

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

Corso di laurea in Fisica

**MODELLO DI HEISENBERG ALTAMENTE NON
LINEARE**

Relatore: Prof. Sergio Caracciolo

Correlatore: Prof. Bruno Bassetti

PACS: 75.10.Hk, 05.50.+q, 64.60.Cn, 64.60.Fr

Tesi di laurea di
Bortolo Matteo Mognetti
matr. 595274

Anno Accademico 2002-2003

Indice

1	Introduzione al modello	7
1.1	Funzionali generatori	8
1.1.1	$Z[J]$ e $W[J]$, sviluppi perturbativi	8
1.1.2	$\Gamma[\psi]$ o potenziale termodinamico	10
1.2	Il modello $O(N)$	11
1.3	Generalizzazioni	12
1.3.1	RP^{N-1} e $RP^{N-1} - O(N)$	12
1.3.2	Interazione altamente non lineare	14
1.4	Peculiarità del limite $N \rightarrow \infty$	15
1.4.1	Funzionali generatori all'ordine N^{-1}	16
1.4.2	Sviluppo in N^{-1} e teoria di campo medio	18
2	Modello non lineare in dettaglio	21
2.1	Simulazione Montecarlo per $N = 3$	21
2.2	Relazioni di scala	24
2.3	Programma	26
3	Propagatore e vertici della teoria	29
3.1	Linearizzazione dell'azione	29
3.2	Integrazione gaussiana	30
3.3	Equazioni del punto sella	31
3.4	Inesistenza di ordine a lungo range	34
3.5	Sviluppo attorno al punto sella: propagatore	34
3.5.1	Struttura dettagliata di $P_{A,B}^{-1}(E, p)$	36
3.6	Vertici della teoria	37
3.6.1	Vertici a tre gambe	39
3.6.2	Vertici a quattro gambe	42
3.7	Sviluppi al primo ordine in p^2	46
3.7.1	Sviluppo del propagatore	47
3.7.2	Sviluppo dei vertici a tre gambe	48
3.7.3	Calcoli supplementari	50

4	Criticità ad albero	51
4.1	Studio della gap-equation	51
4.2	Singularità del propagatore P	54
4.2.1	Determinante	54
4.2.2	Formula completa per $P(0)$	55
4.3	Studio di $P(0) \mathbb{F}Ep$	57
5	Criticità ad un loop	61
5.1	Equazioni del moto	61
5.2	Il riassorbimento delle divergenze	62
5.3	Valore di aspettazione di Ψ_α	63
5.3.1	Equazioni del moto all'ordine N^{-1}	63
5.4	Correlazione energetica	64
5.5	Singularità di h_α	69
5.5.1	Un esempio di cancellazione	72
5.6	Relazioni di scala	73
5.7	Un ulteriore cancellazione	74
5.7.1	Propagatore e vertici a momento nullo	75
5.7.2	Una regola di derivazione	76
5.7.3	Cancellazione	76
5.8	Calcolo delle divergenze logaritmiche	77
5.9	Correzione all'esponente critico del calore specifico	80
5.10	Correlazione energetica	81
5.11	Conclusioni	83
A	Sistema in dimensioni basse	85
A.1	Equazioni del punto sella	86
A.1.1	Studio delle equazioni del punto sella	87
A.2	Soluzione esatta monodimensionale per $N=3$	88
B	Integrali di loop	91
	Bibliografia	93

Simboli e notazioni

Faremo largo uso delle seguenti notazioni. Poniamo per definizione:

$$\begin{aligned} d\vec{p} &= \frac{\prod_{i=1}^d dp_i}{(2\pi)^d}, \\ \delta(\vec{p}) &= (2\pi)^d \prod_{i=1}^n \delta(p_i), \end{aligned} \quad (1)$$

essendo d le dimensioni dello spazio con cui abbiamo a che fare, nel nostro caso avremo $d = 2$. Ambienteremo la teoria su di un reticolo (R) quadrato bidimensionale; avremo quindi a che fare con grandezze definite sui siti (s_x), e con grandezze definite sui links ($l_{x,\mu}$). Diamo la definizione di trasformata di Fourier per queste quantità che indichiamo rispettivamente con $s(\vec{p})$ e $l_\mu(\vec{p})$:

$$\begin{aligned} s(\vec{p}) &= \sum_{\vec{x}} e^{i\vec{p}\vec{x}} s_x, \\ l_\mu(\vec{p}) &= \sum_{\vec{x}} e^{i\vec{p}(\vec{x} + \frac{\vec{\mu}}{2})} l_{x,\mu}. \end{aligned} \quad (2)$$

Queste relazioni si invertiranno in maniera solita, in particolare:

$$\begin{aligned} s_x &= \int d\vec{p} e^{-i\vec{p}\vec{x}} s(\vec{p}), \\ l_{x,\mu} &= \int d\vec{p} e^{-i\vec{p}(\vec{x} + \frac{\vec{\mu}}{2})} l_\mu(\vec{p}). \end{aligned} \quad (3)$$

Dato un campo ϕ definito sugli elementi del reticolo, useremo delle espressioni formali per indicare la somma su tutte le configurazioni possibili:

$$\int d\phi := \prod_{\vec{x}} \int d\mu(\phi_{\vec{x}}), \quad (4)$$

con $d\mu(\phi_x)$ misura caratteristica del campo. Questa può avere supporto discreto (come per il modello di Ising, o Potts), o continuo. Per $O(N)$ si ha:

$$d\mu(\vec{s}) = \prod_{i=1}^N ds_i \delta\left(\sum_{i=1}^N s_i^2 - 1\right). \quad (5)$$

Questo lavoro è caratterizzato da $W(x)$:

$$W(x) = \frac{2}{p} \left(\frac{x}{2}\right)^p - \frac{2^{1-p}}{p}, \quad (6)$$

quando scriveremo $W^{(n)} = \frac{d^n W(\vec{p}^0)}{(dx)^n}$, sarà implicito il fatto che valuteremo questa quantità in \vec{p}^0 , valore stabilito dalle equazioni del punto sella (3.23).

In una teoria su reticolo si definisce:

$$\widehat{x}^2 = 4 \sin^2 \frac{x}{2}, \quad (7)$$

che si generalizza per una quantità vettoriale (\vec{x}) in:

$$\widehat{x}^2 = \sum_{\mu=1}^d \widehat{x}_\mu^2 = \sum_{\mu=1}^d 4 \sin^2 \frac{x_\mu}{2}. \quad (8)$$

Capitolo 1

Introduzione al modello

Un modello su reticolo è costituito in via del tutto generale, da campi definiti sui siti (ϕ_x^α) , o sui links $(\phi_{x,\mu}^\alpha)$ con una misura $d\mu(\phi)$ che ne determina gli stati accessibili. Un'azione $S[\phi]$ è un funzionale dei campi introdotti, fornisce l'energia che il sistema manifesta per una data configurazione.

Sostanzialmente si discriminano i modelli [1] a seconda che il campo locale sia un vettore N dimensionale di norma unitaria libero di assumere qualsiasi direzione, da quelli in cui il campo locale è libero di assumere soltanto un numero discreto di configurazioni; a questi si aggiunge una terza possibilità (modello *SOS*), in cui il campo può variare sugli interi.

Si recupera la statistica del sistema ammettendo che la probabilità di una data configurazione (ϕ) sia (misura di Boltzman):

$$P[\phi] = \frac{e^{-S[\phi]}}{Z},$$
$$Z = \int d\phi e^{-S[\phi]}, \tag{1.1}$$

dove con $d\phi$ [11] intendiamo indicare la somma su tutte le possibili configurazioni del sistema (5).

