

(c)

$$\langle \vec{x} | \psi \rangle = (\langle x_1 | \otimes \langle x_2 | \otimes \cdots \otimes \langle x_n |) | \psi \rangle = \psi(\vec{x}) = \int d\vec{k} \langle \vec{x} | \vec{k} \rangle \langle \vec{k} | \psi \rangle = \int d\vec{k} \frac{e^{i\vec{k}\vec{x}}}{(2\pi)^{n/2}} \tilde{\psi}(\vec{k})$$

Esercizio 2

Il potenziale può essere scritto come

$$V = \frac{1}{4} m \omega^2 (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Diagonalizzando il potenziale si ottengono gli autovalori $\lambda_+ = 4$ e $\lambda_- = 2$ con autovettori

$$v_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad v_- = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Per cui con il cambio di coordinate

$$y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - x_2) \quad y_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + x_2)$$

lascia la parte cinetica dell'hamiltoniana in forma diagonale e diagonalizza il potenziale

$$V = \frac{1}{4} m \omega^2 (y_1, y_2) \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} m \omega^2 (2y_1^2 + y_2^2),$$

Il problema è stato quindi disaccoppiato in due oscillatori armonici indipendenti con pulsazione $\omega_1 = \sqrt{2}\omega$ e $\omega_2 = \omega$. Gli autovalori dell'energia sono quindi

$$E_{n_1, n_2} = \hbar\omega(n_1 + \frac{1}{2}) + \hbar\sqrt{2}\omega(n_2 + \frac{1}{2}) = \hbar\omega(n_1 + \sqrt{2}n_2 + \frac{1 + \sqrt{2}}{2}),$$

con assenza di degenerazione.

Esercizio 3

L'operatore che genera una traslazione lungo una direzione \vec{n} è

$$\hat{T}|\vec{q}\rangle = |\vec{q} - \vec{n}\rangle.$$

L'azione di \hat{T} su uno stato $|\psi\rangle$ è

$$\hat{T}|\psi\rangle = \int d\vec{q} \hat{T}|\vec{q}\rangle \langle \vec{q} | \psi \rangle = \int d\vec{q} \hat{T}|\vec{q} - \vec{n}\rangle \psi(\vec{q}) = \int d\vec{q}' \hat{T}|\vec{q}'\rangle \psi(\vec{q}' + \vec{n})$$

da cui per una traslazione infinitesima

$$\langle \vec{q} | \hat{T}_\epsilon | \psi \rangle = \psi(\vec{q} + \epsilon\vec{n}) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\epsilon\vec{n} \cdot \vec{\nabla})^j}{j!} \psi(\vec{q}) = e^{\epsilon\vec{n} \cdot \vec{\nabla}} \psi(\vec{q}).$$

L'operatore che genera una traslazione espresso in termini dell'operatore impulso d -dimensionale $\hat{\vec{p}}$ è

$$\hat{T} = e^{\frac{i}{\hbar} \hat{\vec{p}} \cdot \vec{n}}.$$

L'operatore che realizza una traslazione finita di lunghezza k lungo \vec{n} è quindi

$$e^{\frac{ik}{\hbar} \hat{\vec{p}} \cdot \vec{n}}$$

nella base delle coordinate otteniamo

$$\langle \vec{q} | e^{\frac{ik}{\hbar} \hat{\vec{p}} \cdot \vec{n}} | \psi \rangle = e^{\frac{k}{\hbar} \vec{\nabla} \cdot \vec{n}} | \psi \rangle.$$

Esercizio 4

Scrivendo l'energia cinetica in termini dell'impulso totale e dell'impulso relativo abbiamo

$$T = \frac{1}{2m_1} \vec{p}_1^2 + \frac{1}{2m_2} \vec{p}_2^2 = \frac{1}{2m_1} \left(\frac{m_1}{M} \vec{P} + \vec{p} \right)^2 + \frac{1}{2m_2} \left(\frac{m_2}{M} \vec{P} - \vec{p} \right)^2 = \dots = \frac{1}{2M} \vec{P}^2 + \frac{1}{2\mu} \vec{p}^2.$$

Esercizio 5

Partendo dalla proprietà della funzione delta

$$\int \delta^{(d)}(\vec{x} - \vec{x}_0) d\vec{x} = 1$$

è sufficiente effettuare il cambio di variabili ottenendo

$$\begin{aligned} \int \delta^{(d)}(\vec{x} - \vec{x}_0) d\vec{x} &= \int \delta^{(d)}(\vec{x} - \vec{x}_0) J dr d\phi_1 \dots d\phi_{d-1} \\ &= \int \delta(r - r^0) dr \delta(\phi_1 - \phi_1^0) d\phi_1 \dots \delta(\phi_{d-1} - \phi_{d-1}^0) d\phi_{d-1} = 1 \end{aligned}$$

dove J è il determinante jacobiano della trasformazione

$$J = \det \begin{pmatrix} \partial x^{(1)}/\partial r & \dots & \partial x^{(1)}/\partial \phi_{d-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \partial x^{(d)}/\partial \phi_{d-1} & \dots & \partial x^{(d)}/\partial \phi_{d-1} \end{pmatrix} = r^{d-1} \sin^{d-2}(\phi_1) \sin^{d-3}(\phi_2) \dots \sin(\phi_{d-2}),$$

da cui si ottiene

$$\delta^{(d)}(\vec{x} - \vec{x}_0) = \frac{1}{J} \delta(r - r^0) \delta(\phi_1 - \phi_1^0) \dots \delta(\phi_{d-1} - \phi_{d-1}^0).$$

Nel caso tridimensionale

$$\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}_0) = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \delta(r - r^0) \delta(\theta - \theta^0) \dots \delta(\phi - \phi^0).$$

Notare che nel caso in cui $\vec{x}_0 = 0$ abbiamo che $r^0 = 0$ mentre si ha una indeterminazione nelle variabili angolari θ e ϕ , per cui

$$\delta^{(3)}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi r^2} \delta(r),$$

che soddisfa la condizione di normalizzazione

$$\int \delta^{(3)}(\vec{x}) d\vec{x} = \int \frac{1}{4\pi r^2} \delta(r) r^2 dr \sin \theta d\theta d\phi = 1,$$

analogamente se $\vec{x}_0 = k\hat{z}$ abbiamo che $r^0 = |k|$, $\theta^0 = 0, \pi$ e si ha una indeterminazione nella variabile angolare ϕ per cui

$$\delta^{(3)}(\vec{x} - k\hat{z}) = \frac{1}{2\pi r^2 \sin \theta} \delta(r - r^0) \delta(\theta - \theta^0),$$

che soddisfa

$$\int \delta^{(3)}(\vec{x} - k\hat{z}) d\vec{x} = \int \frac{1}{2\pi r^2 \sin \theta} \delta(r - r^0) \delta(\theta - \theta^0) r^2 dr \sin \theta d\theta d\phi = 1.$$

Esercizio 6

Le coordinate del baricentro e relativa sono:

$$\vec{X} = \frac{\vec{x}_1 + \vec{x}_2}{2}, \quad \vec{x} = \frac{\vec{x}_1 - \vec{x}_2}{2}.$$

L'azione degli operatori \mathcal{P} e \mathcal{S} è

$$\langle \vec{X} \vec{x} | \mathcal{P} | \psi \rangle = \psi(-\vec{X}, -\vec{x}), \quad \langle \vec{X} \vec{x} | \mathcal{S} | \psi \rangle = \psi(\vec{X}, -\vec{x}),$$

scrivendo \vec{x} in coordinate sferiche

$$\langle \vec{X} \{ \rho, \theta, \phi \} | \mathcal{P} | \psi \rangle = \psi(-\vec{X}, \{ \rho, \pi - \theta, \pi + \phi \}), \quad \langle \vec{X} \{ \rho, \theta, \phi \} | \mathcal{S} | \psi \rangle = \psi(\vec{X}, \{ \rho, \pi - \theta, \pi + \phi \}).$$

