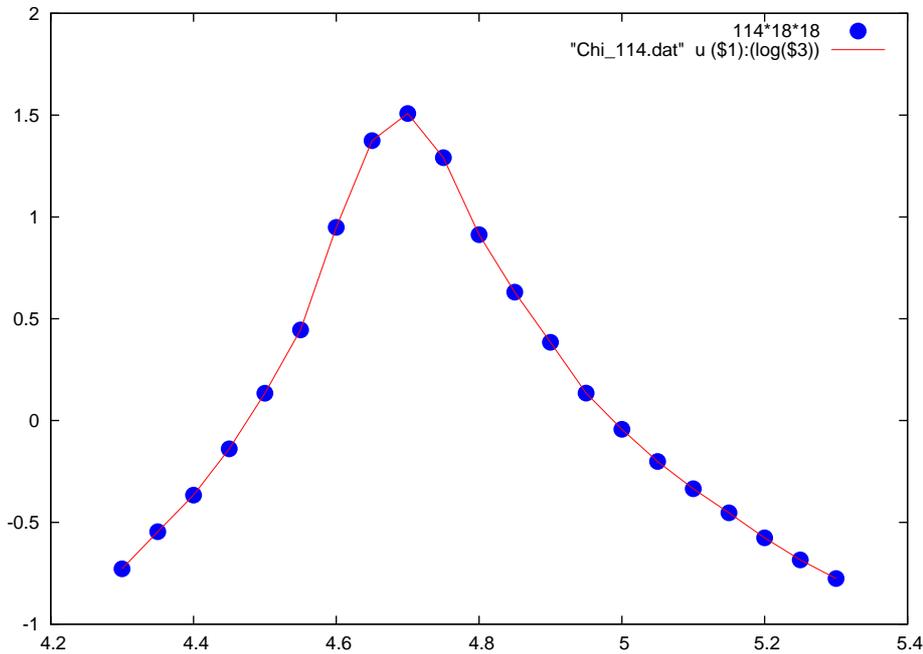


Figura 4.1: Scaling dei massimi della suscettività χ alla Leung e Wang in scala logaritmica, in funzione della temperatura T , per la geometria $113 \times 18 \times 18$.

4.1 Definizione delle osservabili

In questa sezione ci occupiamo di definire le osservabili nelle quali siamo interessati, quelle che possono venire misurate nelle simulazioni numeriche ed attraverso le quali risulti possibile verificare l'accordo tra la teoria e l'esperimento. Il nostro interesse è rivolto verso l'*Infinitely Driven Lattice Gas* tridimensionale, dunque dovremo stare attenti a scegliere una opportuna definizione che tenga conto della fisica in gioco.

Dalle previsioni di teoria dei campi fatte da JSLC, ci aspettiamo che lo spazio trasverso al campo forzante, si comporti in modo Gaussiano, e che le due direzioni trasverse abbiano un comportamento globale identico. Dunque risulta necessario che le osservabili abbiano una formulazione invariante. Infatti il sistema potrebbe scegliere indifferentemente una delle due direzioni trasverse per iniziare ad organizzarsi, o addirittura potrebbe sceglierne una e poi “cambiare idea”. Questo non deve inficiare le misure che conduciamo. Quindi, per limitare la complessità del problema e per non discriminare una delle due direzioni trasverse, scegliamo dei reticoli che abbiano una direzione longitudinale lunga X e le due direzioni trasverse lunghe entrambe Y . A questo punto se definiamo delle variabili in modo invariante, dovremmo essere in grado di descrivere adeguatamente il sistema.

4.1.1 Parametro d'ordine e suscettività

Consideriamo ora un reticolo ipercubico tridimensionale di taglia $L_{\parallel} \times L_{\perp}^2$ con condizioni periodiche al contorno. Definendo la variabile di sito in notazione “magnetica” $s_{\vec{i}} \equiv 2n_{\vec{i}} - 1$ e la sua trasformata di Fourier con:

$$\phi(\vec{k}) \equiv \sum_{\vec{j} \in \Lambda} e^{i\vec{k} \cdot \vec{j}} s_{\vec{j}} \quad (4.4)$$

dove i momenti permessi sono

$$\vec{k}_{n,m,l} \equiv \left(\frac{2\pi n}{L_{\parallel}}, \frac{2\pi m}{L_{\perp}}, \frac{2\pi l}{L_{\perp}} \right) \quad (4.5)$$

con $(n, m, l) \in \mathbb{Z}_{L_{\parallel}} \times \mathbb{Z}_{L_{\perp}} \times \mathbb{Z}_{L_{\perp}}$.

Se consideriamo il modello con densità fissata a $\rho = 1/2$ allora otteniamo che:

$$\sum_{\vec{j} \in \Lambda} s_{\vec{j}} = 0 \quad (4.6)$$

o equivalentemente:

$$\phi(\vec{k}_{0,0,0}) = 0. \quad (4.7)$$

Nella fase ordinata $|\phi(\vec{k})|$ assume valore massimo per $\vec{k}_{0,1,0}$ e per $\vec{k}_{0,0,1}$.

Possiamo definire quindi come buon parametro per la “magnetizzazione”, la trasformata di Fourier per la magnetizzazione locale, in forma invariante:

$$\begin{aligned} m(k_{\perp} = \frac{2\pi}{L_{\perp}}) = m(L_{\parallel}, L_{\perp}) &\equiv \sqrt{\left(\frac{1}{|\Lambda|} \langle |\phi(\vec{k}_{0,1,0})| \rangle \right)^2 + \left(\frac{1}{|\Lambda|} \langle |\phi(\vec{k}_{0,0,1})| \rangle \right)^2} = \\ &= \frac{1}{|\Lambda|} \sqrt{\langle |\phi(\vec{k}_{0,1,0})| \rangle^2 + \langle |\phi(\vec{k}_{0,0,1})| \rangle^2}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Nello spazio dei momenti, il fattore di struttura statico è dato dalla:

$$\tilde{G}(\vec{k}, L_{\parallel}, L_{\perp}) \equiv \frac{1}{|\Lambda|} \langle |\phi(\vec{k})|^2 \rangle \quad (4.9)$$

la quale si annulla per $\vec{k}_{0,0,0}$, a causa della (4.7), ed è massima per $\vec{k}_{0,1,0}$ e per $\vec{k}_{0,0,1}$, così che sia naturale definire la suscettività (primo momento) come:

$$\chi(k_{\perp} = \frac{2\pi}{L_{\perp}}) = \chi_1(L_{\parallel}, L_{\perp}) \equiv \sqrt{(\tilde{G}(\vec{k}_{0,1,0}; L_{\parallel}, L_{\perp}))^2 + (\tilde{G}(\vec{k}_{0,0,1}; L_{\parallel}, L_{\perp}))^2}. \quad (4.10)$$

Le previsioni di teoria dei campi svolte da JSLC che volevamo verificare, hanno richiesto anche lo studio della suscettività, terzo momento:

$$\chi(k_{\perp} = \frac{6\pi}{L_{\perp}}) = \chi_3(L_{\parallel}, L_{\perp}) \equiv \sqrt{(\tilde{G}(\vec{k}_{0,3,0}; L_{\parallel}, L_{\perp}))^2 + (\tilde{G}(\vec{k}_{0,0,3}; L_{\parallel}, L_{\perp}))^2}. \quad (4.11)$$

4.1.2 Lunghezza di correlazione

Una quantità di grande interesse è la *lunghezza di correlazione* ξ , definita dalla relazione:

$$\xi_{\perp,13} = \sqrt{\frac{1}{\sin^2(6\pi/L_{\perp}) - \sin^2(2\pi/L_{\perp})} \left(\frac{\chi_1}{\chi_3} - 1 \right)}. \quad (4.12)$$

4.2 Preparazione iniziale

Una caratteristica importante che distingue lo studio dei sistemi che hanno raggiunto l'equilibrio termodinamico o uno stato stazionario di non-equilibrio, dall'analisi della dinamica di un sistema in genere, giace nell'importanza, per questi ultimi, delle condizioni iniziali. Ricordiamo infatti che noi ci occupiamo, nel lavoro di tesi, di verificare se le analisi di teoria dei campi, svolte da JSLC, sono corrette anche per l'IDLG in 3D. Per far questo, dobbiamo tenere in conto che

- il nostro reticolo tridimensionale ha un grande numero di siti,
- l'esponente dinamico critico per il nostro sistema è $z = 4$,
- il noto fenomeno del rallentamento critico diverge con la taglia del reticolo,

quindi scegliamo di utilizzare lo Short-Time Scaling e dunque studiamo il sistema nella sua fase di rilassamento verso lo stato stazionario di non-equilibrio.

Da quanto detto risulta centrale il modo in cui venga preparato il sistema al tempo iniziale, questo risulta infatti cruciale per la buona riuscita dell'esperimento. Il modo corretto per preparare il sistema giace nel fissare la "magnetizzazione" a zero al tempo zero e precisamente facendo in modo tale che ogni striscia di spin parallela al campo abbia globalmente magnetizzazione nulla.

Per rendere il concetto più chiaro, possiamo scrivere la condizione nella forma:

$$\sum_{x_{\parallel}} s_{(x_{\parallel}, x_{\perp 1}, x_{\perp 2})} = 0 \quad \text{per tutte le} \quad x_{\perp 1} \in \{1, \dots, L_{\perp 1}\} \quad x_{\perp 2} \in \{1, \dots, L_{\perp 2}\}, \quad (4.13)$$

ed in particolare noi ci siamo ristretti a studiare geometrie tali per cui $L_{\perp 1} = L_{\perp 2}$ per ogni sistema in esame. In un certo senso è come preparare il sistema in modo fortemente perpendicolare al campo. Notiamo che una tale condizione deve essere vera in senso mesoscopico, e chiaramente non può essere soddisfatta in una visione

di tipo microscopico. Quello che conta è che le osservabili macroscopiche che utilizziamo, siano nulle al tempo nullo. Per soddisfare la condizione iniziale appena menzionata, e nel contempo realizzare delle configurazioni iniziali statisticamente indipendenti, utilizziamo la seguente strategia:

- prepariamo ogni striscia di spin parallela al campo in modo deterministico, per esempio fissando a zero la magnetizzazione globale della striscia assegnando ai siti pari spin di tipo “up”, ed ai siti dispari spin di tipo “down”;
- scelto un sito a caso, lo scambiamo con quello che si trova nella prima posizione della striscia in esame;
- seguiamo lo stesso procedimento svolto nel passo precedente, ma questa volta lo spin selezionato lo scambiamo con il secondo della linea;
- cicliamo l’algoritmo fino a che tutti gli spin della linea non siano stati sostituiti.