Facendo il limite termodinamico, si manda la taglia del reticolo all'infinito ($V \rightarrow \infty$). Questo è significativo perchè si passa ad un sistema con infiniti gradi di libertà. La (1.1) diventa soltanto una scrittura formale e si possono osservare transizioni di fase, ovvero dei comportamenti non analitici per $F = W[0]$, energia libera (definita sotto).

Individuata una transizione di fase, si vuole determinare tutte le quantità universali che la caratterizzano, ovvero tutte quelle grandezze che ci aspettiamo non dipendere da dettagli microscopici come la forma del reticolo. Esempi di queste grandezze sono gli esponenti critici che caratterizzano *quantitativamente* la termodinamica del sistema al punto critico. La plausibilità di questo argomento è suggerita dal gruppo di rinormalizzazione (RG), che porta in maniera naturale al concetto di universalità; una classe di universalità viene messa in corrispondenza con i punti che fluiscono verso un

punto fisso del RG. Lo studio del RG in un intorno del punto fisso fornisce tutte le quantità comuni a tutti i modelli, primo fra tutti gli esponenti critici [2] [8].

1.1 Funzionali generatori

1.1.1 $Z[J]$ e $W[J]$, sviluppi perturbativi

Con procedimenti standard, seguendo per esempio [8] o [11], introduciamo i seguenti funzionali:

$$Z[J] = \int d\phi e^{-S[\phi]+J\phi}, \quad (1.2)$$

$$W[J] = \log Z[J]. \quad (1.3)$$

Introdotte le correlazioni dei campi secondo la misura di probabilità (1.1):

$$Z^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{Z[0]} \int d\phi \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) e^{-S[\phi]}, \quad (1.4)$$

si ha:

$$Z^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{Z[0]} \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \cdots \frac{\delta}{\delta J(x_n)} Z[0]. \quad (1.5)$$

Dalle precedenti possiamo sviluppare $Z[J]$ come (ponendo $Z[0] = 1$):

$$Z[J] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int dx_1 dx_2 \cdots dx_n Z^{(n)}(x_1 \cdots x_n) J(x_1) \cdots J(x_n). \quad (1.6)$$

Sviluppiamo in modo analogo $W[J]$:

$$W[J] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int dx_1 dx_2 \cdots dx_n W^{(n)}(x_1 \cdots x_n) J(x_1) \cdots J(x_n). \quad (1.7)$$

Le correlazioni dei campi $W^{(n)}$ hanno la proprietà (*cluster property*) di essere connesse nel senso che:

$$W^{(n)}(x_1, \dots, x_t, y_{t+1}, y_n) \rightarrow 0, \quad (1.8)$$

se

$$\text{Min}_{i,j} |x_i - y_j| \rightarrow \infty. \quad (1.9)$$

Ciò è conseguenza del fatto che nel limite termodinamico W è una quantità estensiva (contrariamente avremo correzioni che scalano come $\frac{1}{L}$), ovvero:

$$W[J_a + J_b] = W[J_a] + W[J_b], \quad (1.10)$$

se J_a e J_b hanno supporti, la cui intersezione è vuota. Questa proprietà è condivisa con la funzione termodinamica *energia libera* (F); in maniera

canonica [18] si identifica quindi $W[J]$ con l' energia libera di un sistema statistico di spin in un campo magnetico $H = J$. L' energia libera è costituita dall' energia del sistema (misura di Boltzman), e dall' entropia dello stesso ($d\phi$). Fatta questa posizione tutta la termodinamica viene recuperata iterando note relazioni sui funzionali introdotti.

In un linguaggio diagrammatico $W^{(n)}$ possono essere pensati come diagrammi connessi, mentre $Z^{(n)}$ contengono tutti i diagrammi possibili; nella definizione di W , tutti i diagrammi sconnessi vengono risommati tramite il logaritmo.

I funzionali $W[J]$ e $Z[J]$, rappresentano inoltre il punto di partenza (ma sostanzialmente anche quello d' arrivo) di una teoria perturbativa. Supponiamo di dividere in modo naturale $S[\phi]$ in una parte quadratica nei campi più un resto di ordine superiore:

$$-S[\phi] = -\frac{1}{2}K[\phi] - V[\phi]. \quad (1.11)$$

Abbiamo trascurato parti lineari perchè queste possono essere messe a zero tramite una traslazione dei campi attorno ai loro valori medi:

$$\phi' = \phi - \langle \phi \rangle. \quad (1.12)$$

Questa non è un' operazione del tutto scontata, per il fatto che $\langle \phi \rangle$ è qualcosa che controlliamo soltanto perturbativamente. Ci si convince di questo fatto se si tiene conto che il valore di aspettazione dei campi lo si può ottenere tramite l' equazione implicita:

$$\frac{\delta\Gamma[\psi]}{\delta\psi_\alpha} = 0, \quad (1.13)$$

con $\Gamma[\psi]$ introdotto a breve (1.16) noto soltanto perturbativamente.

Nota la formula dell' integrazione gaussiana possiamo calcolare:

$$\begin{aligned} Z_0[J] &= \int d\phi e^{-\frac{1}{2}K[\phi]+J\phi} \\ &\sim (\det K)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}K^{-1}[J]} \\ &= e^{\frac{1}{2}(K^{-1}[J]-\text{tr} \log K)}. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Utilizzando allora la (1.5) possiamo scrivere:

$$Z[J] = \int d\phi e^{-S[\phi]+J\phi} = e^{-V[\frac{\delta}{\delta J}]} Z_0[J]. \quad (1.15)$$

Uno sviluppo perturbativo in V considera soltanto i primi contributi (fino a un dato ordine) del precedente esponenziale, troncando di fatto la serie.

Non sempre uno sviluppo di questo tipo è possibile o utile. In questo lavoro si è utilizzata una tecnica (sviluppo in N^{-1}) che svincola la necessità di avere V piccolo (intuitivamente questa è una condizione per considerare un numero finito di termini nella (1.15)), a scapito di introdurre dei campi ausiliari.

1.1.2 $\Gamma[\psi]$ o potenziale termodinamico

Introduciamo ora il generatore dei vertici propri $\Gamma[\psi]$. Questo si ottiene trasformando secondo Legendre $W[J]$.

$$W[J] - J\psi + \Gamma[\psi] = 0, \quad (1.16)$$

con $\psi = \psi[J]$ ricavato implicitamente dalla relazione:

$$J = \frac{\delta\Gamma[\psi]}{\delta\psi}, \quad (1.17)$$

che equivale a dire che la (1.16) rimane stazionaria sotto variazione di ψ a J fissato.

Portando avanti l' analogia termodinamica abbiamo che la trasformata di Legendre dell' energia libera definisce il potenziale termodinamico o funzione di Gibbs $G[M]$, con M magnetizzazione del sistema: individueremo quindi canonicamente $\Gamma[\psi]$ con il potenziale termodinamico, od azione effettiva del nostro sistema. In genere $\Gamma[\psi]$ è noto soltanto perturbativamente; questo è legato alla difficoltà dell' invertire la relazione (1.17) ed alla conoscenza perturbativa che uno ha di $W[J]$. Tuttavia è fondamentale capire il comportamento di questa funzione per spiegare fenomeni importantissimi nella teoria dei fenomeni critici o delle particelle elementari, come la rottura spontanea della simmetria.