Esercizio 7

$$\begin{aligned} (\langle \psi | p_r | \phi \rangle)^* &= \left\{ \int d\vec{x} \langle \psi | \vec{x} \rangle \langle \vec{x} | p_r | \phi \rangle \right\}^* = i\hbar \int r^2 dr d\Omega \psi(r, \theta, \phi) \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) \phi^*(r, \theta, \phi) \\ &= i\hbar \int dr d\Omega \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \psi \phi^*) - 2r \psi \phi^* - r^2 \phi^* \frac{\partial \psi}{\partial r} + r \psi \phi^* \right\} \\ &= i\hbar \int d\Omega \left[r^2 \psi \phi^* \right]_{r=0}^{r=\infty} - i\hbar \int r^2 dr d\Omega \left\{ \frac{1}{r} \phi^* \psi + \phi^* \frac{\partial \psi}{\partial r} \right\} = \int d\vec{x} \langle \phi | \vec{x} \rangle \langle \vec{x} | p_r | \psi \rangle = \langle \phi | p_r | \psi \rangle, \end{aligned}$$

dove si è integrato per parti il termine $\psi \partial \phi^* / \partial r$ e si è utilizzato il fatto che la funzione d'onda deve andare a zero più velocemente di $1/r$ per $r \rightarrow \infty$ infatti per la condizione di normalizzazione

$$\int r^2 \psi^* \psi dr d\Omega = const.$$

Esercizio 8

$$[\hat{L}^i, x^j] = \epsilon_{ikl} x^k p^l x^j - x^j \epsilon_{ikl} x^k p^l = \epsilon_{ikl} x^k x^j p^l - i\hbar \epsilon_{ikl} x^k \delta^{jl} - \epsilon_{ikl} x^k x^j p^l = i\hbar \epsilon_{ijk} x^k.$$

Analogamente

$$[\hat{L}^i, p^j] = \epsilon_{ikl} x^k p^l p^j - p^j \epsilon_{ikl} x^k p^l = \epsilon_{ikl} x^k p^l p^j - \epsilon_{ikl} x^k p^l p^j + i\hbar \epsilon_{ikl} p^l \delta^{jk} = i\hbar \epsilon_{ijk} p^k.$$

Esercizio 9

Abbiamo che $\vec{\nabla} \psi(r) \propto \vec{x}$, infatti

$$\vec{\nabla} \phi(r) = \frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \vec{x}} = \frac{\vec{x}}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r}.$$

Per cui

$$\langle \vec{x} | \vec{L} | \phi \rangle = -i\hbar \vec{x} \times \vec{\nabla} \phi(r) = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{L} | \phi \rangle = 0.$$

Esercizio 10

$$\hat{L}^i \hat{x}^i | \phi \rangle = \hat{x}^i \hat{L}^i | \phi \rangle = 0.$$

$$[\hat{L}^i, [\hat{L}^i, \hat{x}^j]] = i\hbar [\hat{L}^i, \epsilon_{ijk} \hat{x}^k] = -\hbar^2 \epsilon_{ijk} \epsilon_{ikl} \hat{x}^l = \hbar^2 \epsilon_{ikj} \epsilon_{ikl} \hat{x}^l = 2\hbar^2 \hat{x}^j,$$

dove è stata usata la relazione $\epsilon_{ikj} \epsilon_{ikl} = 2\delta_{jl}$.

Abbiamo inoltre che

$$[\hat{L}^i, [\hat{L}^i, \hat{x}^j]] | \phi \rangle = (\hat{L}^i \hat{L}^i \hat{x}^j - 2\hat{L}^i \hat{x}^j \hat{L}^i + \hat{x}^j \hat{L}^i \hat{L}^i) | \phi \rangle = \hat{L}^2 \hat{x}^j | \phi \rangle,$$

da cui si ricava che qualunque combinazione lineare di $x^j | \phi \rangle$ è autostato di \hat{L}^2

$$\hat{L}^2 \hat{x}^j | \phi \rangle = 2\hbar^2 \hat{x}^j | \phi \rangle.$$

La relazione $\epsilon_{ikj} \epsilon_{ikl} = 2\delta_{jl}$ si può verificare in questo modo. Per $j \neq l$ avremo necessariamente che $i = k$ oppure $i = j$ oppure $i = l$ (gli indici i, j, k variano da 1 a 3) per cui

$\epsilon_{ikj}\epsilon_{ikl} = 0$ (se $j \neq l$); per $j = l$ (ad esempio $j = l = 3$) definiamo la matrice (3×3) , $a_{ij} = \epsilon_{ij3}$ abbiamo che $\epsilon_{ik3}\epsilon_{ik3} = a_{ik}a_{ik} = a_{ik}a_{ki}^T = \text{Tr}(aa^T) = 2$.

Esercizio 11

Per simmetria nel piano xy

$$\Delta^2 L_x = \langle L_x^2 \rangle - \langle L_x \rangle^2 = \Delta^2 L_y = \langle L_y^2 \rangle - \langle L_y \rangle^2$$

e inoltre

$$\langle L_x \rangle = \langle L_y \rangle = 0,$$

infatti

$$\langle L_x \rangle = \langle l, m | L_x | l, m \rangle = \frac{1}{2} \langle l, m | (L_+ + L_-) | l, m \rangle = \hbar l_+ \langle l, m | l, m+1 \rangle + \hbar l_- \langle l, m | l, m-1 \rangle = 0.$$

$$\Delta^2 L_x = \Delta^2 L_y = \frac{1}{2} \langle l, m | (L_x^2 + L_y^2) | l, m \rangle = \frac{1}{2} \langle l, m | (\vec{L}^2 - L_z^2) | l, m \rangle = \frac{\hbar^2}{2} (l(l+1) - m^2),$$

per cui gli stati di minima indeterminazione $\Delta L_x \Delta L_y$ sono quelli in cui $|m| = l$.

Esercizio 12

Scegliamo la base in cui l'operatore L_n è diagonale

$$(L_n^3 - \hbar^2 L_n) | l, m \rangle = L_n (L_n - \hbar) (L_n + \hbar) | l, m \rangle = \hbar^3 m(m-1)(m+1) | l, m \rangle = 0$$

poiché se $l = 1$, $m = \pm 1, 0$.

Consideriamo l'asse z diretto verso \vec{n} per cui $L_n = L_z$, avremo che

$$\langle L_y \rangle = \langle \psi | \frac{1}{i\hbar} [L_z, L_x] | \psi \rangle = \frac{1}{i\hbar} \langle \psi | (L_z L_x - L_x L_z) | \psi \rangle = -im \langle \psi | (L_x - L_x) | \psi \rangle = 0,$$

e analogamente $\langle L_x \rangle = 0$.

$$\langle \vec{x} | \psi \rangle = (ax_1 + bx_2 + cx_3) f(r) = (a \sin \theta \cos \phi + b \sin \theta \sin \phi + c \cos \theta) r f(r)$$

da cui si evince che lo stato $|\psi\rangle$ è uno stato di momento angolare 1 che può essere espresso nella base degli autostati del momento angolare o nella base cartesiana. Utilizzando l'espressione esplicita dell'operatore momento angolare in coordinate cartesiane e tralasciando la parte radiale che è invariante per rotazioni otteniamo:

$$\langle \psi | L_x | \psi \rangle = \sum_{i,j=1}^3 \langle \psi | i \rangle \langle i | L_x | j \rangle \langle j | \psi \rangle = -i\hbar(a, b, c) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = -i\hbar(-bc + bc) = 0$$

e analogamente $\langle \psi | L_y | \psi \rangle = \langle \psi | L_z | \psi \rangle = 0$.

Esercizio 13

La legge del moto in rappresentazione di Schrödinger è data da

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi, t\rangle = H |\psi, t\rangle$$

da cui

$$|\psi, t\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} H t} |\psi, 0\rangle.$$

L'hamiltoniana del sistema è

$$H = \vec{B} \cdot \vec{S} = B \hat{n} \cdot \vec{S},$$

dove $B = |\vec{B}|$ e \hat{n} è il versore che indica la direzione di \vec{B}

$$\hat{n} = \sin \theta \cos \phi \hat{n}_x + \sin \theta \sin \phi \hat{n}_y + \cos \theta \hat{n}_z.$$