Questa procedura assicura che non sopravvivano correlazioni tra gli spin, sempre nelle limitazioni dovute all’utilizzo di un generatore di numeri pseudo-random.

A questo punto tutte le quantità trasverse risultano nulle al tempo nullo.

4.3 Multi-Spin-Coding

Per sistemi con una simmetria discreta, come il modello di Ising, è possibile utilizzare il Multi-Spin-Coding (MSC). Il punto centrale giace nel fatto che un solo bit è necessario per contenere l’informazione di un singolo spin, dunque un intero può contenere l’informazione di più spin allo stesso tempo. Basandosi su questo fatto, gli spin di Ising di 32 sistemi, possono essere contenuti in un singolo intero di una macchina a 32 bit. Lo spin flip Monte Carlo viene dunque eseguito attraverso operatori bit-a-bit, in modo tale da aggiornare simultaneamente 32 sistemi con una singola sequenza di numeri random. In questo modo il tempo computazionale richiesto per ottenere una buona statistica viene notevolmente ridotto.

Nel lavoro di tesi abbiamo quindi sviluppato un programma in C++, che modellasse un IDLG in 3D e, per ottenere più informazioni possibili, e dunque una migliore statistica senza perdere in tempo computazionale, abbiamo adottato la tecnica del Multi Spin Coding (MSC), ricavando l’esatta combinazione di operatori bit-a-bit che fosse adatto per la nostra dinamica e per il nostro sistema tridimensionale, accorgendoci poi di aver trovato un’espressione generale estendibile con facilità a dimensioni generiche.

Ora spiegheremo più nel dettaglio come si procede. Vengono scelti a caso un sito ed un suo primo vicino, sui quali viene eseguito uno XOR binario (che da ora in avanti indicheremo con il simbolo \wedge) al fine di registrare se i due siti sono del tipo occupato-occupato, vuoto-vuoto oppure vuoto-occupato.

Ecco come:

```
mask = spin[sito-uno] ^ spin[sito-due]
```

dove `mask` è un intero e `spin[.]` è un array che va a recuperare il sito in esame per tutti i 32 reticoli. Ora l'intero `mask` contiene l'informazione relativa alla configurazione del link originario per tutti i 32 sistemi.

Facciamo un semplice esempio per semplificare il discorso: supponiamo di avere tre reticoli (e non 32) e di registrare, relativamente ad un certo sito, su tutti e tre i reticoli, la presenza di uno spin di tipo “up” o di tipo “down”. Si abbia per il primo reticolo sul sito k -esimo la presenza di una pallina e negli altri due, sempre sul sito k -esimo, di una buca. Registriamo la configurazione con le coordinate binarie $(1, 0, 0)$, che equivalgono all'intero 5. Sia selezionata ora una direzione che identifichi il primo vicino che comporrà il link primario. Ora mettiamo che questo abbia tutte palline sul sito k -esimo, il che conduce alla $(1, 1, 1)$, ovvero all'intero 7. Operando uno XOR binario otteniamo $5 \wedge 7 = 4$, ovvero $(0, 1, 1)$, che ci permette di registrare con il singolo intero 4, il fatto che nei tre reticoli considerati, il link k -esimo con il suo vicino hanno link scambiabile solo nel secondo e terzo reticolo (la dinamica è di tipo Kawasaki).

Ora, ritornando al discorso generale, se la direzione selezionata è quella longitudinale al campo, allora lo scambio viene effettuato sempre (ovviamente in simultanea su tutti i 32 reticoli del link in esame) attraverso l'operazione bit-wise:

```
spin[sito-uno] & = ~mask;
spin[sito-due] | = mask.
```

Ricordiamo che l'operatore \sim inverte tutte le posizioni (è come un *not*), mentre $|$ corrisponde all'*OR*, sempre di tipo bit-wise. Bisogna fare attenzione a non confondere gli operatori bit-a-bit (che appunto operano sui singoli bit), con gli operatori logici, che solitamente vengono rappresentati con una duplicazione del simbolo ($\&\&$ corrisponde all'operatore logico *AND*, mentre il simbolo $\&$ corrisponde all'operatore bit-wise *AND*). Osserviamo che nella notazione del C++, la scrittura $A \hat{op} B$ è uno short-cut che intende $A = A \hat{op} B$. Sempre riprendendo il discorso generale, se la direzione è quella opposta al campo, lo scambio non avviene mai:

```
spin[sito-uno] | = mask;
spin[sito-due] & = ~mask.
```

Ricordiamo infatti che stiamo trattando L'Infinitely Driven Lattice Gas. Se invece la direzione dei link selezionati giace nello spazio trasverso al campo, si procede come segue. Si contano i link del tipo pieno-vuoto relativo ai primi vicini di uno dei due siti appartenenti al link primario e attraverso i vari j sopra definiti, indichiamo questi con (j_2, j_1, j_0) , in cui j_0 rappresenta le “unità” in binario, j_1 le “decine” in

binario e j_2 le “centinaia”, sempre in binario. Infatti, essendo noi su un reticolo ipercubico tridimensionale, abbiamo per ogni sito un numero di primi-vicini pari a 2D, dunque 6. Due siti avranno in totale 12 primi-vicini, ma se i due link sono, come nel nostro caso, essi stessi primi-vicini, allora il numero di primi-vicini globale del link diventa pari a 11. Visto che il link primario viene testato inizialmente, non rimane che mappare 10 link. Dunque prima ci occupiamo del link *uno* con i suoi primi-vicini, tolto quello originario e contiamo quanti vicini di segno opposto possiede. Al massimo ne avrà 5. Dunque in binario potremo avere le configurazioni:

$$(0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 0), (1, 0, 1).$$

La mappa è questa:

$$\begin{aligned} j_0 &= i_0 \wedge i_1 \wedge i_2 \wedge i_3 \wedge i_4 ; \\ j_1 &= (i_0 \& i_1) \wedge (i_0 \& i_2) \wedge (i_0 \& i_3) \wedge (i_0 \& i_4) \wedge (i_1 \& i_2) \wedge \\ &\quad \wedge (i_1 \& i_3) \wedge (i_1 \& i_4) \wedge (i_2 \& i_4) \wedge (i_2 \& i_3) \wedge (i_3 \& i_4) ; \\ j_2 &= (i_0 \& i_1 \& i_2 \& i_3) \wedge (i_1 \& i_2 \& i_3 \& i_4) \wedge (i_2 \& i_3 \& i_4 \& i_0) \wedge \\ &\quad \wedge (i_3 \& i_4 \& i_0 \& i_1) \wedge (i_4 \& i_0 \& i_1 \& i_2). \end{aligned} \quad (4.14)$$

A questo punto facciamo lo stesso per il link 2 ottenendo (j'_2, j'_1, j'_0) . Dunque sommiamo i due risultati ottenuti, e sempre in binario otteniamo: $(\sigma_3, \sigma_2, \sigma_1, \sigma_0)$, dove questa volta, svolgendo la somma, compare correttamente un contatore in più, che tiene conto delle “centinaia”, in binario, date da σ_3 . La somma ottenuta ci dice dunque quanti primi-vicini globalmente sono di tipo pieno-vuoto e questo ci permette di calcolare quanto sia favorevole o sfavorevole lo scambio nel link primario. Ecco la mappa:

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= j_0 \wedge j'_0 ; \\ \sigma_1 &= (\sigma_1 \wedge \sigma'_1) \wedge (\sigma_0 \& \sigma'_0) ; \\ \sigma_2 &= (j_2 \wedge j'_2) \wedge ((j_1 \wedge j'_1) \& (j_0 \& j'_0)) \wedge (j_1 \& j'_1) ; \\ \sigma_3 &= (j_2 \& j'_2) \wedge ((j_2 \wedge j'_2) \& (j_1 \& j'_1) \& (j_0 \& j'_0)) \wedge \\ &\quad \wedge ((j_2 \wedge j'_2) \& (j_1 \& j'_1)). \end{aligned} \quad (4.15)$$

A questo punto sappiamo cosa comporti energeticamente uno scambio del link nella energia configurazionale del sistema.

Ora lanciamo un dado, che chiamiamo per comodità *rng* e facciamo l'ultimo test. A prescindere dal numero causale estratto, se il numero globale di link differenti della configurazione iniziale è maggiore o uguale a cinque, allora σ_3 sarà un uno e dunque il salto avverrà sempre, infatti avremo sempre un $\Delta\mathcal{H} < 0$. In caso contrario, cioè se il numero di link diversi è da quattro a zero, il salto energetico nello scambio risulterà sempre più sfavorito e dunque l'*rng* verrà confrontato con il peso di Gibbs (Metropolis) nel seguente modo:

```

if(rng ≥ e-4β) aux = (σ3 | (σ2 & (σ1 | σ0))) & mask;
if(rng ≥ e-8β) aux = (σ3 | σ2) & mask;
if(rng ≥ e-12β) aux = (σ3 | σ2 | (σ1 & σ0)) & mask;
if(rng ≥ e-16β) aux = (σ3 | σ2 | σ1) & mask;
if(rng ≥ e-20β) aux = (σ3 | σ2 | σ1 | σ0) & mask;
else aux = mask;
spin[sito-uno] ∧ = aux;
spin[sito-due] ∧ = aux.

```

Il test “else aux = mask”, tiene conto del fatto che può avvenire anche un salto estremamente sfavorevole energeticamente, con probabilità molto bassa. Mentre il test “spin[sito-uno] ∧ = aux” combinato con “spin[sito-due] ∧ = aux”, opera lo scambio del link solo sui reticoli, tra i 32 in esame, che soddisfano alle condizioni richieste.

Notiamo che il test bit-wise “& mask”, permette, a prescindere dal risultato ottenuto nel test successivo, di far valere il risultato solo per i reticoli che hanno i due link di partenza nella configurazione up-down (pieno-vuoto) e questo rispetta la dinamica Kawasaki. Nel dettaglio avviene che se nella “colonna” dei 32 bit, ad una certa altezza è presente un uno, per il sistema corrispondente vorrà dire che si è in presenza di un link primario vuoto-pieno e nulla viene annullato; se invece è presente uno zero, l’operazione globale condurrà sempre ad uno zero, qualunque altro risultato si sia raggiunto fino a quel momento.