Sviluppando il funzionale $\Gamma[\psi]$:

$$\Gamma[\phi] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int dx_1 dx_2 \cdots dx_n \Gamma^{(n)}(x_1 \cdots x_n) \Psi(x_1) \cdots \Psi(x_n), \quad (1.18)$$

abbiamo che $\Gamma^{(n)}$ rappresentano le funzioni di correlazione *one-particle-irreducible*, canonicamente rappresentabili come grafici connessi, con la proprietà che restano tali se una linea interna del grafico (ovvero un propagatore contratto tra due vertici) viene tagliata. $\Gamma^{(2)}$ può essere pensato come l' inverso del propagatore effettivo della teoria, contenente i contributi radiativi, che ci fornisce quindi le correzioni alla funzione a due punti dei campi.

Abbiamo già accennato che il limite $V \rightarrow \infty$, si presenta delicato. Potremmo infatti assistere ad una rottura spontanea della simmetria. Questa si manifesta attraverso una perdita dell' analiticità dell' energia libera (1.3), ed è particolare dell' avere infiniti gradi di libertà. In tal caso il sistema presenta fasi macroscopicamente differenti al variare di un parametro esterno, tipicamente la temperatura. Un ferromagnete in tre dimensioni passa da una fase disordinata ad una in cui gli spin mostrano ordine a lungo range per $\beta > \beta_c$. Il parametro d' ordine di questa transizione è la magnetizzazione. Seguendo [11] potremmo dire di essere in presenza di una transizione di fase di “ n -esima specie” se l' energia libera è differenziabile rispetto un parametro esterno $n - 1$ volte ma la derivata n -esima mostra delle discontinuità.

Di fatto ci si limita a definire transizioni di prima e seconda specie. Queste ultime sono di gran lunga le più interessanti: infatti, pensando sempre all'esempio di un ferromagnete abbiamo che al punto critico la magnetizzazione è continua ma diverge la suscettività; abbiamo cioè un campo locale la cui correlazione diverge. Questo è il punto di partenza per implementare il RG, a partire per esempio da processi di decimazione (Kadanoff).

Possiamo leggere la rottura della simmetria direttamente sul potenziale termodinamico $\Gamma[M]$. Supponiamo per esempio di poter scrivere uno sviluppo analitico per questa quantità:

$$\Gamma[M] = \frac{r(T)}{2}M^2 + \frac{u(T)}{4}M^4 + \dots, \quad (1.19)$$

con u positivo. Se $r > 0$ esiste un solo punto stazionario per il potenziale che è $M = 0$, mentre se $r(T)$ è strettamente negativo $M = 0$ diventa un massimo locale, ovvero una fase metastabile. La fase stabile è data da $M = \pm M_s$, tale che:

$$M_s^2 = -\frac{r(T)}{u(T)}. \quad (1.20)$$

Abbiamo quindi una transizione continua per T_c tale che $r(T_c) = 0$. Supponiamo di poter sviluppare analiticamente r in un intorno della criticità, allora:

$$\Gamma[M] = -\frac{r_0}{2}(T_c - T)M^2 + \frac{u(T_c)}{4}M^4 + \dots, \quad (1.21)$$

e per $T < T_c$ infine:

$$M_s \sim (T_c - T)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.22)$$

Troviamo così una non analiticità della magnetizzazione rispetto a un parametro esterno, anche avendo supposto tutte le quantità sviluppate analitiche.

1.2 Il modello $O(N)$

Utilizzato per lo studio di fenomeni magnetici viene definito dai seguenti elementi (azione e misura):

$$S = \sum_{\langle x, x+\mu \rangle} \beta \vec{\sigma}_x \vec{\sigma}_{x+\mu},$$

$$d\mu(\vec{\sigma}) = \delta(\vec{\sigma}^2 - 1). \quad (1.23)$$

Il campo σ è vincolato ad appartenere alla sfera $N - 1$ -dimensionale.

Questo modello si può ottenere a partire da un campo autointeragente con:

$$d\mu(\phi) = d^N \phi e^{-\frac{g}{4}(\phi^2)^2 - \frac{\mu^2}{2}\phi^2 + c}. \quad (1.24)$$

Se scelgo infatti $\mu^2 = -gN$ e mando $g \rightarrow \infty$ con $c(g, N)$, riesco a fattorizzare dalla precedente una $\delta(\phi^2 - N)$.

Ovviamente il gruppo di simmetria è $O(N)$ o delle rotazioni, questo mappa la sfera supporto degli spin in se stessa. Dicendo questo intendiamo dire che dato R generica rotazione allora:

$$\begin{aligned} S[R\vec{\sigma}] &= S[\vec{\sigma}], \\ d\mu(R\vec{\sigma}) &= d\mu(\vec{\sigma}). \end{aligned} \quad (1.25)$$

Se volessimo fare una teoria di gauge su reticolo, allora renderemmo locale l'azione del gruppo (R_x), introducendo dei campi di gauge.

Si presentano fenomenologie totalmente diverse a seconda che $O(N)$ sia abeliano ($N \leq 2$) o no. Per $N = 1$ abbiamo il celebre modello di Ising di cui si dimostra esistere una fase ordinata a basse temperature (β grande) [12]. Per $N = 2$ è ancora presente una fase quasi-ordinata (la correlazione decade polinomialmente). Nel caso in cui $N > 2$ non si osserva un sistema ordinato, ma è ancora in discussione la possibilità di una qualche transizione di fase, ovvero l'esistenza di qualche canale critico il cui parametro d'ordine, visto il teorema di Mermin, Wagner, Coleman non abbia un gruppo di simmetria continuo.

1.3 Generalizzazioni

Si profila una possibile generalizzazione della (1.23), in cui al termine lineare di interazione $\vec{\sigma}_x \vec{\sigma}_{x+\mu}$ si sostituisce un termine non lineare:

$$\begin{aligned} S[\sigma] &= \sum_{\langle x, x+\mu \rangle} \beta F(\vec{\sigma}_x \vec{\sigma}_{x+\mu}), \\ d\mu(\vec{\sigma}) &= \delta(\vec{\sigma}^2 - 1). \end{aligned} \quad (1.26)$$

Nell'analisi svolta in [1], dove si ricavano relazioni di dualità tra vari modelli, è importante assumere condizioni di generalità per la funzione F ; anzi proprio in questa referenza compare esplicitamente la forma del potenziale che andremo a studiare.

Queste generalizzazioni servono pure a descrivere particolari transizioni di fase nell'ambito della materia condensata: per esempio il modello RP^{N-1} , descritto nella prossima sezione, viene utilizzato per simulare cristalli liquidi o alcune transizioni di fase in cui è presente un'orientazione.

1.3.1 RP^{N-1} e $RP^{N-1} - O(N)$

Se consideriamo l'azione:

$$\begin{aligned} S[\vec{\sigma}] &= \frac{\beta_T}{2} \sum_{x, \mu} (\vec{\sigma}_x \vec{\sigma}_{x+\mu})^2, \\ d\mu(\vec{\sigma}) &= \delta(1 - \vec{\sigma}^2), \end{aligned} \quad (1.27)$$

siamo in presenza di quello che viene definito modello RP^{N-1} . Come nel modello $O(N)$ la variabile di sito è vincolata ad appartenere alla sfera $N-1$ -dimensionale, quindi il sistema possiede il gruppo di simmetria globale delle

rotazioni. In aggiunta al modello $O(N)$ è presente una simmetria locale, che agisce su uno spin rovesciandolo o mantenendolo invariato (il gruppo discreto che descrive questa operazione è Z_2):

$$\begin{aligned}\vec{\sigma}_x \rightarrow \vec{\sigma}'_x &= \epsilon_x \vec{\sigma}_x \\ \epsilon_x &= \pm 1,\end{aligned}\tag{1.28}$$

di modo che:

$$S[\epsilon\sigma] = S[\sigma].\tag{1.29}$$

È da notare che sia l'azione (1.27) che (1.23) hanno la medesima forma in un limite al continuo ingenuo del tipo:

$$S_c[\vec{\sigma}] = a \sum_{\mu} \int dx \left(\partial_{\mu} \sigma(x) \right)^2.\tag{1.30}$$

Usiamo l'aggettivo ingenuo perchè in assenza di criticità a priori $\vec{\sigma}_x$ e $\vec{\sigma}_{x+\mu}$ non hanno nulla a che fare, è sbagliato considerarli circa uguali, approssimazione fatta per ottenere l'espressione appena scritta. Tanto più che come vedremo nel caso in cui discuteremo interazioni non lineari monodimensionali il campo σ descrive un campo stocastico per il quale la (1.30) perde ogni significato.