Utilizzando la base $|1, m\rangle$ degli autostati S_x, S_z abbiamo quindi che

$$\langle 1, m | \frac{1}{\hbar} \hat{n} \cdot \vec{S} | 1, m' \rangle = \begin{pmatrix} \cos \theta & \frac{\sin \theta e^{-i\phi}}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{\sin \theta e^{i\phi}}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{\sin \theta e^{-i\phi}}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{\sin \theta e^{-i\phi}}{\sqrt{2}} & -\cos \theta \end{pmatrix},$$

e si può mostrare che

$$\begin{aligned} \langle 1, m | \frac{1}{\hbar} \hat{n} \cdot \vec{S} | 1, m' \rangle &= \langle 1, m | \left(\frac{1}{\hbar} \hat{n} \cdot \vec{S} \right)^{2k+1} | 1, m' \rangle \\ \langle 1, m | \left(\frac{1}{\hbar} \hat{n} \cdot \vec{S} \right)^2 | 1, m' \rangle &= \langle 1, m | \left(\frac{1}{\hbar} \hat{n} \cdot \vec{S} \right)^{2k} | 1, m' \rangle = \begin{pmatrix} \frac{1+\cos^2 \theta}{2} & \frac{\cos \theta \sin \theta e^{-i\phi}}{\sqrt{2}} & \frac{\sin^2 \theta e^{-2i\phi}}{2} \\ \frac{\cos \theta \sin \theta e^{i\phi}}{\sqrt{2}} & \sin^2 \theta & \frac{-\cos \theta \sin \theta e^{-i\phi}}{\sqrt{2}} \\ \frac{\sin^2 \theta e^{2i\phi}}{2} & \frac{-\cos \theta \sin \theta e^{i\phi}}{\sqrt{2}} & \frac{1+\cos^2 \theta}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

L'evoluzione temporale è quindi

$$e^{-\frac{i}{\hbar} \vec{B} \cdot \vec{S} t} |1, 1\rangle = \left[\mathbb{I} - \left(\frac{\hat{n} \cdot \vec{S}}{\hbar} \right)^2 + \cos(Bt) \left(\frac{\hat{n} \cdot \vec{S}}{\hbar} \right)^2 - i \sin(Bt) \frac{\hat{n} \cdot \vec{S}}{\hbar} \right] |1, 1\rangle$$

mentre la probabilità che una misura al tempo T della componente z dello spin dia come risultato $m = -1$ è

$$P = |\langle 1, -1 | e^{-\frac{i}{\hbar} \vec{B} \cdot \vec{S} T} | 1, 1 \rangle|^2 = \left| \frac{\sin^2 \theta e^{2i\phi}}{2} (-1 + \cos(BT)) \right|^2 = \sin^4 \theta \sin^4(BT/2)$$

Nel caso della rappresentazione di Heisenberg abbiamo che

$$\frac{d\vec{S}}{dt} = \frac{i}{\hbar}[H, \vec{S}],$$

consideriamo il caso particolare in cui $\vec{B} = B\hat{n}_x$ avremo che

$$\begin{aligned}\frac{dS_x}{dt} &= 0, \\ \frac{dS_y}{dt} &= \frac{i}{\hbar}[BS_x, S_y] = -BS_z, \\ \frac{dS_z}{dt} &= \frac{i}{\hbar}[BS_x, S_z] = BS_y,\end{aligned}$$

e risolvendo otteniamo per la componente lungo z dello spin

$$S_z(t) = S_z(0) \cos(Bt) + S_y(0) \sin(Bt)$$

utilizzando ancora la base $|1, m\rangle$

$$\langle 1, m | S_z(t) | 1, m' \rangle = \hbar \begin{pmatrix} \cos(Bt) & -i\frac{\sin(Bt)}{\sqrt{2}} & 0 \\ i\frac{\sin(Bt)}{\sqrt{2}} & 0 & -i\frac{\sin(Bt)}{\sqrt{2}} \\ 0 & i\frac{\sin(Bt)}{\sqrt{2}} & -\cos(Bt) \end{pmatrix}.$$

Ricavando l'autovettore di questa matrice corrispondente all'autovalore $-\hbar$ si ottiene

$$\langle 1, m | 1, -1 \rangle_{s_z(t)} = \sin^2(Bt/2) \begin{pmatrix} 1 \\ -i\sqrt{2}(1 + \cos(Bt))/\sin(Bt) \\ -(1 + \cos(Bt))/(1 - \cos(Bt)) \end{pmatrix}$$

da cui

$$P = |_{s_z(T)} \langle 1, -1 | 1, 1 \rangle|^2 = \sin^4(BT/2).$$

Esercizio 14

Per determinare le matrici L_x , L_y e L_z nella base degli autostati di L_z partiamo dalla base cartesiana $|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle$ e determiniamo gli autovettori di

$$\langle i | L_z | j \rangle = -i\hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

che sono

$$\langle i | 1, \pm 1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \langle i | 1, 0 \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

con autovalori $\lambda_{\pm} = \pm\hbar$ e $\lambda_0 = 0$.

L'operatore L_z nella base $|1, m\rangle$ dei suoi autostati sarà dato da

$$\langle 1, m | L_z | 1, m' \rangle = \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

mentre per ottenere L_x e L_y è sufficiente calcolare $\langle 1, m | L_{\pm} | 1, m' \rangle = \sqrt{2}\hbar\delta_{|m-m'|,1}$ e utilizzare che $L_{\pm} = L_x \pm iL_y$:

$$\langle 1, m | L_x | 1, m' \rangle = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \langle 1, m | L_y | 1, m' \rangle = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice di cambiamento di base sarà data da $U = |1\rangle\langle 1, 1| + |2\rangle\langle 1, 0| + |3\rangle\langle 1, -1|$:

$$\langle 1, m | U | 1, m' \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -i & 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 15

L'hamiltoniana del sistema è

$$H = \vec{B} \cdot \vec{S} = B \hat{n} \cdot \vec{S},$$

dove $B = |\vec{B}|$ e \hat{n} è il versore che indica la direzione di \vec{B}

$$\hat{n} = \sin\theta \cos\phi \hat{n}_x + \sin\theta \sin\phi \hat{n}_y + \cos\theta \hat{n}_z.$$

Utilizzando la base $|\pm\rangle$ degli autostati di S , S_z abbiamo quindi che

$$\langle \pm | \frac{2}{\hbar} \hat{n} \cdot \vec{S} | \pm \rangle = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta e^{-i\phi} \\ \sin\theta e^{-i\phi} & -\cos\theta \end{pmatrix} \equiv R,$$

e si può mostrare che

$$\left(\frac{2}{\hbar} \hat{n} \cdot \vec{S} \right)^{2k} = \mathbb{I}, \quad \left(\frac{2}{\hbar} \hat{n} \cdot \vec{S} \right)^{2k+1} = R.$$

L'evoluzione temporale è quindi

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} \vec{B} \cdot \vec{S} t} |\psi\rangle = [\mathbb{I} \cos(Bt/2) - iR \sin(Bt/2)] |\psi\rangle$$

da cui si può calcolare

$$\langle \psi(t) | \vec{S} | \psi(t) \rangle$$

mentre la probabilità che una misura al tempo t della componente z dello spin dia come risultato $s_z = -1/2$ è

$$P = |\langle -|e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{B}\cdot\vec{S}t}|+\rangle|^2 = \sin^2\theta \sin^2(Bt/2)$$

Nel caso della rappresentazione di Heisenberg abbiamo che

$$\frac{d\vec{S}}{dt} = \frac{i}{\hbar}[H, \vec{S}],$$

consideriamo il caso particolare in cui $\vec{B} = B\hat{n}_x$ avremo che

$$\begin{aligned}\frac{dS_x}{dt} &= 0, \\ \frac{dS_y}{dt} &= \frac{i}{\hbar}[BS_x, S_y] = -BS_z, \\ \frac{dS_z}{dt} &= \frac{i}{\hbar}[BS_x, S_z] = BS_y,\end{aligned}$$

e risolvendo otteniamo per la componente lungo z dello spin

$$S_z(t) = S_z(0) \cos(Bt) + S_y(0) \sin(Bt)$$

utilizzando ancora la base $|\pm\rangle$

$$\langle \pm|S_z(t)|\pm\rangle = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \cos(Bt) & -i \sin(Bt) \\ i \sin(Bt) & -\cos(Bt) \end{pmatrix}.$$