È interessante notare la simmetria esistente tra le variabili j sopra definite e la notazione dei numeri in base due. Un generico numero può venire scritto in rappresentazione binaria attraverso la notazione:

$$(\dots, 2^n, 2^{n-1}, \dots, 2^4, 2^3, 2^2, 2^1, 2^0).$$

Notiamo come le j sopra definite, siano in corrispondenza con questa scrittura. Infatti, prendiamo il nostro caso e sia ($2^2 = 4, 2^1 = 2, 2^0 = 1$) con (j_2, j_1, j_0). Si ha che j_2 è in relazione con la base $2^2 = 4$ ed infatti viene rappresentata con la scrittura di *quattro* operatori opportunamente permutati attraverso l’operatore bit-wise & e più esplicitamente: $j_2 = (\cdot \& \cdot \& \cdot \& \cdot) \wedge \dots$

Andando avanti vediamo come j_1 sia invece in relazione con la base $2^1 = 2$, infatti viene rappresentata con la combinazione di *due* operatori opportunamente permutati come sopra: $j_1 = (\cdot \& \cdot) \wedge \dots$

Lo stesso discorso vale per j_0 , rispetto a $2^0 = 1$, dove: $j_0 = (\cdot) \wedge \dots$

Quindi, nel caso generale possiamo attenderci che valga la relazione:

$$j_n = \underbrace{(\cdot \& \cdot \& \cdot \& \dots \& \cdot \& \cdot \& \cdot)}_{n\text{-volte}} \wedge \dots$$

Individuate le j_n , il resto segue di conseguenza.

Capitolo 5

Evoluzione delle osservabili

Tocchiamo ora con mano come, effettivamente, il sistema rilassi verso lo stato stazionario di non-equilibrio.

Di seguito mostriamo i grafici delle evoluzioni temporali, relativamente alle osservabili da noi implementate.

Per indagare il modello con maggiore dettaglio, plottiamo i vari andamenti sia in scala lineare, sia in scala logaritmica.

Facciamo presente che i dati sono stati ottenuti mediando su 448 sistemi e che la dinamica riguarda i tempi dal rilassamento fino al Monte Carlo step numero 20.000, campionando ogni singolo tempo.

Facciamo qualche rapida osservazione, per poi passare all'analisi dati.

Se guardiamo il grafico della suscettività terzo momento (Figura 5.5), riusciamo ad individuare molto chiaramente la regione lineare in cui è presente il “critical initial slip”. Notiamo come intorno al tempo 148, tutte le geometrie implementate si trovino nella regione lineare.

Guardando invece il plot relativo alla lunghezza di correlazione al quadrato in scala logaritmica (Figura 5.8), possiamo notare molto nettamente il cambio di comportamento, dalla regione critica ad una primordiale auto-organizzazione, in cui la lunghezza di correlazione comincia a crescere. Essa, come previsto dalla (3.20) e mostrato nella Figura 5.7, ha un valore iniziale negativo, per poi risalire verso la zona positiva, una volta superati i tempi molto brevi. Notiamo che la regione caratterizzata dal comportamento universale del modello, si trova nel solo “critical initial slip” che, come confermeremo tra breve, è in stretta relazione con le dimensioni reticolari.

Non deve invece stupire che la magnetizzazione e la suscettività primo momento, non forniscano indicazioni così nette circa la regione universale, infatti siamo in una zona temporale ancora troppo piccola per osservare un cross-over e questo è ben previsto dalle leggi (3.17), (3.18), (3.19) e (3.20).

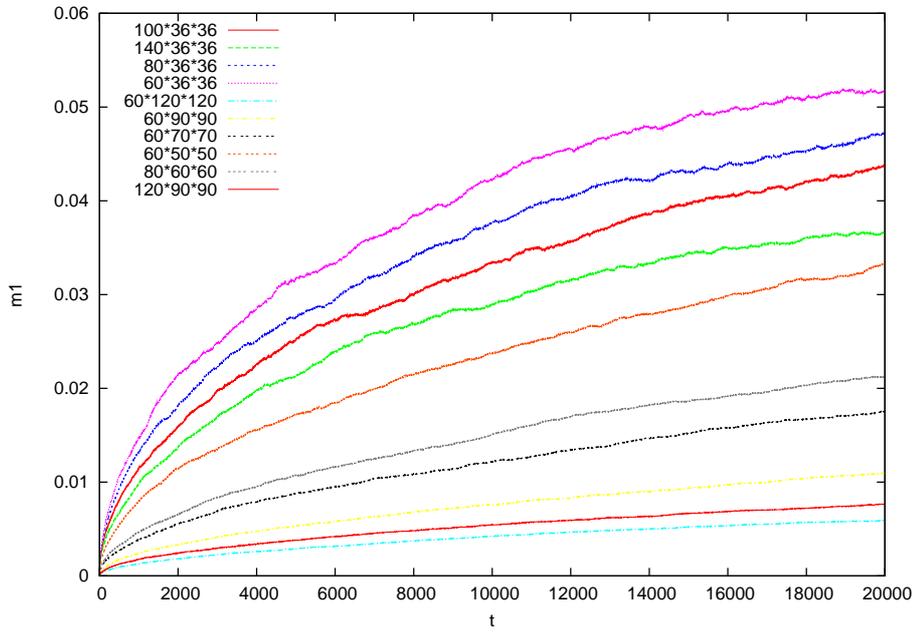


Figura 5.1: Andamento di tempo breve per la magnetizzazione, in scala lineare.

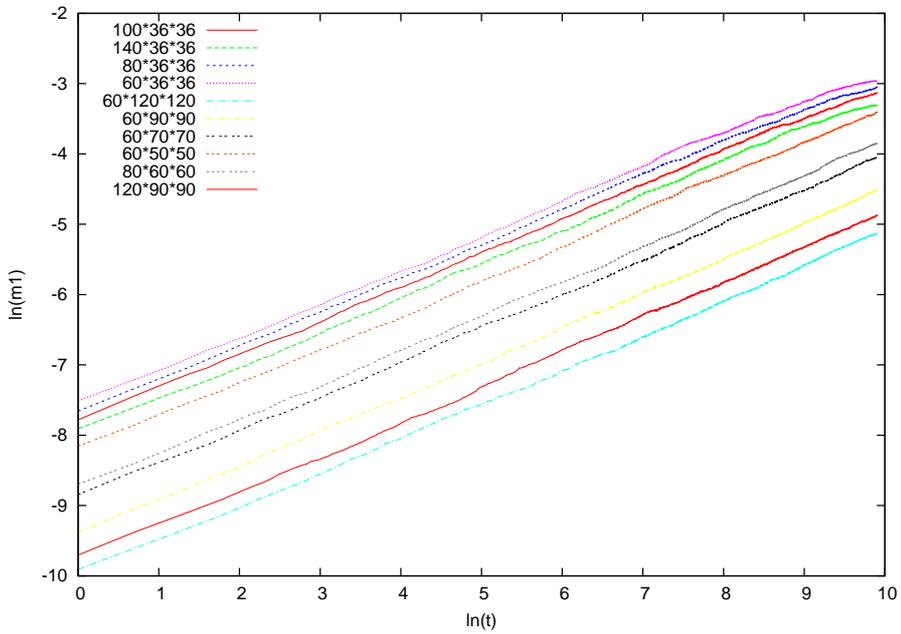


Figura 5.2: Andamento di tempo breve per la magnetizzazione, in scala logaritmica.

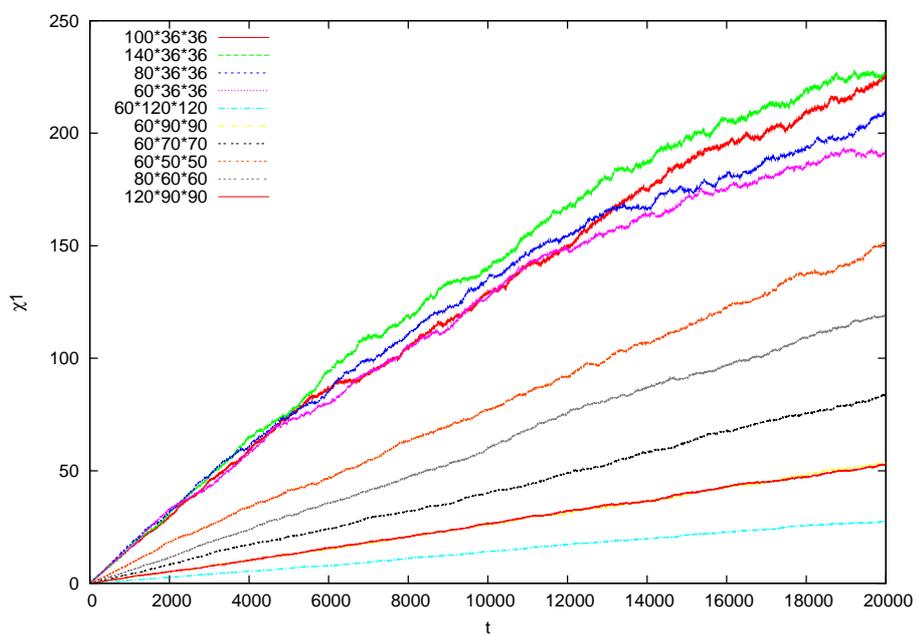


Figura 5.3: Andamento di tempo breve per la suscettività primo momento, in scala lineare.

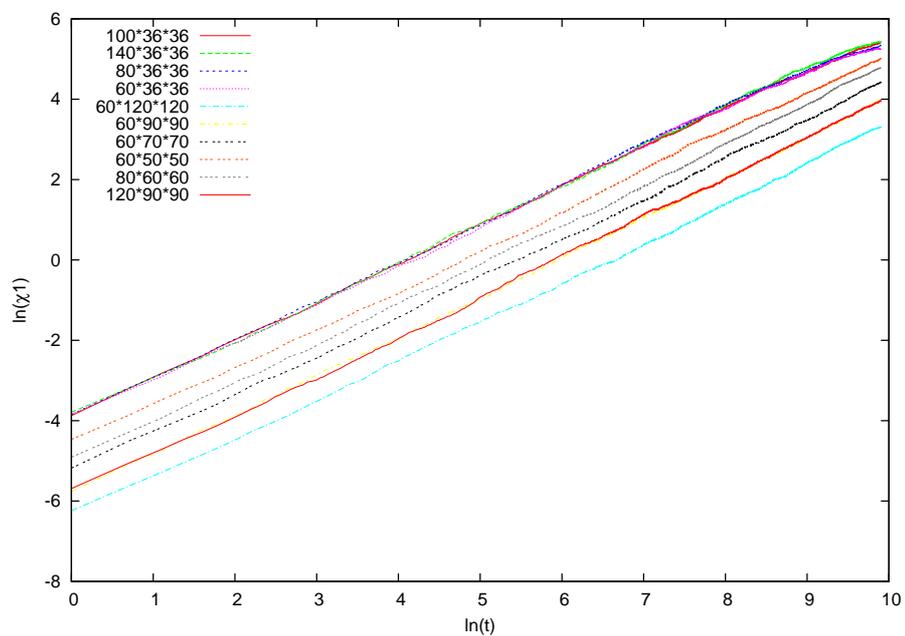


Figura 5.4: Andamento di tempo breve per la suscettività primo momento, in scala logaritmica.