Per vari motivi si è soliti studiare un mix delle due azioni appena introdotte (modello $O(N) - RP(N-1)$):

$$S[\vec{\sigma}] = \beta_V \sum_{\mu} \vec{\sigma}_x \vec{\sigma}_{x+\mu} + \frac{\beta_T}{2} (\vec{\sigma}_x \vec{\sigma}_{x+\mu})^2,\tag{1.31}$$

in cui si crea una miscela tra le due simmetrie in gioco, miscela regolata dal parametro η :

$$\eta = \frac{\beta_T}{\beta_V}.\tag{1.32}$$

In funzione di questo parametro si ottengono possibili transizioni di fase, riportiamo alcuni risultati.

In [3] viene studiata questa azione col metodo del punto sella, nello spazio dei parametri (β_V, β_T) si trova una linea continua descrittiva di transizioni di prima specie che tagliano l'asse $\beta_V = 0$ per $\beta_T = 0.956$. Questa linea continua degenera in un punto in cui si è in presenza di una transizione continua.

In [7] viene confrontato uno sviluppo in N^{-1} con dei risultati esatti ottenuti in una dimensione. Per $N = \infty$ viene ottenuto il diagramma delle fasi (particolarmente ricco) nel piano (β_V, β_T) , con particolare attenzione anche al caso in cui $\beta_V = 0$. Nel caso monodimensionale si dimostra l'inesistenza di qualsiasi transizione di fase e si spiega come compaiono nel limite $N \rightarrow \infty$, studiando gli zeri della funzione di partizione Z . Si trova un meccanismo

analogo a quello che si osserva quando si va a fare un limite termodinamico ($V \rightarrow \infty$). Abbiamo visto che le transizioni di fase sono tipiche dell' avere a che fare con infiniti gradi di libertà, con il limite termodinamico abbiamo infiniti siti, mentre con un limite $N \rightarrow \infty$ abbiamo infinite componenti per ciascun campo. Nel caso bidimensionale si dimostra l' impossibilità della rottura della simmetria $O(N)$ e si afferma che ogni funzione di correlazione deve decadere almeno algebricamente. In ogni dimensione si afferma che per $\beta_V = 0$ non si può rompere la simmetria Z_2 .

1.3.2 Interazione altamente non lineare

In questo lavoro ci proponiamo di studiare un' interazione F della forma:

$$F(x) = ax^p + b, \quad (1.33)$$

Con a e b parametri già specificati e che saranno ripresi a suo tempo. Come nel modello $O(N) - RP(N-1)$, il parametro discriminante il comportamento macroscopico è il rapporto $\eta = \frac{\beta_V}{\beta_T}$, così in questo caso ci aspettiamo che eventuali fenomenologie del sistema (transizioni di fase), siano dettate da p . Ci aspettiamo quindi diagrammi di fase analoghi, avremo linee, rappresentanti transizioni di fase di prima specie che finiscono in punti descrittivi transizioni di fase di seconda specie.

Tuttavia il dettaglio tecnico di non avere semplicemente una F quadratica è rilevante. Non possiamo linearizzare infatti l' azione in σ utilizzando l' integrale gaussiano nella maniera solita:

$$e^{a\vec{\sigma}_x\vec{\sigma}_{x+\mu} + \frac{b}{2}(\vec{\sigma}_x\vec{\sigma}_{x+\mu})^2} \sim \int d\alpha_{x,\mu} e^{a\vec{\sigma}_x\vec{\sigma}_{x+\mu} - \frac{1}{2b}\alpha_{x,\mu}^2 + \alpha_{x,\mu}\vec{\sigma}_x\vec{\sigma}_{x+\mu}}, \quad (1.34)$$

ma si ripiega di fatto nell' introdurre due campi ausiliari definiti su ciascun link (che a tempo debito chiameremo $\rho_{x,\mu}$ e $\lambda_{x,\mu}$) utilizzando l' identità:

$$\delta(x) \sim \int dy e^{yx}. \quad (1.35)$$

Per testare il nostro metodo di linearizzazione, potremmo provare a linearizzare l' azione (1.31) utilizzando non il metodo (1.34) ma quello appena esposto. Essendo W quadratica si può integrare esattamente uno dei due campi (per intenderci quelli che poi chiameremo ρ) e riottenere formalmente la stessa espressione linearizzata in (1.34).

Non è la prima volta che vengono considerate W non polinomiali. In [6] viene risolto esattamente il sistema in una dimensione per W arbitrario (nella referenza h) e vengono studiate nuove (infinite) classi di universalità, ovvero diversi possibili modi di tendere ad un limite continuo, a seconda delle varie tipologie di h . I parametri discriminanti di questa funzione sono i minimi assoluti. Per esempio recuperiamo la classe di universalità del

modello $O(N)$ se prendiamo h con minimo assoluto in uno. In un passaggio al continuo questi campi vengono pensati descrivere un processo diffusivo (per la classe di universalità che abbiamo chiamato $O(N)$) a cui si aggiunge un altro processo per cui “al punto” che diffonde su $S(N-1)$ è concesso di fare un salto con distribuzione di probabilità [5]:

$$\begin{aligned} \delta(\theta - \theta_0), \\ \cos \theta_0 = t_0, \end{aligned} \tag{1.36}$$

dove t_0 è il nuovo minimo di h . Questa nuova fenomenologia si comprende facilmente; infatti il nuovo minimo si troverà a competere col minimo in uno, tuttavia la misura avvantaggerà il primo per cui sono a disposizione pure tutte le configurazioni date dagli angoli azimutali. È possibile quindi tendere ad un limite continuo (con $\frac{1}{\beta} \rightarrow 0$ in una dimensione) con due spin che guardano in due direzioni differenti, tale che $\Delta\theta = \theta_0$.

1.4 Peculiarità del limite $N \rightarrow \infty$

Attaccheremo il nostro modello con una tecnica classica della teoria di campo che è uno sviluppo in N^{-1} . Un compendio praticamente completo su questi sviluppi con riguardo anche alla definizione su reticolo viene data in [15].

Da questo sviluppo potrebbero derivare dei problemi, come già sottolineato in [3], dove si trova una transizione di fase per il modello $RP(N-1) - O(N-1)$. In questa referenza viene esplicitamente affermato che la divergenza del calore specifico a correlazione *spin-spin* finita è peculiare dell'essere in presenza di infiniti gradi di libertà per un numero finito di siti. Su questo argomento è da citare pure [7], dove si calcola esattamente il modello in una dimensione e si figurano transizioni di fase, di prima e seconda specie, che sono strettamente delle patologie dell'aver preso il limite $N \rightarrow \infty$.