Ricavando l'autovettore di questa matrice corrispondente all'autovalore $-\hbar/2$ si ottiene

$$\langle \pm|-\rangle_{s_z(t)} = \begin{pmatrix} \sin(Bt/2) \\ -i \cos(Bt/2) \end{pmatrix}$$

da cui

$$P = |_{s_z(t)}\langle -|+\rangle|^2 = \sin^2(Bt/2).$$

Esercizio 16

Utilizzando la base $|\pm\rangle$ degli autostati di S , S_z e indicando la direzione dell'asse \vec{n} in coordinate polari abbiamo che

$$\langle \pm|S_n|\pm\rangle = \langle \pm|\vec{S}\cdot\hat{n}|\pm\rangle = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta e^{-i\phi} \\ \sin\theta e^{-i\phi} & -\cos\theta \end{pmatrix},$$

i cui autovettori sono

$$\langle \pm|+\rangle_{s_n} = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2)e^{i\phi} \end{pmatrix} \quad \langle \pm|-\rangle_{s_n} = \begin{pmatrix} -\sin(\theta/2)e^{-i\phi} \\ \cos(\theta/2) \end{pmatrix},$$

da cui

$$P_+ = |s_n \langle +|+\rangle|^2 = \cos^2(\theta/2) \quad P_- = |s_n \langle -|+\rangle|^2 = \sin^2(\theta/2).$$

Esercizio 17

Riscriviamo l'hamiltoniana nel modo seguente

$$H = \frac{V}{2}(\vec{s}^2 - \vec{s}_1^2 - \vec{s}_2^2 - \vec{s}_3^2)$$

dove $\vec{s} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2 + \vec{s}_3$ è lo spin totale del sistema di tre particelle. Passiamo quindi dalla base di autostati comuni degli operatori $\vec{s}_1^2, s_{1,z}, \vec{s}_2^2, s_{2,z}, \vec{s}_3^2, s_{3,z}$ alla base di autostati comuni degli operatori $\vec{s}^2, s_z, \vec{s}_1^2, \vec{s}_2^2, \vec{s}_3^2, \vec{s}_{12}^2$ dove $\vec{s}_{12} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$ è lo spin totale della coppia 1, 2 di particelle.

I possibili autovalori dell'energia sono quindi

$$E = \frac{\hbar^2 V}{2} \left(s(s+1) - \frac{9}{4} \right),$$

siccome gli autovalori possibili dello spin totale sono $s = \frac{3}{2}$ e $s = \frac{1}{2}$ avremo due possibili autovalori dell'energia

$$E_{\frac{3}{2}} = \frac{3}{4} \hbar^2 V, \quad E_{\frac{1}{2}} = -\frac{3}{4} \hbar^2 V.$$

Per calcolare la degenerazione consideriamo gli otto stati della base $\vec{s}_1^2, s_{1,z}, \vec{s}_2^2, s_{2,z}, \vec{s}_3^2, s_{3,z}$

$$|\frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}\rangle_1 |\frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}\rangle_2 |\frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}\rangle_3$$

combinando le prime due particelle otteniamo un tripletto di spin 1 e un singoletto di spin 0:

$$|1, m\rangle_{12} |\frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}\rangle_3, \quad |0, 0\rangle_{12} |\frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}\rangle_3$$

combinando con la terza particella abbiamo

$$|\frac{3}{2}, s_z, 1\rangle_{123}, \quad |\frac{1}{2}, s_z, 1\rangle_{123}, \quad |\frac{1}{2}, s_z, 0\rangle_{123},$$

dove abbiamo indicato gli stati come $|s, s_z, s_{12}\rangle_{123}$.

Abbiamo quindi per l'autovalore dell'energia $E_{\frac{3}{2}}$ degenerazione 4 (4 possibili valori di s_z) e per l'autovalore dell'energia $E_{\frac{1}{2}}$ degenerazione 4 (2 possibili valori di s_z con $s_{12} = 1$ e 2 possibili valori di s_z con $s_{12} = 0$).

Esercizio 18

Scriviamo l'hamiltoniana in termini delle coordinate del centro di massa $\vec{X} = (m_1\vec{x}_1 + m_2\vec{x}_2)/(m_1 + m_2)$ e relativa $\vec{x} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2$

$$H = \frac{\vec{P}^2}{2M} + \frac{p_r}{2\mu} + \frac{\vec{L}^2}{2mr^2} + V(r) + B_1\vec{L} \cdot (\vec{s}_1 + \vec{s}_2) + B_2\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2,$$

dove \vec{P} è l'impulso del centro di massa e p_r è l'impulso radiale corrispondente alla coordinata relativa.

Per rendere diagonale l'hamiltoniana rispetto alla parte angolare utilizziamo la base degli autostati comuni degli operatori $\vec{J}^2, J_z, \vec{L}^2, \vec{s}^2, \vec{s}_1^2, \vec{s}_2^2$ dove \vec{J} e \vec{s} sono il momento angolare totale e lo spin totale

$$H = \frac{\vec{P}^2}{2M} + \frac{p_r}{2\mu} + \frac{\vec{L}^2}{2mr^2} + V(r) + \frac{B_1}{2}(\vec{J}^2 - \vec{L}^2 - \vec{s}^2) + \frac{B_2}{2}(\vec{s}^2 - \vec{s}_1^2 - \vec{s}_2^2).$$

Gli autovalori dell'hamiltoniana sono quindi

$$E = E_{nl} + \frac{\hbar^2 B_1}{2}(j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)) + \frac{\hbar^2 B_2}{2}(s(s+1) - \frac{3}{2}),$$

dove con E_{nl} abbiamo indicato l'autovalore della parte radiale dell'hamiltoniana.

Nel caso in cui lo spin totale è uguale a zero ($s = 0, j = l$):

$$E_{s=0} = E_{nl} - \frac{3}{4}\hbar^2 B_2 \quad g = 2j_z + 1.$$

Nel caso in cui lo spin totale è uguale a uno ($s = 1, j = l + 1, l, l - 1$):

$$E_{s=1, j=l+1} = E_{nl} + B_1\hbar^2 l + \frac{\hbar^2}{4} B_2 \quad E_{s=1, j=l} = E_{nl} - B_1\hbar^2 + \frac{\hbar^2}{4} B_2 \quad E_{s=1, j=l-1} = E_{nl} - B_1\hbar^2(l-1) + \frac{\hbar^2}{4} B_2,$$

sempre con $g = 2j_z + 1$.

Esercizio 19

L'equazione di Schrödinger nel sistema non rotante è

$$\frac{d|\psi, t\rangle}{dt} = -\frac{i}{\hbar} H |\psi, t\rangle.$$

Senza perdere in generalità fissiamo l'asse di rotazione lungo l'asse z . Lo stato del sistema al tempo t nel sistema rotante R è dato da

$$|\psi, t\rangle_R = e^{-\frac{i}{\hbar} L_z \omega t} |\psi, t\rangle$$

e soddisfa l'equazione di Schrödinger nel sistema rotante

$$\frac{d|\psi, t\rangle_R}{dt} = -\frac{i}{\hbar} H_R |\psi, t\rangle_R.$$

da cui si ottiene

$$-\frac{i}{\hbar} L_z \omega |\psi, t\rangle_R + e^{-\frac{i}{\hbar} L_z \omega t} \left(-\frac{i}{\hbar} H |\psi, t\rangle \right) = -\frac{i}{\hbar} H_R |\psi, t\rangle_R,$$

e quindi l'hamiltoniana nel sistema rotante è

$$H_R = H + L_z \omega = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(r) + L_z \omega.$$

L'equazioni del moto in rappresentazione di Heisenberg sono

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{i}{\hbar} [H_R, x] = \frac{p_x}{m} - \omega y; & \dot{y} &= \frac{i}{\hbar} [H_R, y] = \frac{p_y}{m} + \omega x; & \dot{z} &= \frac{i}{\hbar} [H_R, z] = \frac{p_z}{m}. \\ \dot{p}_x &= \frac{i}{\hbar} [H_R, p_x] = -\omega p_y - \frac{\partial V}{\partial x}; & \dot{p}_y &= \frac{i}{\hbar} [H_R, p_y] = \omega p_x - \frac{\partial V}{\partial y}; & \dot{p}_z &= \frac{i}{\hbar} [H_R, p_z] = -\frac{\partial V}{\partial z}. \end{aligned}$$

da cui si ottiene

$$m\ddot{x} = -2m\omega\dot{y} + m\omega^2 x - \frac{\partial V}{\partial x}; \quad m\ddot{y} = 2m\omega\dot{x} + m\omega^2 y - \frac{\partial V}{\partial y}; \quad m\ddot{z} = -\frac{\partial V}{\partial z}.$$

Si riconoscono i contributi alla forza totale dovuti rispettivamente alla forza di Coriolis, alla forza centrifuga e alla forza reale.

Un insieme di operatori commutanti con l'hamiltoniana nel sistema non inerziale sono \vec{L}^2 e L_z e i rispettivi autostati $|E, l, m\rangle$ sono, in generale, non degeneri.