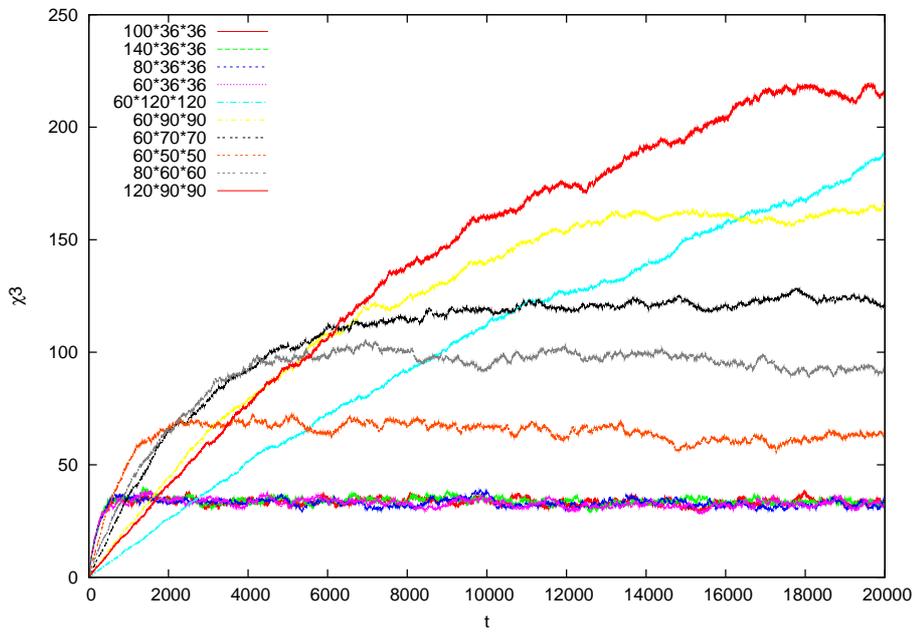


Figura 5.5: Andamento di tempo breve per la suscettività terzo momento, in scala lineare.

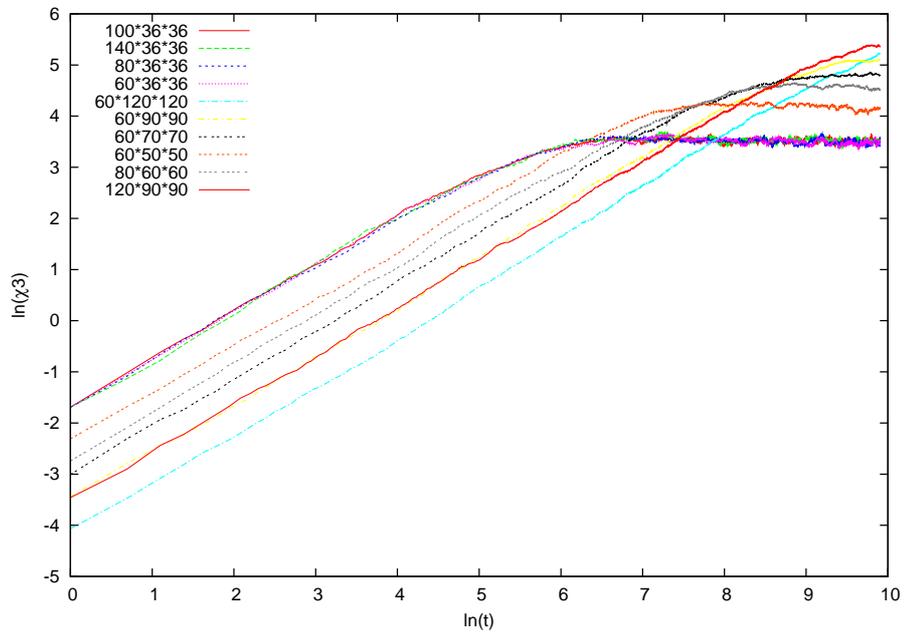


Figura 5.6: Andamento di tempo breve per la suscettività terzo momento in scala, logaritmica.

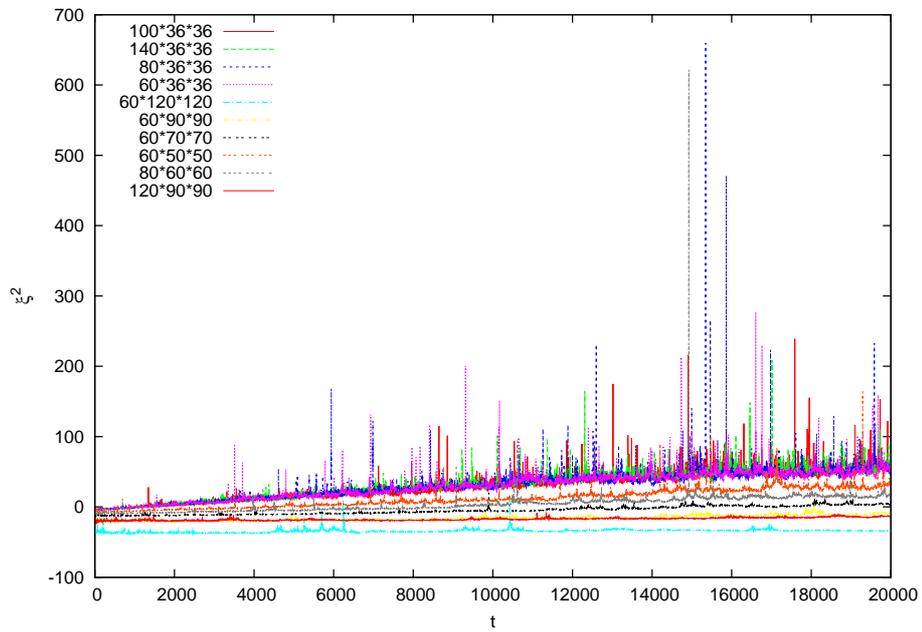


Figura 5.7: Andamento di tempo breve per la lunghezza di correlazione al quadrato, in scala lineare.

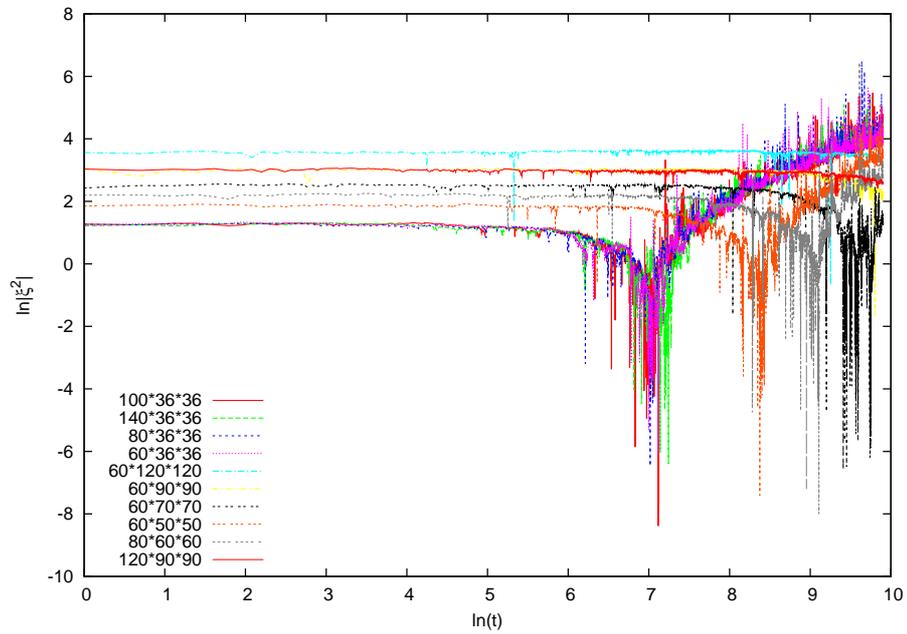


Figura 5.8: Andamento di tempo breve per il modulo della lunghezza di correlazione al quadrato, in scala logaritmica.

Capitolo 6

Conclusioni

6.1 Teoria vs esperimento

Una volta specificato ciò che ci attendiamo dalle previsioni di campo medio e dal finite-size scaling dinamico, possiamo vedere se i risultati che otteniamo nelle simulazioni si accordano con le previsioni di JSLC.

Ora vogliamo ricavare, attraverso i dati ottenuti nel nostro studio numerico, i valori degli esponenti dinamici con cui crescono le osservabili di interesse ed anche come le stesse scalino al variare delle dimensioni reticolari.

Iniziamo con la “magnetizzazione”, per la quale abbiamo visto valere la relazione

$$m^2 = \frac{\pi\chi}{4L_{\parallel}L_{\perp}^2\sqrt{2}} \sim \frac{2\lambda\pi^3 t}{L_{\parallel}L_{\perp}^4}. \quad (6.1)$$

Poniamo dapprima

$$m = \sqrt{\frac{A}{L_{\parallel}L_{\perp}^4}} t^{\frac{1}{2}}. \quad (6.2)$$

Dobbiamo verificare se le attese teoriche si sposano bene con i nostri valori, dunque per ora porremo il tutto nella forma più generale

$$m = \sqrt{\frac{A}{L_{\parallel}^{\alpha}L_{\perp}^{\beta}}} t^{\gamma}, \quad (6.3)$$

dove i nomi utilizzati per gli esponenti sono di pura fantasia.