Da questo punto di vista potrebbero nascere problemi per quanto riguarda la commutatività tra i due limiti in gioco, $N \rightarrow \infty$ e $\beta \rightarrow \beta_c$. Per esempio in [17] ci si figura di supporre uno sviluppo in serie di una data osservabile fisica troncata all'ordine k :

$$f^{(k)}(\beta, N) = \sum_{i=0}^k f_i(\beta) N^{-i}, \tag{1.37}$$

definendo lo scarto (R) di questa quantità in modo ovvio poniamo:

$$R_N^{(k)}(f, \beta) := \frac{1}{|f^{ex}(\beta, N)|} |f^{ex}(\beta, N) - f^{(k)}(\beta, N)|, \tag{1.38}$$

dove indichiamo con f^{ex} il valore esatto (che potremmo pensare di ottenere per esempio con una simulazione ottimale). Per definizione:

$$R_N^{(k)}(f, \beta) \leq \frac{c^{(k)}(\beta)}{N^{k+1}}. \tag{1.39}$$

Supponiamo che c presenti qualche non analiticità in β , (è stato figurato la possibilità che ciò avvenga per $\beta \rightarrow 0$ in due dimensioni), allora non viene garantita la convergenza di $f^{(k)}$ a f^{ex} , nel senso che per N fissato e $\beta \rightarrow 0$ lo scarto possibile diverge. Questo si traduce pure nell' affermare che i due limiti in gioco non commutano:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} f(N, \beta) \neq \lim_{\beta \rightarrow 0} f(N, \beta). \quad (1.40)$$

1.4.1 Funzionali generatori all' ordine N^{-1}

Tecnicamente in uno sviluppo di questo tipo si cerca di fattorizzare completamente dall' azione del sistema un parametro (N appunto) adimensionale, da far tendere in un secondo momento all' infinito. Come vedremo nel nostro caso questo è stato fatto introducendo dei campi ausiliari che ci hanno permesso di integrare i campi fisici (N -dimensionali), eliminando la dipendenza implicita di questo parametro.

In maniera del tutto generale si propone quindi un' azione con funzionale generatore dato da:

$$Z[J] = \int d\phi e^{-N(S[\phi] - J\phi)}. \quad (1.41)$$

Stiamo quindi iterando uno sviluppo semiclassico (si pensi di sostituire \hbar^{-1} a N). Si parte con il marchingegno perturbativo. Si cercano i campi che rendono stazionaria l' azione (1.41):

$$\frac{\delta S[\phi_c]}{\delta \phi_\alpha} = J_\alpha, \quad (1.42)$$

per poi sviluppare attorno a queste soluzioni ottenendo vertici e propagatore della teoria.

$$S[\phi] = S[\phi_c] + \frac{1}{2} \frac{\delta^2 S[\phi_c]}{\delta \phi \delta \phi} (\phi - \phi_c)^2 + \frac{1}{3!} \frac{\delta^3 S[\phi_c]}{\delta \phi \delta \phi \delta \phi} (\phi - \phi_c)^3 + \dots \quad (1.43)$$

A questo punto conviene ridefinire i campi, di modo da poter trattare il propagatore (inverso della parte quadratica $\delta^2 S$) come un oggetto di ordine uno, e poter fattorizzare i vertici con un termine del tipo $\frac{1}{N^{\frac{1}{2}}}$. In altre trattazioni in cui si cerca la statistica dei campi integrati, non si procede in questo modo ma si analizzano dettagliatamente i fattori di simmetria dei diagrammi di Feynman della teoria per capire quali vengono soppressi nel limite in cui $N \rightarrow \infty$. A tal proposito si veda per esempio come viene trattata l' interazione $\lambda \phi^4$ in [11]. Guardando la (1.43) ci si accorge di come uno sviluppo in N^{-1} diventi equivalente ad uno sviluppo in loop, le equazioni del punto sella rappresentano quindi il sistema all' ordine zero. Se consideriamo un diagramma $G(k, l)$ con k gambe esterne e l loop questo scalerà come:

$$G(k, l) \sim \frac{1}{N^{k+l-1}}. \quad (1.44)$$

Noi calcoleremo il valore di aspettazione dell'energia ad un loop ($\sim \frac{1}{N}$) e una funzione a due punti a un loop ($\sim \frac{1}{N^2}$). Tutto questo viene descritto estensivamente nel seguito quando applicate al nostro modello. Diamo soltanto i funzionali generatori delle quantità all'ordine zero ed al prim'ordine [8].

La soluzione classica è quella che minimizza l'azione con il termine di corrente. Risolvendo cioè:

$$\frac{\delta S[\phi]}{\delta \phi_\alpha} = J_\alpha, \quad (1.45)$$

troviamo le soluzioni classiche del sistema:

$$\phi_c = \phi_c(J). \quad (1.46)$$

Definendo:

$$W[J] = \frac{1}{N} \log Z[J], \quad (1.47)$$

che rende il primo termine di ordine uno, otteniamo:

$$\begin{aligned} W[J] &= W_0[J] + \frac{1}{N} W_1[J], \\ W_0[J] &= -S[\phi_c(J)] + \phi_c(J)J, \\ W_1[J] &= -\frac{1}{2} \left[\text{tr} \log \frac{\delta^2 S[\phi_c(J)]}{\delta \phi \delta \phi} - \text{tr} \log \frac{\delta^2 S[\phi_c(0)]}{\delta \phi \delta \phi} \right]. \end{aligned} \quad (1.48)$$

In particolare è stata garantita la condizione di normalizzazione:

$$Z[J=0] = 1. \quad (1.49)$$

Trasformando secondo Legendre i precedenti funzionali troviamo il potenziale termodinamico. La magnetizzazione è stata definita come:

$$\psi_\alpha = \frac{\delta W}{\delta J_\alpha}, \quad (1.50)$$

otteniamo:

$$\psi = \phi_c(J) + O\left(\frac{1}{N}\right), \quad (1.51)$$

da cui ricavo il potenziale termodinamico all'ordine $\frac{1}{N}$:

$$\begin{aligned} \Gamma[\psi] &= J[\psi]\psi - W[J[\psi]], \\ \Gamma[\psi] &= S[\psi] + \frac{1}{2N} \text{tr} \left[\log \frac{\delta^2 S[\psi]}{\delta \psi \delta \psi} - \log \frac{\delta^2 S[0]}{\delta \psi \delta \psi} \right] + O\left(\frac{1}{N^2}\right) \end{aligned} \quad (1.52)$$

Per la conoscenza del potenziale termodinamico a questo ordine ci basta conoscere la magnetizzazione ad albero; infatti data la definizione (1.16) si ha che questa è stazionaria per una variazione di J a ψ fissato, ne segue che ci basta conoscere la relazione $J = J[\psi]$ all'ordine $n-1$ per poter scrivere il potenziale termodinamico all'ordine n . La correzione successiva alla magnetizzazione resta comunque un oggetto non banale, e altro non è che la correzione al valore di aspettazione dei campi (corrente nulla).

1.4.2 Sviluppo in N^{-1} e teoria di campo medio

Sfogliando la letteratura citata ci si accorge come eventuali comportamenti critici osservati nel limite $N \rightarrow \infty$ siano i comportamenti critici tipici del campo medio. Si veda per esempio il pluricitato [3] oppure [4]; entrambe trovano un comportamento critico per la correlazione energetica con un coefficiente critico del campo medio.

Questo non è un caso, dal momento che si dimostra [8] l'equivalenza tra un approssimazione di campo medio e uno sviluppo semiclassico ad albero.