Esercizio 20

Risolviamo il problema con il metodo algebrico utilizzando gli operatori di creazione d^\dagger e distruzione d .

Partiamo dal caso in cui il momento angolare è nullo, ovvero gli stati con $l = 0$ e osserviamo che l'equazione di Schrödinger per la funzione radiale ridotta dell'oscillatore armonico tridimensionale isotropo è la stessa dell'oscillatore armonico unidimensionale

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{2} m \omega^2 r^2 \right) u(r) = E u(r)$$

le cui soluzioni sono quindi le stesse dell'oscillatore armonico unidimensionale.

La funzione d'onda dello stato fondamentale dell'oscillatore armonico unidimensionale si può ottenere dall'equazione

$$d_0 |0\rangle = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(r + i \frac{p_r}{m\omega} \right) |0\rangle = 0$$

la cui soluzione è

$$u(r) \sim e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}r^2}.$$

Questa soluzione deve però essere scartata perchè non soddisfa la condizione al contorno per la parte radiale della funzione d'onda $u(0) = 0$.

Costruiamo perciò il primo stato eccitato dell'oscillatore unidimensionale

$$|1\rangle = d_0^\dagger|0\rangle = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(r - i\frac{p_r}{m\omega} \right) |0\rangle,$$

da cui si ottiene la funzione d'onda radiale $u_{nl}(r)$ dello stato fondamentale per l'oscillatore tridimensionale

$$u_{00}(r) = \langle r|1\rangle \sim r e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}r^2}.$$

In generale le funzioni d'onda $u_{n0}(r)$ degli stati eccitati dell'oscillatore armonico tridimensionale isotropo con $l = 0$ sono le autofunzioni degli stati dispari dell'oscillatore armonico unidimensionale

$$u_{n0}(r) = \langle r|2n+1\rangle = \langle r|(d_0^\dagger)^{2n+1}|0\rangle \sim H_{2n+1}(r)e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}r^2}.$$

Per ottenere le autofunzioni che corrispondono a valori del momento angolare diverso da zero utilizziamo gli operatori di creazione per l generico

$$d_l^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(\left(r + \frac{\hbar l}{m\omega r} \right) + i\frac{p_r}{m\omega} \right).$$

L'autofunzione dello stato con numeri quantici n e l sarà data da

$$u_{nl}(r) = \langle r|d_l^\dagger d_{l-1}^\dagger \dots d_1^\dagger|2n+1\rangle = \langle r|d_l^\dagger d_{l-1}^\dagger \dots d_1^\dagger (d_0^\dagger)^{2n+1}|0\rangle,$$

dove l'azione di ogni operatore d_i^\dagger fa aumentare di uno il grado del polinomio della funzione d'onda, quindi la funzione d'onda $u_{nl}(r)$ sarà un polinomio di grado $2n+l+1$ per un termine gaussiano

$$u_{nl}(r) \sim P_{2n+l+1}(r)e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}r^2}.$$

La parte angolare della funzione d'onda è data dalle armoniche sferiche, per cui avremo

$$\psi_{nlm}(\vec{r}) = \langle \vec{r}|n, l, m\rangle = \frac{u_{nl}(r)}{r} Y_{lm}(\theta, \phi).$$

Esercizio 21

Gli operatori j_a risultano essere

$$j_1 = \frac{\hbar}{2}(a_1^\dagger a_2 + a_2^\dagger a_1) \quad , j_2 = -i\frac{\hbar}{2}(a_1^\dagger a_2 - a_2^\dagger a_1) \quad , j_3 = \frac{\hbar}{2}(a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2),$$

e le relazioni di commutazione

$$[H, j_a] = 0 \quad [j_a, j_b] = i\hbar\varepsilon_{abc}j_c,$$

ovvero j_a rappresenta l'analogo in due dimensioni del momento angolare tridimensionale.

Utilizzando l'espressione dell'hamiltoniana in funzione degli operatori a_i e a_i^\dagger

$$H = \hbar\omega(a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2),$$

si può mostrare che

$$\vec{j}^2 = j_1^2 + j_2^2 + j_3^2 = \frac{\hbar^2}{4} \left(\frac{H}{\hbar\omega} - 1 \right) \left(\frac{H}{\hbar\omega} + 1 \right).$$

Si può quindi determinare lo spettro dell'hamiltoniana dallo spettro dell'operatore \vec{j}^2

$$\hbar^2 j(j+1) = \frac{\hbar^2}{4} \left(\frac{E}{\hbar\omega} - 1 \right) \left(\frac{E}{\hbar\omega} + 1 \right)$$

da cui

$$E = \hbar\omega(2j+1)$$

con j che può assumere valori interi e seminteri. La degenerazione dell'autostato con numero quantico j sarà $g = 2j + 1$.

Lo spettro e la degenerazione che si ottengono separando il problema in coordinate cartesiane sono

$$E = \hbar\omega(n+1), \quad g = n+1 \quad \text{dove} \quad n = n_1 + n_2.$$

Esercizio 22

In un autostato di energia abbiamo che

$$E = \hbar\omega\left(n + \frac{3}{2}\right) = \langle E|H|E \rangle = \langle E|(T+V)|E \rangle = \left\langle \frac{\vec{p}^2}{2m} \right\rangle + \left\langle \frac{m\omega^2 \vec{x}^2}{2} \right\rangle.$$

Derivando l'uguaglianza rispetto a ω

$$\omega \frac{dE}{d\omega} = \hbar\omega\left(n + \frac{3}{2}\right) = E = \langle m\omega^2 x^2 \rangle = 2\langle V \rangle,$$

e quindi

$$\langle V \rangle = \frac{E}{2}, \quad \langle T \rangle = E - \langle V \rangle = \frac{E}{2} = \langle V \rangle.$$

Avremo che

$$\langle \vec{p}^2 \rangle = mE, \quad \langle \vec{x}^2 \rangle = \frac{E}{m\omega^2}, \quad \langle |\vec{x}| \rangle = \langle |\vec{p}| \rangle = 0$$

e il prodotto delle indeterminazioni risulta essere

$$\Delta^2 |\vec{x}| \Delta^2 |\vec{p}| = \frac{E^2}{\omega^2} = \hbar^2 \left(n + \frac{3}{2} \right)^2 \geq \frac{9\hbar^2}{4} > \frac{\hbar^2}{4}$$

Esercizio 23

Gli autovalori dell'energia possono dipendere in generale dalle grandezze in gioco m , k e \hbar :

$$E \sim m^\alpha k^\beta \hbar^\gamma .$$

Da semplici considerazioni dimensionali otteniamo che

$$[m] = \left[\frac{\hbar^2}{E l^2} \right] , \quad [k] = [E l^p] .$$

Perciò

$$[E] = [\hbar^{2\alpha+\gamma} E^{\beta-\alpha} l^{p\beta-2\alpha}]$$

da cui ricaviamo $\beta = 2\alpha/p$, $1 = \beta - \alpha = \beta(1 - p/2)$, e $\gamma = -2\alpha$.

L'andamento degli autovalori dell'energia è quindi

$$E \sim \hbar^{-2p/(2-p)} m^{p/(2-p)} k^{2/(2-p)} .$$

Consideriamo la funzione d'onda $N\psi(\lambda r)$ e determiniamo la corretta normalizzazione:

$$1 = |N|^2 \int_0^\infty |\psi(\lambda r)|^2 r^2 dr d\Omega = \frac{|N|^2}{\lambda^3} \int_0^\infty |\psi(r')|^2 r'^2 dr' d\Omega , \quad |N| \sim \lambda^{-3/2} .$$

I valori medi del termine cinetico e potenziale sono

$$\begin{aligned} \langle T \rangle &= -\hbar^2 |N|^2 \int_0^\infty \psi(\lambda r)^* \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \psi(\lambda r) r^2 dr d\Omega = \\ &= -\hbar^2 |N|^2 \lambda \int_0^\infty \psi(r')^* \left(\frac{\partial^2}{\partial r'^2} + \frac{2}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} \right) \psi(r') r'^2 dr' d\Omega = \frac{c_1}{\lambda^2} , \quad \text{con } c_1 > 0 , \end{aligned}$$

$$\langle V \rangle = |N|^2 \int_0^\infty \psi(\lambda r)^* \left(\frac{-k}{r^p} \right) \psi(\lambda r) r^2 dr d\Omega = -\frac{c_2}{\lambda^p} , \quad \text{con } c_2 > 0 ,$$

Se $p > 2$ il valor medio dell'hamiltoniana sugli stati con funzione d'onda $\psi(\lambda r)$

$$\langle H \rangle = \frac{c_1}{\lambda^2} - \frac{c_2}{\lambda^p}$$

tende a $-\infty$ per λ che tende a zero. L'hamiltoniana non è quindi limitata inferiormente e non esiste uno stato fondamentale. Il problema non ha senso fisico, rappresenta una particella che cade nel centro di forza e non può più uscirne in quanto serve un'energia infinita per estrarla.