Noi abbiamo un set di valori $\{t_k, m_k\}_k$, in cui i vari t_k sono gli step Monte Carlo della regione critica e gli m_k sono i valori che l’osservabile magnetizzazione assume nei relativi istanti. Abbiamo fittato i dati delle simulazioni, per poi ricavare il comportamento universale del modello, durante il solo “critical initial slip” e nella

L_{\parallel}	L_{\perp}	γ	errore	errore %	$\ln \sqrt{\frac{A}{L_{\parallel}^{\alpha} L_{\perp}^{\beta}}}$	errore	errore %
100	36	0.482194	+/- 0.001218	0.2526	-7.82157	+/- 0.005076	0.0649
140	36	0.498306	+/- 0.001387	0.2783	-8.04027	+/- 0.005765	0.07171
80	36	0.475855	+/- 0.0009958	0.2093	-7.67219	+/- 0.004132	0.05386
60	36	0.470245	+/- 0.00102	0.217	-7.55628	+/- 0.004241	0.05613
60	120	0.496691	+/- 0.001032	0.2078	-10.026	+/- 0.004281	0.0427
60	90	0.479636	+/- 0.0007645	0.1594	-9.38879	+/- 0.003183	0.0339
60	70	0.500239	+/- 0.001397	0.2794	-8.95334	+/- 0.005807	0.06486
60	50	0.481329	+/- 0.001679	0.3489	-8.23534	+/- 0.006987	0.08484
80	60	0.492597	+/- 0.0009548	0.1938	-8.76777	+/- 0.003974	0.04533
120	90	0.486957	+/- 0.001504	0.3088	-9.78718	+/- 0.006247	0.06383
100	36	0.5			-7.89425	+/- 0.001611	0.0204
140	36	0.5			-8.04717	+/- 0.001163	0.01445
80	36	0.5			-7.77027	+/- 0.001895	0.02438
60	36	0.5			-7.67739	+/- 0.002253	0.02934
60	120	0.5			-10.0394	+/- 0.0009043	0.009008
60	90	0.5			-9.47182	+/- 0.001565	0.01652
60	70	0.5			-8.95237	+/- 0.001179	0.01316
60	50	0.5			-8.31143	+/- 0.001913	0.02302
80	60	0.5			-8.79796	+/- 0.000948	0.01078
120	90	0.5			-9.84024	+/- 0.001553	0.01578

Tabella 6.1: Risultati del fit lineare, con esponente libero e fissato, relativo all'andamento di tempo breve per la "magnetizzazione".

fase comune a tutte le geometrie. Questo intervallo, come risulterà più chiaro tra breve, è legato a come scalano le osservabili in funzione della dimensione reticolare.

Ritornando alla magnetizzazione, vogliamo trovare A, α, β e γ .

Dapprima cerchiamo la costante $\sqrt{\frac{A}{L_{\parallel}^{\alpha} L_{\perp}^{\beta}}}$ e l'esponente γ . Mettendo tutto in forma logaritmica abbiamo che

$$\ln m = \ln \sqrt{\frac{A}{L_{\parallel}^{\alpha} L_{\perp}^{\beta}}} + \gamma \ln t. \quad (6.4)$$

Fittando linearmente la retta trovata attraverso i dati $\{\ln(t_k), \ln(m_k)\}_k$, che pesiamo con gli errori associati alle misure, otteniamo i valori cercati. I fit sono ottenuti sia lasciando liberi i parametri, sia fissando l'esponente legato al tempo, al valore teorico atteso (che poi risulta molto prossimo a quello indicato dalla simulazione). I risultati sono riportati in tabella 6.1.

Ora vogliamo trovare α, β ed A e per far questo notiamo che

parametro	valore	errore assoluto	errore %
$\ln\sqrt{A}$	2.05287	+/- 0.2262	11.02
$\alpha/2$	0.555235	+/- 0.03929	7.077
$\beta/2$	2.04399	+/- 0.02336	1.143

Tabella 6.2: Fit libero per lo scaling della “magnetizzazione”.

parametro	valore	errore assoluto	errore %
$\ln\sqrt{A}$	1.57142	+/- 0.1286	8.186
$\alpha/2$	0.4986	+/- 0.01984	3.978
$\beta/2$	1.99962	+/- 0.01379	0.6897

Tabella 6.3: Fit con parametro fissato per lo scaling della “magnetizzazione”.

$$\ln \sqrt{\frac{A}{L_{\parallel}^{\alpha} L_{\perp}^{\beta}}} = \ln \sqrt{A} - \frac{1}{2} \ln L_{\parallel}^{\alpha} - \frac{1}{2} \ln L_{\perp}^{\beta}. \quad (6.5)$$

Quindi fittando la curva precedente attraverso i valori $\left\{ \ln \left(\sqrt{\frac{A}{L_{\parallel}^{\alpha} L_{\perp}^{\beta}}} \right), \ln L_{\parallel}, \ln L_{\perp} \right\}$, per ogni geometria utilizzata, ricaviamo $\ln\sqrt{A}$, $\alpha/2$ e $\beta/2$. Osserviamo che precedentemente abbiamo ottenuto $\ln \left(\sqrt{\frac{A}{L_{\parallel}^{\alpha} L_{\perp}^{\beta}}} \right)$, sia fissando l'esponente dinamico, sia lasciandolo libero; avremo dunque, anche per questo fit, due risultati, associati a quale valore decidiamo di inserire.

I valori trovati sono elencati nelle tabelle 6.2 e 6.3.

Seguiamo ora la medesima procedura per le altre osservabili, considerando dapprima la suscettività. Come abbiamo visto, dalla teoria ci aspettiamo che

$$G\left(\frac{2\pi n}{L}, t\right) \sim Z L^2 2\lambda \frac{t}{L^4} 4\pi^2 n^2. \quad (6.6)$$

Per semplicità poniamo

$$\chi_1 \equiv G\left(\frac{2\pi}{L_{\perp}}, t\right) = \frac{B}{L_{\perp}^2} t, \quad (6.7)$$

e similmente

$$\chi_3 \equiv G\left(\frac{6\pi}{L_{\perp}}, t\right) = \frac{B'}{L_{\perp}^2} t, \quad (6.8)$$

dove si prevede che $B' = 9B$.

Poichè le simulazioni, ovviamente, non sono al corrente delle nostre teorie, come già fatto per la “magnetizzazione”, poniamo la legge nella forma generale

$$\chi_1 = \frac{B}{L_{\perp}^e L_{\parallel}^f} t^g, \quad (6.9)$$

L_{\parallel}	L_{\perp}	g	errore	errore %	$\ln \frac{B}{L_{\parallel}^e L_{\perp}^f}$	errore	errore %
100	36	0.969617	+/- 0.002285	0.2357	-3.96856	+/- 0.009524	0.24
140	36	0.997009	+/- 0.002729	0.2738	-4.05409	+/- 0.01134	0.2798
80	36	0.943905	+/- 0.001915	0.2029	-3.86205	+/- 0.00793	0.2053
60	36	0.937549	+/- 0.002084	0.2223	-3.92642	+/- 0.008668	0.2207
60	120	0.987735	+/- 0.001903	0.1927	-6.45455	+/- 0.007876	0.122
60	90	0.963041	+/- 0.001598	0.166	-5.77766	+/- 0.00666	0.1153
60	70	1.00195	+/- 0.003136	0.313	-5.40754	+/- 0.01304	0.2412
60	50	0.960402	+/- 0.003055	0.3181	-4.63315	+/- 0.01272	0.2745
80	60	0.988399	+/- 0.002037	0.2061	-5.05195	+/- 0.008474	0.1677
120	90	0.96928	+/- 0.002446	0.2524	-5.85042	+/- 0.01016	0.1736
100	36	1			-4.09255	+/- 0.002873	0.0702
140	36	1			-4.06626	+/- 0.00228	0.05607
80	36	1			-4.08937	+/- 0.004292	0.105
60	36	1			-4.18074	+/- 0.004707	0.1126
60	120	1			-6.50421	+/- 0.001851	0.02845
60	90	1			-5.92847	+/- 0.002911	0.0491
60	70	1			-5.39962	+/- 0.002649	0.04905
60	50	1			-4.79465	+/- 0.003745	0.07811
80	60	1			-5.09921	+/- 0.001885	0.03696
120	90	1			-5.9753	+/- 0.002976	0.0498

Tabella 6.4: Risultati del fit lineare, con esponente libero e fissato, relativo all'andamento di tempo breve per la suscettività primo momento.

ed analogamente facciamo per χ_3 . Nuovamente forniamo il set di valori $\{t_k, \chi_{1k}\}_k$, dove ricordiamo che i vari t_k si riferiscono agli step Monte Carlo del "critical initial slip" ed i χ_{1k} sono i valori che l'osservabile χ_1 assume nei relativi istanti. Vogliamo trovare i parametri B , e , f e g .

Attraverso l'espressione in forma logaritmica

$$\ln \chi_1 = \ln \frac{B}{L_{\parallel}^e L_{\perp}^f} + g \ln t, \quad (6.10)$$

e sfruttando i valori $\{\ln t_k, \ln \chi_{1k}\}_k$, fittiamo linearmente ottenendo le quantità $\ln \frac{B}{L_{\parallel}^e L_{\perp}^f}$ e g . Queste si possono osservare nella tabella 6.4.

Ora sviluppiamo la semplice espressione

$$\ln \frac{B}{L_{\parallel}^e L_{\perp}^f} = \ln B - e \ln L_{\parallel} - f \ln L_{\perp}, \quad (6.11)$$

che possiamo fittare sfruttando l'insieme di valori $\{\ln L_{\parallel}, \ln L_{\perp}, \ln \frac{B}{L_{\parallel}^e L_{\perp}^f}\}$ rela-

parametro	valore	errore assoluto	errore %
lnB	3.96978	+/- 0.4236	10.67
e	0.0963232	+/- 0.07417	77
f	2.08918	+/- 0.04465	2.137

Tabella 6.5: Risultati del fit libero per lo scaling della suscettività primo momento.

parametro	valore	errore assoluto	errore %
lnB	3.04656	+/- 0.2601	8.537
e	0.010751	+/- 0.03983	370.5
f	2.00486	+/- 0.0279	1.391

Tabella 6.6: Risultati del fit con parametro fissato per lo scaling della suscettività primo momento.

tivi alle varie geometrie implementate, ottenendo i parametri $\ln B$, $-e$ e $-f$, che possiamo osservare nelle tabelle 6.5 e 6.6.

I valori che si ottengono per χ_3 si vedono invece nelle tabelle 6.7, 6.8 e 6.9.

Notiamo come la costante B' risulti nelle giuste proporzioni con B , difatti si vede che $\ln B' \simeq \ln 9 + \ln B$.

Rivolgiamo infine la nostra attenzione alla lunghezza di correlazione che, per tempi brevi, ci aspettiamo risulti ben approssimata dall'espressione

$$\xi^2 = \frac{L^2}{32\pi^2} \left[\frac{G(\frac{2\pi}{L}, t)}{G(\frac{6\pi}{L}, t)} - 1 \right] \sim -\frac{L^2}{36\pi^2} + L^2 \frac{5}{9} 2\lambda \frac{t}{L^4} 4\pi^2. \quad (6.12)$$

Dunque per semplicità, similmente a quanto fatto per le altre osservabili, poniamo

$$\xi^2 \equiv |C| L_{\parallel}^u L_{\perp}^s t^v. \quad (6.13)$$

Abbiamo i dati $\{t_k, m_k\}_k$ e dobbiamo ricavare $|C|$, s , v ed u . Mettiamo la nostra espressione in forma logaritmica ottenendo

$$\ln \xi^2 = \ln(|C| L_{\parallel}^u L_{\perp}^s) + v \ln t \quad (6.14)$$

e da qui utilizzando come al solito i dati $\{\ln t_k, \ln \xi_k^2\}_k$, tramite fit lineare, ricaviamo $\ln(|C| L_{\parallel}^u L_{\perp}^s)$ e v . I risultati sono elencati nella tabella 6.10.