Supponiamo di avere un sistema statistico di spin s_i . Supponiamo inoltre che questi interagiscano con interazione data da:

$$\beta H[s] := S[s] = \sum_{i,j} s_i I_{i,j} s_j. \quad (1.53)$$

Discutere la positività o meno di I equivale ad avanzare considerazioni di ferromagnetismo o meno del sistema; non ci curiamo di questo. Appare naturale tuttavia porre:

$$I_{i,i} = 0. \quad (1.54)$$

Quest'ultima posizione è un qualcosa che differenzia il formalismo canonico dei fenomeni critici da quello di una teoria di campo. Infatti i termini di autointerazione provengono dalla misura $d\mu(s)$ che ho su ciascun link, mentre per il termine di interazione si usa praticamente sempre l'interazione a primi vicini. Si pensi per esempio, a come si ricava il modello $O(N)$ da una teoria $\lambda\phi^4$ definita sui siti con interazione canonica, e facendo poi un opportuno limite. La vasta gamma di fenomenologie possibili derivano quindi dalla scelta di $d\mu(\phi)$.

Possiamo linearizzare l'interazione introducendo un campo ausiliario, e utilizzando la formula dell'integrale gaussiano:

$$e^{-\frac{1}{2}\sum_{i,j} I_{i,j} s_i s_j} \sim \int \prod_t dx_t e^{\frac{1}{2}\sum_{i,j} x_i I_{i,j}^{-1} x_j + \sum_i s_i x_i}. \quad (1.55)$$

Scriviamo quindi il funzionale generatore:

$$Z[J] = \int \prod_t dx_t d\mu(s_t) e^{\frac{1}{2}\sum_{i,j} x_i I_{i,j}^{-1} x_j + \sum_i s_i (x_i + J_i)}, \quad (1.56)$$

avendo disaccoppiato gli spin poniamo:

$$e^{f(v)} = \int d\mu(s) e^{sv}, \quad (1.57)$$

e riscriviamo:

$$\begin{aligned} Z[J] &= \int \prod_t dx_t e^{\frac{1}{2}\sum_{i,j} x_i I_{i,j}^{-1} x_j + \sum_i f(x_i + J_i)} \\ &=: \int \prod_t dx_t e^{S[1,x,J]}. \end{aligned} \quad (1.58)$$

In particolare osserviamo come la funzione f sia indifferente alla dimensione del sistema, caratteristica tipica dell' approssimazione di campo medio.

Una prima semplificazione della precedente (1.58) è quella di rimpiazzare x_i con il valore che rende stazionaria l' azione (approssimazione del punto sella):

$$\sum_j I_{i,j}^{-1} x_j + f'(x_i + J_i) = 0, \quad (1.59)$$

In questa approssimazione leggiamo allora nella (1.56) che di fatto l' azione è quella di interazione tra un semplice spin e un campo magnetico effettivo:

$$J_i^{eff} = x_{s,i} + J_i, \quad (1.60)$$

dove abbiamo indicato con $x_{s,i}$ la soluzione del sistema (1.59).

Correzioni a questo procedimento vengono ottenute [8] con le trasformazioni:

$$I_{i,j} \rightarrow \frac{1}{N} I_{i,j}, \quad (1.61)$$

e rimpiazzando ai semplici spin s_i la somma di N spin, indipendenti e con la medesima misura $d\mu(s)$. Così facendo otteniamo una funzione di partizione data da:

$$Z[J] = \int \prod_t dx_t e^{S[N,x,h]} \quad (1.62)$$

con:

$$S[N, x, h] = NS[1, x, h]. \quad (1.63)$$

Dimostriamo così quanto ci eravamo proposti, ovvero che l' ordine zero dello sviluppo della precedente è sostanzialmente un approssimazione di campo medio.

Capitolo 2

Modello non lineare in dettaglio

In questo capitolo introduciamo nello specifico il modello che studieremo. A partire da un'analisi numerica del sistema in questione [14], emergono elementi che fanno pensare ad una possibile transizione di fase a β_c finito.

Questo viene rigorosamente dimostrato da A. D. van Enter e S. B. Shlosman [20]. Questi affermano che in dimensioni superiori a due per p abbastanza grande esiste una transizione di fase di prima specie ad un dato $\beta_c(k, p)$ (2.1). Si modella l'interazione non lineare (2.1) con una buca di potenziale di larghezza $\epsilon(p)$. Questo rende molto l'idea delle forze in gioco per grandi p , dove il supporto delle configurazioni più stabili si restringe; si ha quindi un duetto tra l'energia e l'entropia.

Questi risultati motivano a priori lo studio di questa particolare interazione, e rendono necessario un accurato studio del fenomeno in questione. In particolare cercheremo di discutere la natura della transizione di fase continua in due dimensioni.

2.1 Simulazione Montecarlo per $N = 3$

Consideriamo un sistema statistico di spin in due dimensioni descritto da:

$$\begin{aligned} H &= - \sum_{\langle i, j \rangle} V(\vec{s}_i \vec{s}_j), \\ V(x) &= 2K \left(\frac{1+x}{2} \right)^p \\ \sum_{i=1}^N s_i^2 &= 1. \end{aligned} \tag{2.1}$$

H. W. J. Blöte, W. Guo e H. Hilhorst, implementano numericamente questo modello per $N = 3$. Riproponiamo i loro risultati.

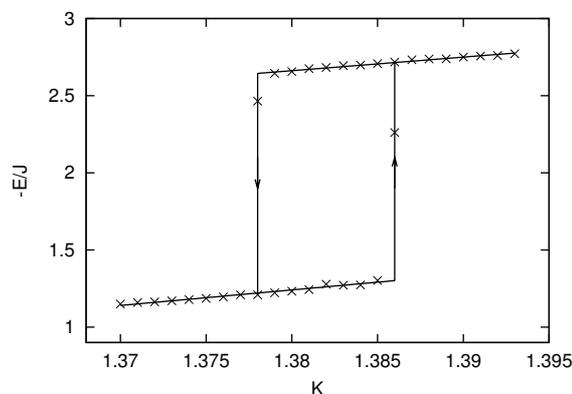


Figura 2.1: Energia in funzione di K . L'isteresi potrebbe derivare da problemi legati alla simulazione.

Essendo V un'interazione a corto range non ci si aspetta di osservare criticità per la magnetizzazione del sistema. Viene naturale indagare altre variabili, possibilmente scalari come l'energia. Plottando l'energia E in funzione di K per piccoli valori del parametro critico (p circa uno) non vengono trovati elementi che suggeriscano una transizione di fase. Tuttavia per p molto grande (circa venti), viene osservato un brusco salto dell'energia (fig. 2.1). Questo lascia presagire la possibilità di una discontinuità in uno stretto limite termodinamico; saremmo quindi in presenza di una transizione di prima specie. Scendendo col valore di p , questa discontinuità si attenua fino a spegnersi; plausibilmente ciò accade in corrispondenza di una transizione continua.

Studiando semplicemente l'energia non si riesce bene a isolare la fase continua. Quello che gli autori fanno è di andare a studiare il calore specifico del sistema (C). In particolare dato $C(K, p)$ si considera $C(p) := \text{Max}_K C(K, p)$. Viene poi plottato $\log C(p)$ in funzione di $\log L$. Cosa ci aspettiamo da un'analisi di questo tipo? Per rispondere a questa domanda sono necessarie alcune premesse.