Esercizio 24

$$0 = \langle [\vec{q} \cdot \vec{p}, H] \rangle = \vec{q} \cdot \langle [\vec{p}, V(\vec{q})] \rangle + \langle [\vec{q}, \vec{p}^2/(2m)] \cdot \vec{p} \rangle = \langle \left\{ \vec{q} \cdot \left(-i\hbar \vec{\nabla} V(\vec{q}) \right) + i\hbar \vec{p}^2/m \right\} \rangle$$

da cui

$$2\langle T \rangle = \langle \vec{q} \cdot \vec{\nabla} V(\vec{q}) \rangle.$$

Esercizio 25

$$\langle r^k \rangle = \int \psi_{100}(r, \theta, \phi)^* r^k \psi_{100}(r, \theta, \phi) d\vec{r} = \frac{4}{a_0^3} \int_0^\infty r^{k+2} e^{-2r/a_0} dr = \frac{1}{2} \left(\frac{a_0}{2} \right)^k (k+2)!$$

dove $a_0 = \hbar^2/(mZe^2)$ è il raggio di Bohr.

Abbiamo quindi che

$$\langle r \rangle = \frac{3}{2} a_0, \quad \Delta^2 r = \langle r^2 \rangle - \langle r \rangle^2 = \frac{3}{4} a_0^2, \quad \langle V \rangle = -Ze^2 \langle r^{-1} \rangle = -\frac{Ze^2}{a_0} \quad \langle T \rangle = -\frac{\langle V \rangle}{2} = \frac{Ze^2}{2a_0}.$$

Esercizio 28

Le soluzioni nelle regioni $0 < x \ll b$ e $0 > x \gg b$ sono rispettivamente

$$\psi_{\ll}(x) = \frac{N}{\sqrt[4]{2m(E-V(x))}} \sin \left(\int_x^b dx' \frac{\sqrt{2m(E-V(x'))}}{\hbar} + \frac{\pi}{4} \right),$$

$$\psi_{\gg}(x) = \frac{N'}{\sqrt[4]{2m(E-V(x))}} \sin \left(\int_{-b}^x dx' \frac{\sqrt{2m(E-V(x'))}}{\hbar} + \frac{\pi}{4} \right).$$

Per simmetria del problema le costanti di normalizzazione N e N' devono essere uguali a meno di un segno $N = \pm N'$.

Imponiamo che le due soluzioni coincidano per $x = 0$, avremo che

$$\int_{-b}^0 \frac{dx'}{\hbar} \sqrt{2m(E-V(x'))} + \int_0^b \frac{dx'}{\hbar} \sqrt{2m(E-V(x'))} + \frac{\pi}{2} = n\pi,$$

e quindi utilizzando la relazione $E = V(b) = D(b-a)$

$$\left(n - \frac{1}{2} \right) \pi = 2 \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \left(a - \frac{2E}{3D} \left(1 - \frac{D}{E}(x-a) \right)^{3/2} \Big|_a^b \right) = 2a \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \left(a + \frac{2E}{3D} \right),$$

da cui per grandi valori dell'energia $E/(Da) \gg 1$

$$E \simeq n^{2/3} \left(\frac{9\pi^2 \hbar^2 D^2}{32m} \right)^{1/3}.$$

Esercizio 29

L'hamiltoniana del sistema può essere scritta nel seguente modo

$$H = H_0 + \Delta V = H_0 + \Theta(r - R) \frac{q^2}{r} (1 - e^{-\lambda(r-R)}),$$

dove H_0 è l'hamiltoniana dell'atomo di idrogeno

$$H_0 = \frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{q^2}{r}.$$

La correzione al prim'ordine all'energia dello stato fondamentale è quindi

$$\begin{aligned} E_0^{(1)} &= \langle 100 | \Delta V | 100 \rangle = \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \int_R^\infty r^2 dr \frac{q^2}{r} (1 - e^{-\lambda(r-R)}) \frac{e^{-2r/a_0}}{\pi a_0^3} \\ &= \dots = \frac{q^2 e^{-2R/a_0} \lambda}{(1 - a_0 \lambda / 2)^2} \left(1 + \frac{R}{a_0} + \frac{\lambda a_0}{4} (1 + R/a_0) \right), \end{aligned}$$

dove è stata usata la funzione d'onda dello stato fondamentale dell'atomo di idrogeno

$$\langle \vec{x} | 100 \rangle = \psi_{100}(\vec{x}) = R_{10}(r) Y_{00}(\theta, \phi) = a_0^{-3/2} 2 e^{-r/a_0} \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \quad \text{con } a_0 = \hbar^2 / (m e^2).$$

Si può verificare che nel limite $\lambda \rightarrow 0$ la perturbazione svanisce e la correzione all'energia è nulla

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} E_0^{(1)} = 0.$$

Esercizio 30

L'hamiltoniana del sistema è data da

$$H = H_0 + \Delta V = H_0 - \frac{q^2}{r}$$

dove H_0 è l'hamiltoniana dell'atomo idrogenoide

$$H_0 = T + V = \frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{Zq^2}{r},$$

e vogliamo trattare l'aumento di carica del nucleo come una perturbazione.

Per prima cosa osserviamo che la perturbazione è indipendente dalle variabili angolari, θ e ϕ , e pertanto non rimuove la degenerazione dell'energia rispetto ai numeri quantici l e m

$$\langle n'l'm' | \Delta V | nlm \rangle = 0, \quad \text{se } l \neq l' \text{ o } m \neq m'.$$

Gli autostati del problema imperturbato sono anche autostati del problema perturbato e la correzione dell'energia dell' n -esimo stato è data da

$$E_n^{(1)} = \langle nlm | \Delta V | nlm \rangle = -q^2 \langle nlm | \frac{1}{r} | nlm \rangle.$$

Utilizzando il teorema del viriale

$$2\langle nlm | T | nlm \rangle = -\langle nlm | V | nlm \rangle$$

abbiamo che

$$E_n^{(0)} = \langle nlm | H | nlm \rangle = \langle nlm | T | nlm \rangle + \langle nlm | V | nlm \rangle = \frac{1}{2} \langle nlm | V | nlm \rangle = -\frac{Zq^2}{2} \langle nlm | \frac{1}{r} | nlm \rangle,$$

da cui

$$E_n^{(1)} = \frac{2}{Z} E_n^{(0)} = -\frac{mZe^4}{\hbar^2 n^2}.$$

Risolvendo il problema esattamente otteniamo per l'energia dello stato n -esimo

$$E_n = -\frac{m(Z+1)^2 e^4}{2\hbar^2 n^2}.$$

L'errore relativo che si ottiene utilizzando la teoria delle perturbazioni al prim'ordine è

$$\frac{E_n^{(0)} + E_n^{(1)} - E_n}{E_n} = \frac{1}{(Z+1)^2} \xrightarrow{Z \rightarrow \infty} 0.$$

Esercizio 31

L'hamiltoniana del sistema è data da

$$H = H_0 + \Delta V = H_0 - e|\vec{E}|z$$

dove H_0 è l'hamiltoniana dell'atomo di idrogeno

$$H_0 = T + V = \frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{q^2}{r}.$$

Gli autostati del primo stato eccitato $n = 2$ (del problema imperturbato) sono: $|2, 0, 0\rangle^{(0)}$, $|2, 1, 1\rangle^{(0)}$, $|2, 1, 0\rangle^{(0)}$, $|2, 1, -1\rangle^{(0)}$ con autovalore $E_2^{(0)} = -\frac{me^4}{2\hbar^2 4^2} = -\frac{e^2}{8a_0}$ ($g = 4$).

Per calcolare la correzione al prim'ordine all'energia $E_2^{(1)}$ dobbiamo considerare gli elementi di matrice ${}^{(0)}\langle 2, l', m' | \Delta V | 2, l, m \rangle^{(0)}$.