Ora vogliamo gli esponenti relativi alla geometria, dunque sviluppando si ha

$$\ln(|C| L_{\parallel}^u L_{\perp}^s) = \ln|C| + u \ln L_{\parallel} + s \ln L_{\perp}. \quad (6.15)$$

Utilizziamo il set di valori $\{\ln L_{\parallel}, \ln L_{\perp}, \ln(|C| L_{\parallel}^u L_{\perp}^s)\}$, relativamente ad ogni geometria simulata e, fittando la curva, troviamo $\ln|C|$, u ed s . I risultati sono elencati nelle tabelle 6.12 e 6.11.

L_{\parallel}	L_{\perp}	g'	errore	errore %	$\ln \frac{B'}{L_{\parallel}^e L_{\perp}^f}$	errore	errore %
100	36	0.890867	+/- 0.00365	0.4097	-1.55584	+/- 0.01517	0.9747
140	36	0.877315	+/- 0.004934	0.5624	-1.52828	+/- 0.02051	1.342
80	36	0.875816	+/- 0.002747	0.3137	-1.56011	+/- 0.01146	0.7345
60	36	0.868296	+/- 0.005733	0.6603	-1.50043	+/- 0.02387	1.591
60	120	0.972502	+/- 0.003585	0.3687	-4.25427	+/- 0.01485	0.3491
60	90	0.973669	+/- 0.003106	0.319	-3.64386	+/- 0.01293	0.3548
60	70	0.955873	+/- 0.001612	0.1687	-3.06593	+/- 0.006703	0.2186
60	50	0.962869	+/- 0.003965	0.4118	-2.47735	+/- 0.01642	0.6627
80	60	0.966957	+/- 0.002872	0.297	-2.78812	+/- 0.01193	0.428
120	90	0.956017	+/- 0.00227	0.2375	-3.56266	+/- 0.009477	0.266
100	36	1			-1.99972	+/- 0.008309	0.4155
140	36	1			-2.02771	+/- 0.009504	0.4687
80	36	1			-2.06778	+/- 0.008859	0.4284
60	36	1			-2.03753	+/- 0.01034	0.5077
60	120	1			-4.36581	+/- 0.003565	0.08166
60	90	1			-3.75111	+/- 0.00325	0.08664
60	70	1			-3.24561	+/- 0.003363	0.1036
60	50	1			-2.62789	+/- 0.004219	0.1605
80	60	1			-2.92241	+/- 0.003432	0.1174
120	90	1			-3.74252	+/- 0.003612	0.0965

Tabella 6.7: Risultati del fit lineare, con esponente libero e fissato, relativo all'andamento di tempo breve per la suscettività terzo momento.

parametro	valore	errore assoluto	errore %
$\ln B'$	5.88663	+/- 0.3549	6.029
e'	0.0994163	+/- 0.06116	61.52
f'	2.20735	+/- 0.04731	2.143

Tabella 6.8: Risultati del fit libero per lo scaling della suscettività terzo momento.

parametro	valore	errore assoluto	errore %
$\ln B'$	4.90467	+/- 0.2847	5.805
e'	0.0216986	+/- 0.04847	223.4
f'	1.94548	+/- 0.03808	1.957

Tabella 6.9: Risultati del fit con parametro fissato per lo scaling della suscettività terzo momento.

L_{\parallel}	L_{\perp}	v	errore	errore %	$\ln(C L_{\parallel}^u L_{\perp}^s)$	errore	errore %
100	36	-0.0746283	+/- 0.008652	11.59	1.50859	+/- 0.03752	2.487
140	36	-0.0635057	+/- 0.006088	9.587	1.44788	+/- 0.0261	1.803
80	36	-0.0783951	+/- 0.009621	12.27	1.49553	+/- 0.04163	2.784
60	36	-0.0377385	+/- 0.003756	9.953	1.37832	+/- 0.016	1.161
60	120	0.00228576	+/- 0.00862	377.1	3.52525	+/- 0.03569	1.012
60	90	0.145161	+/- 0.01457	10.04	2.33965	+/- 0.0554	2.368
60	70	-0.0228685	+/- 0.005862	25.63	2.57542	+/- 0.02468	0.9584
60	50	0.00577945	+/- 0.003138	54.3	1.84099	+/- 0.01298	0.7051
80	60	0.00852781	+/- 0.002909	34.11	2.17318	+/- 0.01204	0.5539
120	90	-0.0162929	+/- 0.002923	17.94	3.05919	+/- 0.01242	0.4059
100	36	0			1.19113	+/- 0.00896	0.7522
140	36	0			1.18004	+/- 0.00618	0.5237
80	36	0			1.16182	+/- 0.008982	0.7731
60	36	0			1.22021	+/- 0.003751	0.3074
60	120	0			3.5345	+/- 0.007408	0.2096
60	90	0			2.8754	+/- 0.01722	0.5988
60	70	0			2.48087	+/- 0.004887	0.197
60	50	0			1.86443	+/- 0.002591	0.139
80	60	0			2.20762	+/- 0.002688	0.1218
120	90	0			2.9913	+/- 0.002655	0.08876

Tabella 6.10: Risultati del fit lineare, con esponente libero e fissato, relativo all'andamento di tempo breve per la lunghezza di correlazione al quadrato.

parametro	valore	errore assoluto	errore %
$\ln C $	-5.68841	+/- 0.5339	9.386
u	0.213428	+/- 0.1208	56.62
s	1.70957	+/- 0.1051	6.148

Tabella 6.11: Risultati del fit libero per lo scaling della lunghezza di correlazione al quadrato.

parametro	valore	errore assoluto	errore %
$\ln C $	-5.68287	+/- 0.09689	1.705
u	-0.0161812	+/- 0.02235	138.2
s	1.94352	+/- 0.01988	1.023

Tabella 6.12: Risultati del fit con parametro fissato per lo scaling della lunghezza di correlazione al quadrato.

parametro	valore	errore assoluto	errore %
$\ln\sqrt{A}$	1.57943	+/- 0.06096	3.86
δ	1.00003	+/- 0.005781	0.5781

Tabella 6.13: Risultati del fit lineare ottenuti combinando l'intercetta trovata e lo scaling teorico atteso per la "magnetizzazione".

parametro	valore	errore assoluto	errore %
$\ln B$	3.11197	+/- 0.08886	2.856
δ'	1.00464	+/- 0.01062	1.057

Tabella 6.14: Risultati del fit lineare ottenuti combinando l'intercetta trovata e lo scaling teorico atteso per la suscettività primo momento.

Per indagare ulteriormente la bontà dei nostri dati, facciamo un fit lineare utilizzando sia i valori che abbiamo ottenuto, sia lo scaling teorico atteso. Precisamente, rivolgendoci dapprima alla "magnetizzazione", abbiamo

$$\ln\sqrt{\frac{A}{L_{\parallel}^{\alpha}L_{\perp}^{\beta}}} = \ln\sqrt{A} - \delta\ln\sqrt{L_{\parallel}L_{\perp}^4}, \quad (6.16)$$

dove ci aspettiamo che $\delta = 1$; i valori ottenuti per δ e $\ln\sqrt{A}$ sono esposti nella tabella 6.13.

Se rappresentiamo graficamente i punti di coordinate $\left(\ln\sqrt{L_{\parallel}L_{\perp}^4}, \ln\sqrt{\frac{A}{L_{\parallel}^{\alpha}L_{\perp}^{\beta}}}\right)$, assieme alla retta che otteniamo fissando intercetta e pendenza angolare con i valori appena ricavati dal fit, si manifesta anche visivamente l'accordo tra la teoria e l'esperimento. La figura di riferimento è la 6.1.

Ora facciamo lo stesso per la suscettività, primo e terzo momento. Abbiamo quindi:

$$\ln\frac{B}{L_{\parallel}^e L_{\perp}^f} = \ln B - \delta' \ln L_{\perp}^2, \quad (6.17)$$

dove ci aspettiamo che $\delta' = 1$ e similmente per il terzo momento, in cui compariranno B' e δ'' .

I valori ricavati si trovano nelle tabelle 6.14 ed 6.15.

parametro	valore	errore assoluto	errore %
$\ln B$	5.0096	+/- 0.1534	3.061
δ''	0.974147	+/- 0.01782	1.829

Tabella 6.15: Risultati del fit lineare ottenuti combinando l'intercetta trovata e lo scaling teorico atteso per la suscettività terzo momento.

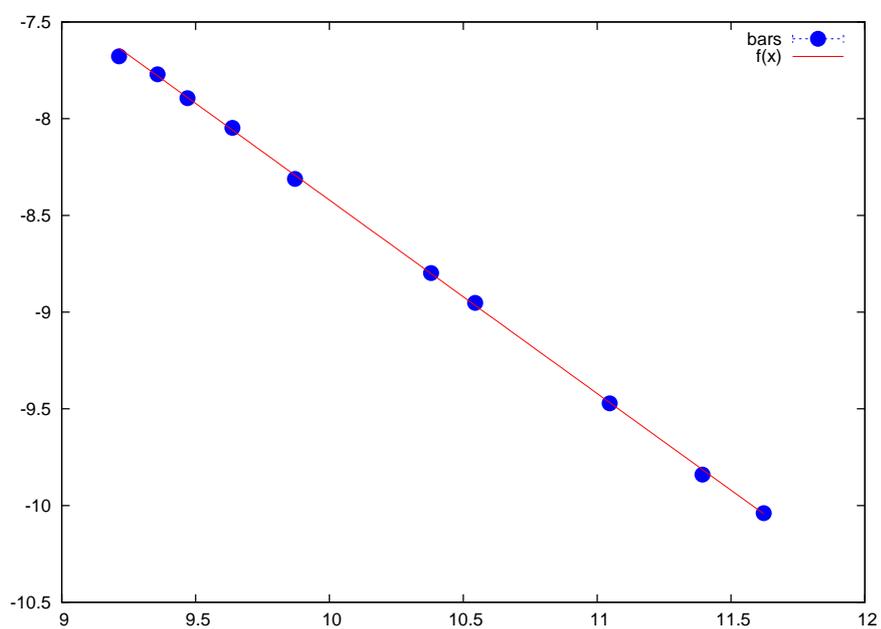


Figura 6.1: Accordo tra lo scaling atteso per la magnetizzazione ed i valori ottenuti tramite la simulazione.