Gli esponenti critici descrivono le quantità termodinamiche al punto critico. In particolare canonicamente si individuano quelli per il calore specifico C , magnetizzazione M e suscettività χ . Detto $t = (T - T_c)/T_c$ e $h = H/T_c$ con H campo magnetico esterno definito:

$$\begin{aligned}
 C &:= -\frac{T}{V} \frac{\partial^2 F}{\partial T^2}, \\
 M &:= -\frac{1}{V} \frac{\partial F}{\partial H}, \\
 \chi &:= \frac{\partial M}{\partial H},
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

poniamo:

$$\begin{aligned}
C_{h=0} &\sim |t|^{-\alpha}, \\
M_{h=0} &\sim (-t)^\beta, \\
M_{t=0} &\sim h^{\frac{1}{\delta}}, \\
\chi_{h=0} &\sim |t|^{-\gamma}, \\
\xi_{h=0} &\sim |t|^{-\nu},
\end{aligned} \tag{2.3}$$

dove abbiamo aggiunto il comportamento della correlazione. Tuttavia nel caso in questione non è il campo σ a presentarsi critico ma l' energia. Per esempio in questa simulazione si riconosce il coefficiente γ di Ising associato però a un calore specifico. Questo è naturale dal momento che ciò che caratterizza una classe di universalità sono gli esponenti critici e non i parametri locali che mostrano questa criticità. Sempre nella visione di Wilson [16] del gruppo di rinormalizzazione, abbiamo che i punti nel bacino di attrazione di un punto fisso descrivono interazioni e parametri d' ordine che a prima vista non hanno nulla a che fare, in realtà presentano il medesimo comportamento critico.

Per il nostro caso in esame scriveremo quindi C nello *stretto* limite termodinamico come:

$$C \sim t^{-\gamma}, \tag{2.4}$$

con $t \sim K - K_c$. Dal momento che ci stiamo ponendo in un contesto di *finite-size*, dobbiamo modificare questa relazione. Questo può avvenire soltanto tramite l' unica grandezza adimensionale caratteristica del sistema che è la quantità $tL^{\frac{1}{\nu}}$, in quanto le due lunghezze significative del sistema sono L , taglia del reticolo, e $t^{-\nu}$ correlazione del parametro d' ordine. Correggiamo quindi la (2.4) con:

$$C \sim t^{-\gamma} f(tL^{\frac{1}{\nu}}). \tag{2.5}$$

Ci aspettiamo che $f(x)$ sia regolare per $x \rightarrow \infty$ (limite termodinamico). Il comportamento regolare di f per $x \rightarrow 0$, è invece tutt' altro che banale, è garantito dal momento che siamo a $d < d^c = 4$, con d^c dimensione critica superiore, oltre la quale intervengono degli operatori (irrilevanti a dimensioni basse) che non garantiscono la regolarità di f . D' altra parte se ammettiamo il comportamento $f(x) \sim x^B$, per piccoli x , il che significa che tendiamo a K_c prima del limite termodinamico, abbiamo:

$$C \sim t^{-\gamma+B} L^{\frac{B}{\nu}}, \tag{2.6}$$

con $t \rightarrow 0$, il calore specifico non può divergere (L finito), dobbiamo però garantire che ciò avvenga nel limite termodinamico; ne segue che $B = \gamma$. Otteniamo infine:

$$C \sim L^{\frac{\gamma}{\nu}} \sim L^{2y-2}, \tag{2.7}$$

dove abbiamo introdotto un nuovo coefficiente y di cui chiariremo presto il significato.

Detto questo possiamo rispondere alla domanda posta. In assenza di transizione di fase abbiamo che il calore specifico rimane costante per grandi L . In presenza di una transizione continua, ci aspettiamo di ottenere una retta con pendenza data da $2y - 2$; in effetti per $p = 16$ circa si osserva la transizione continua (il calore specifico inizia a crescere linearmente per grandi valori di L) caratterizzata da $y = 1.84 \pm 0.05$ (fig. 2.2). Se invece abbiamo una transizione di fase di prima specie, osserviamo che le due fasi del sistema non hanno la medesima correlazione, mi aspetto quindi che le due lunghezze caratteristiche entrino solamente nel calcolo delle ampiezze di fase; rimanendo soltanto L , tra le grandezze a nostra disposizione non possiamo che osservare:

$$C \sim f_i(\nu)L^d = f_i(\nu)L^2, \quad (2.8)$$

dove abbiamo indicato con f_i l'ampiezza di una fase. Per $p > p_c$ si osserva infatti una crescita lineare ma con coefficiente angolare differente, presumibilmente due ($y = 2$).

Blöte e al. notano a questo punto la somiglianza di y con un valore tipico di una transizione del tipo Ising (per il significato di y_h rimandiamo alla prossima sezione):

$$y = y_h = \frac{15}{8}, \quad (2.9)$$

e sottolineando analogie tra la transizione in questione con una transizione liquido-vapore (descritto da un modello di Ising a cui alle variabili di spin si sostituisce l'occupazione o meno di un sito), ipotizzano che la transizione osservata sia di questo tipo.

2.2 Relazioni di scala

Cerchiamo di giustificare la relazione di scala introdotta nella sezione precedente, e chiarire il significato di alcuni simboli introdotti come y_h . Dal momento che un sistema al punto critico si mostra invariante sotto cambio di scala, si possono ottenere alcune relazioni tra i vari esponenti critici. Questa proprietà può essere implementata attraverso un RG nello spazio reale. Un sistema è caratterizzato dalla sua interazione data da $S[\sigma, t, h]$. Raggruppiamo gli spin in blocchi di b^2 (ovvero contenuti in un quadrato di lato b), e assegnamo una regola che permette di associare a tutti questi gradi di libertà (σ_i con $i = 1, \dots, b^2$) uno solo che indichiamo con σ' . Una possibile scelta di questa regola è data per esempio da:

$$\sigma' = \text{sign} \left(\sum_{i=1}^{b^2} \sigma_i \right). \quad (2.10)$$

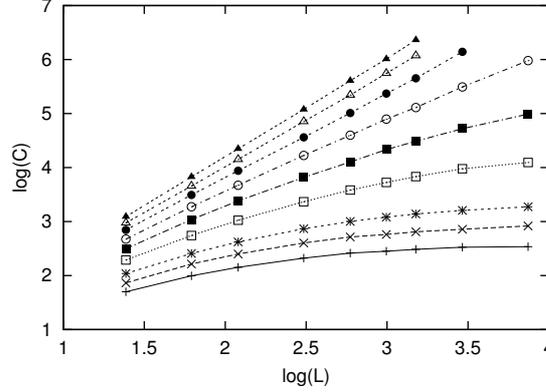


Figura 2.2: Calore specifico in funzione della taglia del sistema. In presenza di una transizione di fase la crescita è lineare (per scale logaritmiche).

Ora l' arte sta nel cercare di integrare tutti i gradi di libertà in modo da poter descrivere il sistema con una nuova interazione $S[\sigma', t', h']$. È chiaro che i campi σ' avranno le medesime simmetrie dei campi σ . Di solito è possibile fare questo a meno di introdurre operatori irrilevanti in un senso precisato in seguito. In un intorno del punto critico, si linearizza il RG e si trovano gli autovalori che vengono chiamati "campi che scalano" (u_t e u_h) che si trasformano come:

$$u_t(t', h') = b^{y_t} u_t(t, h) \quad u_h(t', h') = b^{y_h} u_h(t, h), \quad (2.11)$$

in prima approssimazione si ha:

$$u_t \sim t \quad u_h \sim h, \quad (2.12)$$

(in questo lavoro troveremo un' eccezione a questa semplificazione lineare). I campi u vengono definiti rilevanti se si ha $y > 0$, irrilevanti se $y < 0$ e marginali nel caso restante.