Sotto trasformazione di parità abbiamo che

$${}^{(0)}\langle 2, l', m' | z | 2, l, m \rangle^{(0)} = {}^{(0)}\langle 2, l', m' | \mathcal{P}^\dagger \mathcal{P} z \mathcal{P}^\dagger \mathcal{P} | 2, l, m \rangle^{(0)} = (-1)^{l+l'} {}^{(0)}\langle 2, l', m' | \Delta V | 2, l, m \rangle^{(0)}$$

da cui

$${}^{(0)}\langle 2, l', m' | z | 2, l, m \rangle^{(0)} = 0 \quad \text{se } l + l' \text{ è pari}$$

inoltre siccome $[L_z, z] = 0$

$$0 = {}^{(0)}\langle 2, l', m' | [L_z, z] | 2, l, m \rangle^{(0)} = \hbar(m' - m) {}^{(0)}\langle 2, l', m' | z | 2, l, m \rangle^{(0)}$$

da cui

$${}^{(0)}\langle 2, l', m' | z | 2, l, m \rangle^{(0)} = 0 \quad \text{se } m \neq m'.$$

L'unico elemento di matrice non nullo è pertanto

$${}^{(0)}\langle 2, 0, 0 | \Delta V | 2, 1, 0 \rangle^{(0)} = -q|\vec{E}| \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\infty r^2 dr \psi_{200}^*(r, \theta, \phi) r \cos \theta \psi_{210}(r, \theta, \phi) = -3a_0,$$

dove per svolgere l'integrale abbiamo utilizzato

$$\begin{aligned} \psi_{200}(r, \theta, \phi) &= R_{20}(r)Y_{00}(\theta, \phi) = (2a_0)^{-3/2} \left(2 - \frac{r}{a_0}\right) e^{-r/(2a_0)} \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \\ \psi_{210}(r, \theta, \phi) &= R_{21}(r)Y_{10}(\theta, \phi) = (2a_0)^{-3/2} \frac{r}{\sqrt{3}a_0} e^{-r/(2a_0)} \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta, \end{aligned}$$

e i seguenti integrali (che si possono dimostrare integrando ripetutamente per parti)

$$\int_0^\infty r^4 e^{-kr} dr = 24/k^5, \quad \int_0^\infty r^5 e^{-kr} dr = 120/k^6.$$

Utilizzando la base

$$|2, l, m\rangle^{(0)} = \begin{pmatrix} |2, 0, 0\rangle^{(0)} \\ |2, 1, 0\rangle^{(0)} \\ |2, 1, 1\rangle^{(0)} \\ |2, 1, -1\rangle^{(0)} \end{pmatrix}$$

abbiamo che

$${}^{(0)}\langle 2, l, m | \Delta V | 2, l, m \rangle^{(0)} = 3a_0q|\vec{E}| \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Diagonalizzando la matrice della perturbazione otteniamo l'autovalore $\lambda_0 = 0$ (con molteplicità due) e gli autovalori $\lambda_\pm = \pm 3a_0q|\vec{E}|$ e la base di autovettori che diagonalizza la matrice della perturbazione sarà

$$(|2, 0, 0\rangle^{(0)} + |2, 1, 0\rangle^{(0)})/\sqrt{2}, \quad (|2, 0, 0\rangle^{(0)} - |2, 1, 0\rangle^{(0)})/\sqrt{2}, \quad |2, 1, 1\rangle^{(0)}, \quad |2, 1, -1\rangle^{(0)}.$$

Abbiamo quindi un sottospazio di dimensione due che non viene modificato dalla perturbazione e un sottospazio di dimensione due in cui la perturbazione rimuove la degenerazione. Le energie (corrette al prim'ordine) degli stati con $n = 2$ in presenza della perturbazione sono quindi

$$E_{2,0} = E_2^{(0)} \quad (g = 2), \quad E_{2,+} = E_2^{(0)} + \lambda_+ \quad (g = 1), \quad E_{2,-} = E_2^{(0)} + \lambda_- \quad (g = 1).$$

L'elemento di matrice dell'operatore momento di dipolo $\vec{d} = q\vec{x}$ nello stato fondamentale in assenza di perturbazione è nullo per parità (assenza di momento di dipolo permanente):

$${}^{(0)}\langle 100|\vec{d}|100^{(0)}\rangle = q {}^{(0)}\langle 100|\vec{x}|100^{(0)}\rangle = q {}^{(0)}\langle 100|\mathcal{P}^\dagger\mathcal{P}\vec{x}\mathcal{P}^\dagger\mathcal{P}|100\rangle^{(0)} = -q {}^{(0)}\langle 100|\vec{x}|100\rangle^{(0)} = 0.$$

Calcoliamo la correzione al prim'ordine allo stato fondamentale

$$|100\rangle^{(1)} = -q|\vec{E}| \sum_{n \geq 2} \frac{{}^{(0)}\langle nlm|z|100\rangle^{(0)}}{E_1^{(0)} - E_n^{(0)}} |nlm\rangle^{(0)} = -q|\vec{E}| \sum_{\substack{n \geq 2 \\ l=2k+1}} \frac{{}^{(0)}\langle nl0|z|100\rangle^{(0)}}{E_1^{(0)} - E_n^{(0)}} |nl0\rangle^{(0)}$$

dove le regole di selezione (l dispari e $m = 0$) derivano da quelle ottenute nella prima parte dell'esercizio.

In definitiva il momento di dipolo al prim'ordine indotto dalla perturbazione è

$$\langle \vec{d} \rangle = ({}^{(0)}\langle 100| + {}^{(1)}\langle 100|) \vec{d} (|100\rangle^{(0)} + |100\rangle^{(1)}) = \left(0, 0, -2q|\vec{E}| \sum_{\substack{n \geq 2 \\ l=2k+1}} \frac{|{}^{(0)}\langle nl0|z|100\rangle^{(0)}|^2}{E_1^{(0)} - E_n^{(0)}} \right).$$

Esercizio 32

Dal momento che $|k_1 - k_2| < 2\lambda$ abbiamo che $\omega \equiv \omega_1 \simeq \omega_2$ ($\omega_i^2 = k_i/m$), ovvero il sistema è quasi degenere.

La perturbazione scritta in termini degli operatori di creazione e distruzione è

$$H' = \lambda xy = \frac{\hbar\lambda}{2m\omega} (a_x + a_x^\dagger)(a_y + a_y^\dagger).$$

Il livello fondamentale dell'hamiltoniana imperturbata è $E_0^{(0)} = \hbar\omega$ e lo stato fondamentale (nella base $|n_1, n_2\rangle$) è $|0, 0\rangle$.

Il primo livello eccitato è due volte degenere $E_1^{(0)} = 2\hbar\omega$ con autostati $|1, 0\rangle$, $|0, 1\rangle$. Consideriamo l'effetto della perturbazione nel sottospazio degenere

$$\langle 1|H'|1\rangle = \frac{\hbar\lambda}{2m\omega} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{dove} \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} |10\rangle \\ |01\rangle \end{pmatrix}$$

i cui autovalori sono

$$E_1^{(1)} = \pm \frac{\hbar\lambda}{2m\omega},$$

quindi la correzione al primo livello eccitato è

$$E_1^{(0)} + E_1^{(1)} = 2\hbar\omega \pm \frac{\hbar\lambda}{2m\omega}.$$

Il secondo livello eccitato è tre volte degenere $E_2^{(0)} = 3\hbar\omega$ con autostati $|2, 0\rangle$, $|0, 2\rangle$, $|1, 1\rangle$. Consideriamo l'effetto della perturbazione nel sottospazio degenere

$$\langle 2|H'|2\rangle = \frac{\hbar\lambda}{\sqrt{2}m\omega} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{dove} \quad |2\rangle = \begin{pmatrix} |20\rangle \\ |11\rangle \\ |02\rangle \end{pmatrix}$$

i cui autovalori sono

$$E_2^{(1)} = \begin{cases} \frac{\hbar\lambda}{m\omega} \\ 0 \\ -\frac{\hbar\lambda}{m\omega} \end{cases},$$

quindi la correzione al secondo livello eccitato è

$$E_2^{(0)} + E_2^{(1)} = 3\hbar\omega + \begin{cases} \frac{\hbar\lambda}{m\omega} \\ 0 \\ -\frac{\hbar\lambda}{m\omega} \end{cases}.$$