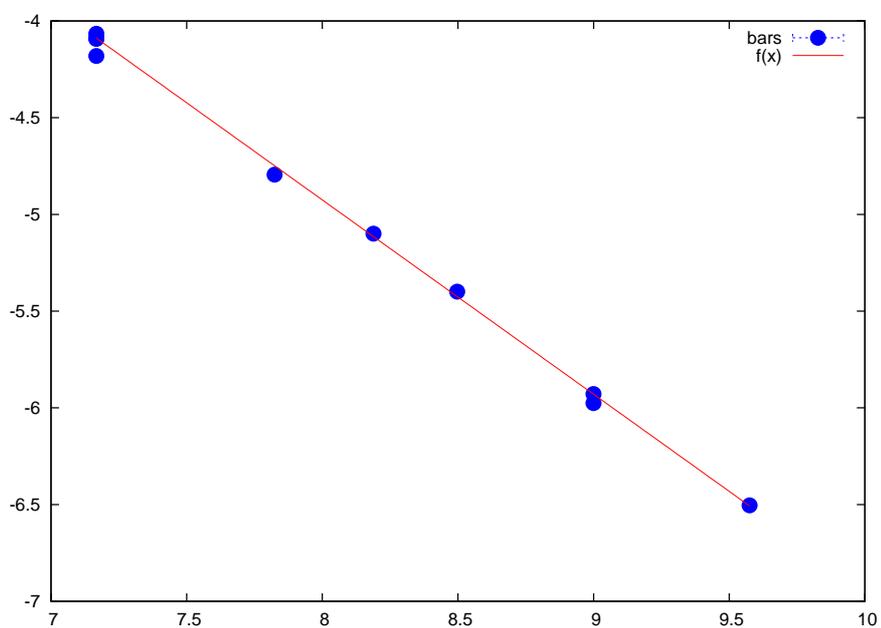


Figura 6.2: Accordo tra lo scaling atteso per la suscettività primo momento ed i valori ottenuti tramite la simulazione.

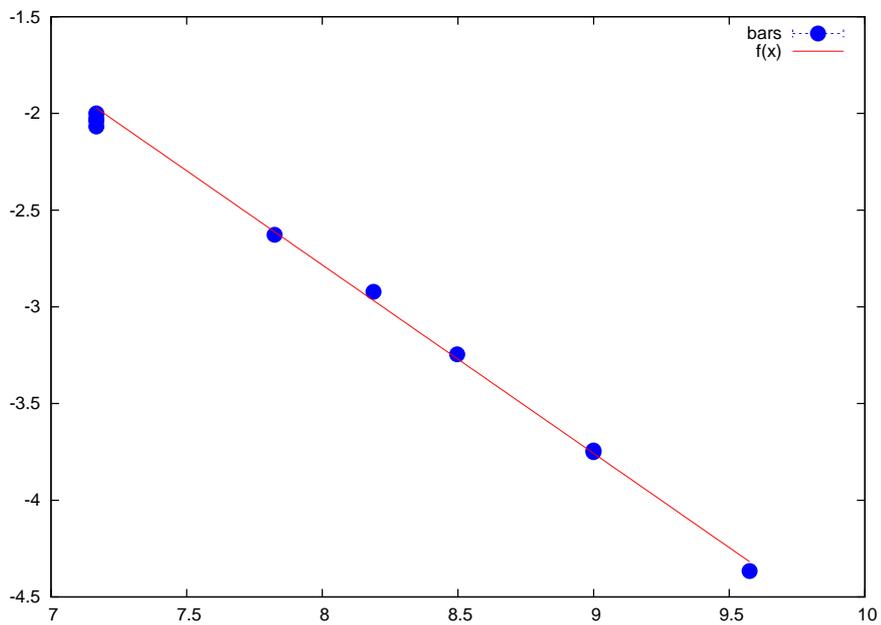


Figura 6.3: Accordo tra lo scaling atteso per la suscettività terzo momento ed i valori ottenuti tramite la simulazione.

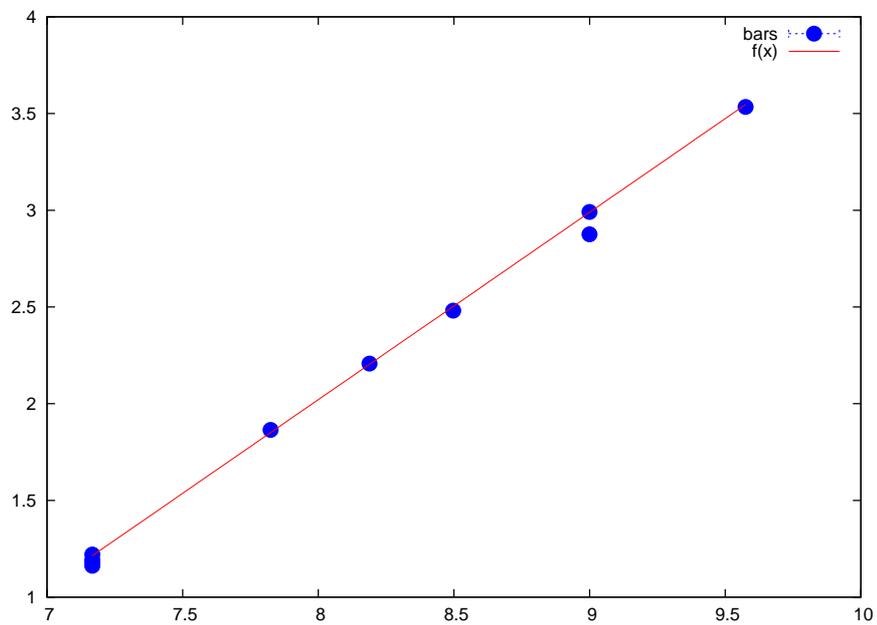


Figura 6.4: Accordo tra lo scaling atteso per la lunghezza di correlazione al quadrato ed i valori ottenuti tramite la simulazione.

parametro	valore	errore assoluto	errore %
$\ln(36 \cdot \pi^2)$	5.72855	+/- 0.07129	1.244
δ'''	0.968689	+/- 0.008716	0.8998

Tabella 6.16: Risultati del fit con parametri fissati per lo scaling della lunghezza di correlazione al quadrato.

Plottiamo ora i punti di coordinate $\left(\ln L_{\perp}^2, \ln \frac{B}{L_{\parallel}^e L_{\perp}^f}\right)$ e similmente per il terzo momento, assieme alla retta che otteniamo fissando intercetta e pendenza angolare con i valori appena ottenuti dai fit. Le figure di riferimento sono la 6.2 e la 6.3.

Infine per la lunghezza di correlazione si ha

$$\ln \xi^2 = -\ln(36\pi^2) + \delta''' \ln | -L_{\perp}^2 |, \quad (6.18)$$

dove ci aspettiamo ancora che $\delta''' = 1$.

I valori ottenuti sono rappresentati in tabella 6.16.

Graficamente otteniamo il plot di Figura 6.4.

6.2 Comportamento universale

Se ora ci rivolgiamo ai plot riguardanti le leggi di scaling previste e più precisamente alle (3.19), (3.23), (3.25) e (3.26), che si riferiscono rispettivamente ai plot delle Figure 6.5, 6.6, 6.7 e 6.8, appare del tutto evidente come l'accordo tra la teoria e l'esperimento sia ottimo. Dunque, a patto di riscalarle le osservabili in modo opportuno, il modello restituisce dei risultati che sono invarianti per geometria e che caratterizzano il comportamento universale del sistema.

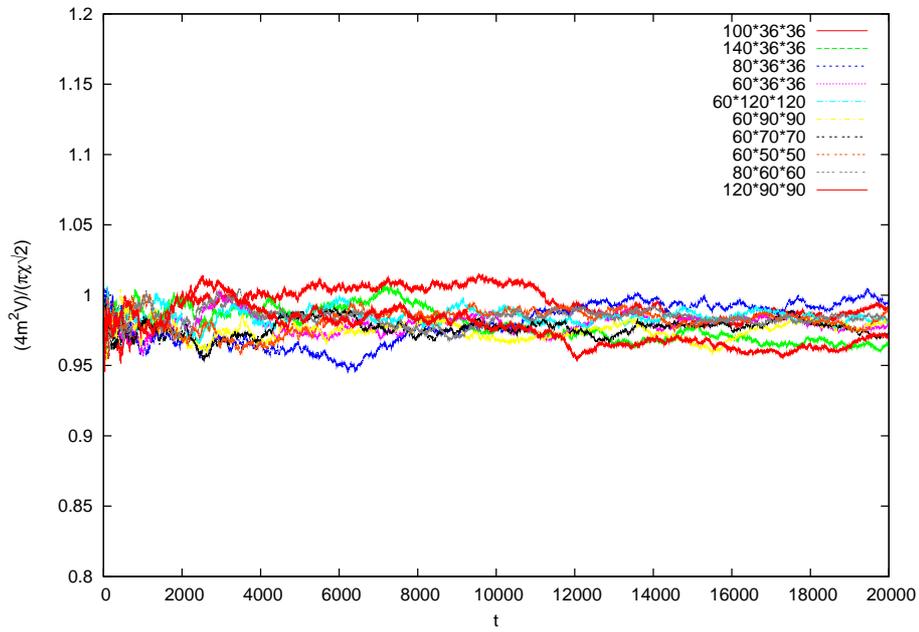


Figura 6.5: Andamento di tempo breve per $\frac{4}{\pi\sqrt{2}} \frac{m^2 V}{\chi_1}$.

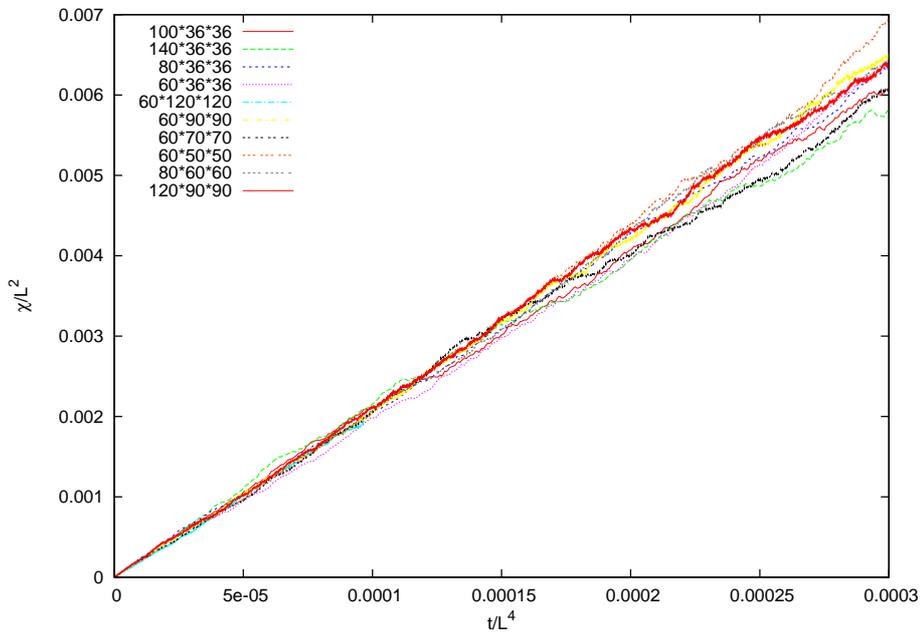


Figura 6.6: Scaling dinamico per $\frac{\chi_1}{L^2}$, in funzione di $\frac{t}{L^4}$.

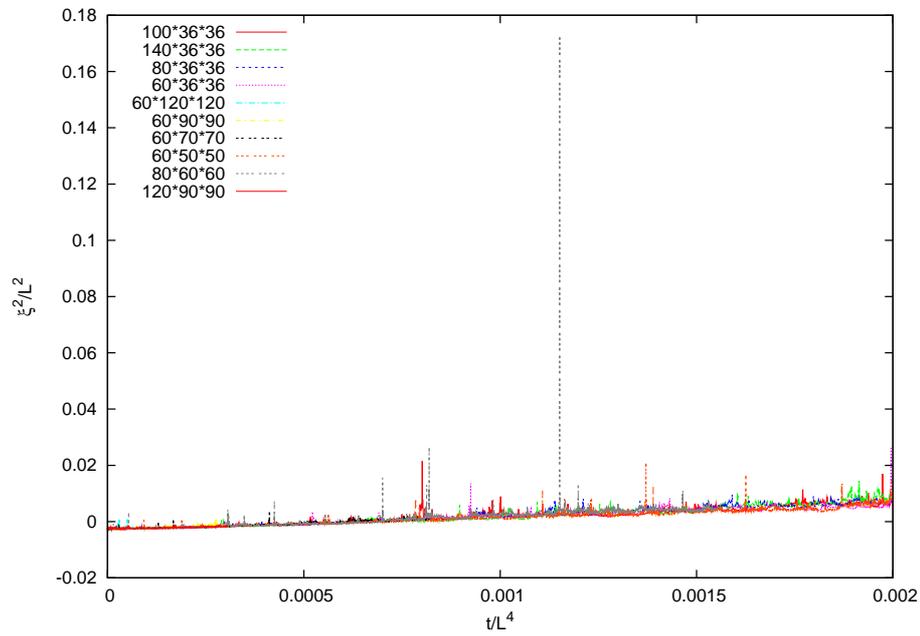


Figura 6.7: Scaling dinamico per $\frac{\xi^2}{L_{\perp}^2}$, in funzione di $\frac{t}{L_{\perp}^4}$.

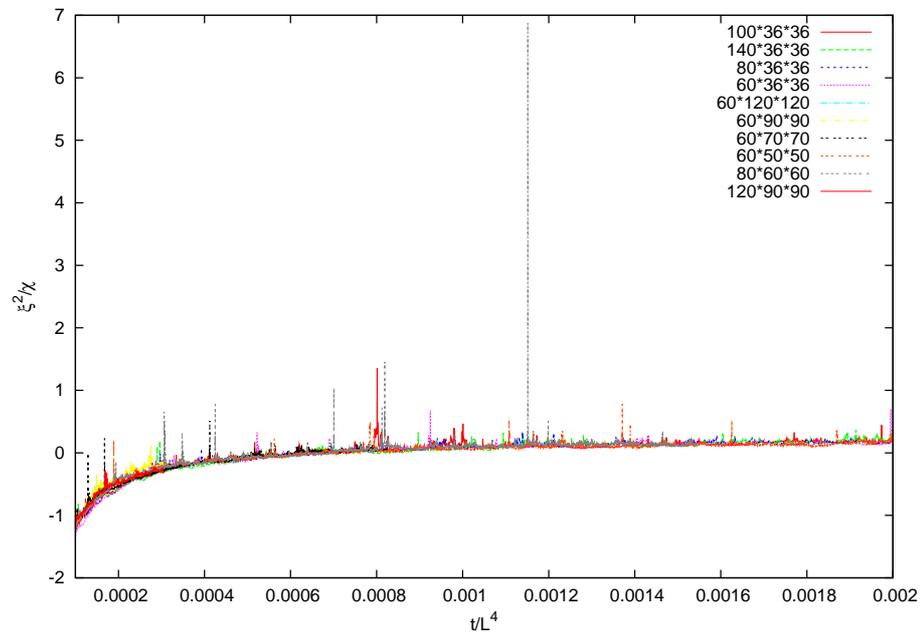


Figura 6.8: Scaling dinamico per $\frac{\xi^2}{\chi_1}$, in funzione di $\frac{t}{L_{\perp}^4}$.

6.3 Conclusioni

Nel lavoro di tesi abbiamo quindi:

- confermato la notevole caratteristica della teoria di JSLC che, anche per l'IDLG in 3D, le fluttuazioni trasverse e dunque quelle associate ai vettori d'onda trasversi, diventano Gaussiane nel limite critico;
- calcolato gli esponenti dinamici critici, gli esponenti con cui scalano le diverse osservabili e le costanti relative;
- sfruttato lo short-time scaling, aggirando così, attraverso una teoria fisica, il noto fenomeno del rallentamento critico,
- confermato il valore della $T_C \simeq 4.860 \frac{J}{k_B}$ per l'IDLG in 3D, la quale è stata stimata da Leung e Wang in un lavoro numerico del 1991;
- ottenuto i parametri universali del modello attraverso una spesa computazionale minima, laddove uno studio numerico estensivo nella fase termalizzata, richiede anni di acquisizione numerica;
- implementato l'*Infinitely Driven Lattice Gas* tridimensionale, attraverso la scrittura di un codice in C++ che ora, grazie alla natura ad oggetti del linguaggio usato, risulterà possibile estendere, con un minimo sforzo, ad altre dinamiche, sempre su reticolo tridimensionale; un utile esempio è sicuramente il *Randomly Driven Lattice Gas*;
- trovato un metodo generale per scrivere codice che realizzi la tecnica del Multi-Spin-Coding in dimensioni generiche.

Bibliografia

- [1] P.C. Hohenberg, B.I. Halperin,
Rev. Mod. Phys **49**, 435 (1977).
- [2] B.I. Halperin, P.C. Hohenberg, S.-K. Ma,
Phys. Rev. B **10**, 139 (1974).
- [3] S. Caracciolo, A. Gambassi, M. Gubinelli, A. Pelissetto,
Eur. Phys. J. B **20**, 255–265 (2001).
- [4] S. Caracciolo, A. Gambassi, M. Gubinelli, A. Pelissetto,
J. Phys. A **36**, L315 (2003),
e-print cond-mat/0211669.
- [5] S. Caracciolo, A. Gambassi, M. Gubinelli, A. Pelissetto,
Eur. Phys. J. B **34**, 205 (2003),
e-print cond-mat/0304297.
- [6] K.G. Wilson, J. Kogut, *The Renormalization Group and the ϵ Expansion*,
Physics Reports (Section C of Physics Letters) 12, No. 2 (1974) 75-200.
NORTH-HOLLAND PUBLISHING COMPANY.
- [7] J. Cardy, *Scaling and Renormalization in Statistical Physics*,
Cambridge Lectures Notes in Physics,
(Cambridge University Press, 1996).
- [8] S. Katz, J.L. Lebowitz, H. Spohn,
Phys. Rev. B **28**, 1655 (1983); J. Stat. Phys **34**, 497 (1984).
- [9] B. Schmittmann, R.K.P. Zia,
Statistical Mechanics of Driven Diffusive Systems
in Phase Transitions and Critical Phenomena.
Vol. 17, edited by C. Domb and J. Lebowitz
(Academic, London, 1995).
- [10] P.L. Garrido, M.A. Muñoz, and F. de los Santos,
Phys. Rev. E **61**, R4683 (2000).

-
- [11] P.L. Garrido, M.A. Muñoz, and F. de los Santos, *Phys. Rev. E* **57**, 752 (1998).
 - [12] P.L. Garrido and F. de los Santos, *J. Stat. Phys.* **96**, 303 (1999), e-print [cond-mat/9805211](#).
 - [13] B. Schmittmann et al., *Phys. Rev.* **61**, 5977 (2000).
 - [14] H.K. Janssen and B. Schmittmann, *Z. Phys. B* **64**, 503 (1986); K.-t. Leung and J.L. Cardy, *J. Stat. Phys.* **44**, 567 (1986); **45**, 1087(E) (1986).
 - [15] H.K. Janssen, B. Schaub and B. Schmittmann, *Z. Phys. B – Condensed Matter* **73**, 539–549 (1989).
 - [16] K.-t. Leung, *Phys. Rev. Lett.* **66**, 453 (1991); J.S. Wang, *J. Stat. Phys.* **82**, 1409 (1996).
 - [17] K.-t. Leung and J.S. Wang, *Int. J. Mod. Phys. C* **10**, 853 (1999), e-print [cond-mat/9805285](#).
 - [18] K.-t. Leung et al., *Int. J. Mod. Phys. C* **10**, 853 (1999).
 - [19] J. Marro and A. Achahbar, *J. Stat. Phys.* **90**, 817 (1998).
 - [20] A. Achahbar, P.L. Garrido, J. Marro, and M.A. Muñoz, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 195702 (2001), e-print [cond-mat/0106470](#).
 - [21] J. Marro et al., *Phys. Rev.* **53**, 6038 (1996).
 - [22] B. Schmittmann and R.K.P. Zia, *Phys. Rev. Lett.* **66**, 357 (1991); B. Schmittmann, *Europhys. Lett.* **24**, 109 (1993).
 - [23] P.L. Garrido, J.L. Lebowitz, C. Maes and H. Spohn, *Phys. Rev. A* **42**, 1954 (1990).
 - [24] E.V. Albano and G. Saracco, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 145701 (2002), e-print [cond-mat/0210141](#).