Il problema può anche essere risolto esattamente disaccoppiando l'hamiltoniana. Effettuiamo il cambio di variabili

$$x = X \cos \theta + Y \sin \theta, \quad y = -X \sin \theta + Y \cos \theta,$$

e imponiamo che i termini misti XY nel potenziale si annullino. Ciò si ottiene scegliendo

$$\theta = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{2\lambda}{k_2 - k_1} \right).$$

Nelle nuove coordinate l'hamiltoniana è quella di un oscillatore armonico bidimensionale disaccoppiato

$$H = T + \frac{m}{2} (\Omega_1^2 X^2 + \Omega_2^2 Y^2)$$

dove $m\Omega_1^2 = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) - \frac{1}{2}\sqrt{(k_2 - k_1)^2 + 4\lambda^2}$ e $m\Omega_2^2 = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) + \frac{1}{2}\sqrt{(k_2 - k_1)^2 + 4\lambda^2}$. I livelli di energia sono quindi

$$E_{n_1, n_2} = \hbar\Omega_1 \left(n_1 + \frac{1}{2} \right) + \hbar\Omega_2 \left(n_2 + \frac{1}{2} \right)$$

che per $\omega_1 \simeq \omega_2$, sviluppando al prim'ordine in λ

$$E_{n_1, n_2} \simeq \hbar\omega \left[(n_1 + n_2 + 1) - \frac{\lambda}{2m\omega^2} (n_1 - n_2) \right]$$

da cui seguono i risultati ottenuti in teoria delle perturbazioni.

Esercizio 33

Utilizzando la regola d'oro di Fermi la probabilità che il sistema subisca una transizione dallo stato fondamentale ad un generico stato eccitato ($n \neq 0$) nel limite di tempo infinito è

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \frac{1}{\hbar^2} \left| \int_0^\infty dt e^{\frac{i}{\hbar}(E_n - E_0)t} \langle n | Ax^2 e^{-bt} | 0 \rangle \right|^2 = \frac{1}{\hbar^2} \left| \int_0^\infty dt e^{(in\omega - b)t} \langle n | \frac{A\hbar(a + a^\dagger)^2}{2m\omega} | 0 \rangle \right|^2 \\ &= \left(\frac{A}{2m\omega} \right)^2 \left| \int_0^\infty dt e^{(in\omega - b)t} \left(\sqrt{2} \langle 2 | 2 \rangle \delta_{n,2} \right) \right|^2 = \left(\frac{A}{2m\omega} \right)^2 \left| \int_0^\infty dt \sqrt{2} e^{(2i\omega - b)t} \right|^2 \\ &= \frac{A^2}{2m^2\omega^2} \frac{1}{4\omega^2 + b^2}. \end{aligned}$$

Esercizio 34

Utilizzando la regola d'oro di Fermi la probabilità che il sistema subisca una transizione dallo stato fondamentale ad un generico stato eccitato è

$$\mathcal{P}(t) = \frac{1}{\hbar^2} \left| \int_0^t dt' e^{\frac{i}{\hbar}(E_n - E_0)t'} \langle nlm | (-Ez \cos(\omega t) e^{-t'/\tau}) | 000 \rangle \right|^2 = \frac{\delta_{n1} \delta_{l1} \delta_{m0} E^2}{2m\omega\hbar} \left| \int_0^t dt' e^{i(E_1 - E_0)t'/\hbar} e^{-t'/\tau} \right|^2$$

dove, sapendo che l'autofunzione dell'oscillatore armonico per lo stato $n = l = 1, m = 0$ è $\psi_{1,1,0}(r, \theta, \phi) = \sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}} r \cos\theta \psi_{0,0,0}(r, \theta, \phi)$, con $\psi_{0,0,0}(r, \theta, \phi) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{3/4} e^{-m\omega r^2/(2\hbar)}$, abbiamo

$$\langle nlm | z | 000 \rangle = \langle nlm | r \cos\theta | 000 \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \langle nlm | 110 \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \delta_{n1} \delta_{l1} \delta_{m0}.$$

Nel limite $t \gg \tau$, risolvendo l'integrale otteniamo

$$\mathcal{P}(t) = \delta_{n1} \delta_{l1} \delta_{m1} \frac{E^2 \tau^2}{2m\omega\hbar} \frac{(1 + 2\omega^2 \tau^2)^2 + \omega^2 \tau^2}{(1 + 4\tau^2 \omega^2)^2}.$$

Esercizio 35

Nel caso di bosoni tutte le particelle sono nello stato fondamentale di singola particella: l'energia dello stato fondamentale del sistema è

$$E_0^{tot} = \sum_{i=1}^N E_0 = N E_0,$$

la funzione d'onda dello stato fondamentale del sistema, simmetrica per scambio di particelle, è

$$\psi_0^{tot}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3) = \psi_0(\vec{x}_1) \psi_0(\vec{x}_2) \psi_0(\vec{x}_3).$$

Nel caso di fermioni l'energia dello stato fondamentale del sistema è

$$E_0^{tot} = \sum_{i=1}^N E_{i-1} = E_0 + E_1 \cdots E_{N-1},$$

la funzione d'onda dello stato fondamentale del sistema, antisimmetrica per scambio di particelle, è

$$\psi_0^{tot}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3) = \frac{1}{\sqrt{3!}} \begin{vmatrix} \psi_0(\vec{x}_1) & \psi_0(\vec{x}_2) & \psi_0(\vec{x}_3) \\ \psi_1(\vec{x}_1) & \psi_1(\vec{x}_2) & \psi_1(\vec{x}_3) \\ \psi_2(\vec{x}_1) & \psi_2(\vec{x}_2) & \psi_2(\vec{x}_3) \end{vmatrix}.$$

Esercizio 36

L'hamiltoniana può essere scritta come

$$H = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(x_1^2 + x_2^2) + \frac{B}{2}(\vec{s}^2 - \vec{s}_1^2 - \vec{s}_2^2)$$

dove \vec{s} è l'operatore spin totale a cui corrispondono gli autovalori

$$E_{n_1+n_2, s} = \hbar\omega(n_1 + n_2 + 1) + \frac{B}{2}\hbar^2 \left(s(s+1) - \frac{3}{2} \right).$$

Lo stato fondamentale ha autovalore di energia $E_{0,0} = \hbar\omega - \frac{3}{4}B\hbar^2$, di spin totale $s = 0$ e funzione d'onda (antisimmetrica per scambio dei fermioni)

$$\psi_0(x_1)\psi_0(x_2)\chi_{0,0}$$

dove $\psi_0(x)$ è l'autofunzione dello stato fondamentale dell'oscillatore armonico, e $\chi_{0,0}$ è il singoletto di spin. Il primo livello eccitato ha autovalore di energia $E_{1,0} = 2\hbar\omega - \frac{3}{4}B\hbar^2$, di spin totale $s = 0$ e la funzione d'onda (antisimmetrica per scambio dei fermioni) è

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_1(x_1)\psi_0(x_2) + \psi_0(x_1)\psi_1(x_2)) \chi_{0,0}$$

dove $\psi_1(x)$ è l'autofunzione del primo stato eccitato dell'oscillatore armonico.

Notiamo che l'autovalore di energia $E_{0,1} = \hbar\omega + \frac{B}{4}\hbar^2$ non fa parte dello spettro perchè gli corrisponderebbe una funzione d'onda simmetrica per scambio di fermioni (parte spaziale simmetrica e tripletto di spin).

Esercizio 37

Passando alle coordinate del centro di massa $\vec{X} = (\vec{x}_1 + \vec{x}_2)/2$ e relativa $\vec{x} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2$ l'hamiltoniana diventa

$$H = \frac{\vec{P}^2}{2M} + \frac{\vec{p}^2}{2\mu} + \frac{1}{2}\mu(\sqrt{2}\omega)^2\vec{x}^2 + \frac{B}{2}(\vec{s}^2 - \vec{s}_1^2 - \vec{s}_2^2),$$

dove $M = 2m$ e $\mu = m/2$ e \vec{s} è l'operatore spin totale.

Lo spettro di energia è quindi

$$E = E_{CM} + \hbar\sqrt{2}\omega(N + \frac{3}{2}) + \frac{B}{2}\hbar^2 \left(s(s+1) - \frac{3}{2} \right),$$

dove E_{CM} è l'autovalore corrispondente al moto del centro di massa del sistema. Fissata l'energia del centro di massa, la degenerazione dello spettro di energia è

$$g = (2s + 1)(N + 1)(N + 2)/2.$$