Se studiamo come scala l' energia libera dopo un passaggio del RG troviamo la seguente relazione:

$$F(u_t, u_h) = b^{-d} F(b^{y_t} u_t, b^{y_h} u_h), \quad (2.13)$$

iterando n volte troviamo:

$$F(u_t, u_h) = b^{-nd} F(b^{ny_t} u_t, b^{ny_h} u_h), \quad (2.14)$$

il prefattore proviene dal fatto che abbiamo decimato i gradi di libertà (ridotto quindi il volume). Prendiamo K piccolo di modo che valga ancora l' approssimazione lineare e di modo che:

$$b^{ny_t} u_t = K, \quad (2.15)$$

troviamo allora:

$$f(u_t, u_h) \sim t^{\frac{d}{y_t}} g\left(ht^{-\frac{y_h}{y_t}}\right). \quad (2.16)$$

A partire da questa relazione e supponendo $g(0)$ regolare, troviamo tutti i coefficienti critici in funzione di y_h e di y_t ; di conseguenza si trovano delle relazioni che li legano dette appunto relazioni di scala.

In particolare per i nostri scopi vogliamo calcolare la suscettività:

$$\chi = -\frac{\partial^2 F}{(\partial h)^2} \Big|_{h=0} \sim t^{\frac{d-2y_h}{y_t}} \quad (2.17)$$

da cui leggiamo:

$$\gamma = \frac{2y_h - 2}{y_t}. \quad (2.18)$$

Per concludere quanto detto in precedenza dobbiamo pure dire che vale:

$$\nu = \frac{1}{y_t}. \quad (2.19)$$

2.3 Programma

Vogliamo investigare più in profondità questa transizione di fase. A prima vista urta il fatto che si trovi un comportamento di tipo Ising ($O(1)$) per $N = 3$; d' altra parte questo sarebbe suggerito dal fatto che il parametro d' ordine è uno scalare (l' energia). In questo caso ci si aspetterebbe che $N = 3$ non sia una priorità ma verosimilmente questa transizione dovrebbe essere riscontrata per ogni valore di N . E. Domany, M. Schick e R. H. Swendaen investigando il modello per $N = 2$ [21], trovano che per forti non linearità (p circa 50) si è in presenza di una transizione di fase di prima specie (DSS). Trovano una fase a bassa temperatura a massa nulla, ed una fase ad alta temperatura con correlazioni che decadono esponenzialmente. Blöte e al. [14] pensano che la transizione di fase trovata, debba in qualche modo essere connessa con DSS. Ipotizzano cioè di studiare:

$$S[\vec{\sigma}, K] = \sum_{x,\mu} V[\vec{\sigma}_x \vec{\sigma}_{x+\mu}] + \gamma \sum_x (\sigma_x^z)^2. \quad (2.20)$$

Con γ che si muove da zero a ∞ questa interazione interpola $O(3)$ con $O(2)$. Nel piano (γ, p) , si figura una linea $p = p_c(\gamma)$ sopra la quale si avrebbe una transizione di prima specie, mentre sotto la quale (per $\gamma > 0$) si avrebbe una transizione del tipo Kosterlitz-Thouless (KT). Questa argomentazione estende i risultati ottenuti per $N = 3$ al caso $N = 2$, ma non si capisce cosa ci si dovrebbe aspettare per un N generico.

In una recente pubblicazione [4] si cerca di dare una risposta a questo quesito. Si vuole cercare di ottenere informazioni analitiche riguardo questa transizione. È abbastanza chiaro che avendo a che fare con un potenziale

altamente non lineare, una qualsiasi tecnica perturbativa fallisce. È necessario usare un metodo non perturbativo nei campi σ , che risommi tutti i diagrammi che li coinvolgono. Uno sviluppo in N^{-1} soddisfa questi requisiti; a scapito di introdurre dei campi ausiliari, si linearizzano questi termini, integrati poi esattamente. Mandando $N \rightarrow \infty$, si sviluppano tutte le quantità di interesse attorno ai valori stazionari (ottenuti tramite le equazioni del punto sella) dei campi ausiliari. In [4] ci si ferma al prim' ordine. Si ripropone una transizione di fase per β finito ma con un coefficiente critico del campo medio. Si osserva infatti (detta E l'energia all' ordine zero):

$$E \sim (\beta - \beta_c)^{\frac{1}{\delta}} \quad \delta = 3. \quad (2.21)$$

per cui $C \sim (\beta - \beta_c)^{-\frac{2}{3}}$.

Noi vogliamo rileggere i risultati ottenuti per $N = 3$ alla luce di quelli ottenuti nello stretto limite appena considerato. Cerchiamo una correzione all' esponente critico N^{-1} che ci faccia capire se la transizione trovata per $N = \infty$ è un punto singolare, come ci aspettiamo che accada in una dimensione (Appendice A), oppure in realtà abbiamo a che fare con una famiglia a un parametro di punti fissi.

Nel prossimo capitolo studieremo le equazioni del punto sella [4], e svilupperemo l' azione effettiva attorno ai valori del punto sella. Calcoleremo così il propagatore ed i vertici della teoria. Nel capitolo 4 studieremo la criticità all' ordine più basso, riprendendo i risultati di [4]. Infine nella restante parte del lavoro cercheremo di estendere queste considerazioni ad un ordine successivo.

Accenniamo infine ad un'altra problematica aperta. In [20] abbiamo detto che si dimostra l' esistenza di una transizione di fase di prima specie in dimensioni maggiori o uguali a due. Presumibilmente queste si spegneranno in una transizione continua analogamente a quanto succede in due dimensioni. L' eventuale natura di queste ci è del tutto ignota. In tre dimensioni, dove si rompe pure la simmetria $O(N)$, ci si aspetterebbe un diagramma delle fasi molto ricco.

Capitolo 3

Propagatore e vertici della teoria

3.1 Linearizzazione dell' azione

Giustificato nel capitolo precedente, ci proponiamo lo studio dell' azione:

$$A = -N\beta \sum_{x,\mu} W(1 + \vec{\sigma}_x \vec{\sigma}_{x+\mu}). \quad (3.1)$$

Sviluppando W in un intorno di due otteniamo (6):

$$\begin{aligned} A &= k - N\beta \sum_{x,\mu} W'(2)(\vec{\sigma}_x \vec{\sigma}_{x+\mu} - 1) + \dots \\ &= \frac{N\beta}{2} \sum_{x,\mu} W'(2)(\vec{\sigma}_x - \vec{\sigma}_{x+\mu})^2 \\ &=: \frac{N\beta}{2} \sum_{x,\mu} (\partial_\mu^+ \sigma_x)^2, \end{aligned} \quad (3.2)$$

dove abbiamo introdotto una delle due possibili discretizzazioni della derivata su reticolo. Dal momento che abbiamo $W(1) = 0$, otteniamo che la fase disordinata del sistema possiede energia zero.

Seguendo [4] introduciamo due campi per linearizzare l' azione, a cui se ne aggiungerà un terzo, utilizzato nel modo standard per imporre il vincolo della normalizzazione. Dal momento che:

$$\delta(y - a) \sim \int dx e^{x(y-a)}, \quad (3.3)$$

con l' integrazione estesa ad un opportuno cammino sul piano complesso, possiamo scrivere:

$$e^{N\beta W(1 + \vec{\sigma}_x \vec{\sigma}_{x+\mu})} \sim \int d\rho_{x,\mu} d\lambda_{x,\mu} e^{\frac{N\beta}{2} \lambda_{x,\mu} (1 + \vec{\sigma}_x \vec{\sigma}_{x+\mu} - \rho_{x,\mu}) + N\beta W(\rho_{x,\mu})}. \quad (3.4)$$

Introduciamo il campo μ , definito sui siti del reticolo, per linearizzare i vincoli del campo σ :

$$\delta(\vec{\sigma}_x^2 - 1) \sim \int d\mu_x e^{-\frac{N\beta}{2}\mu_x(\vec{\sigma}_x^2 - 1)}. \quad (3.5)$$

Introdotti questi ausiliari su tutti gli elementi del reticolo (siti e link), possiamo scrivere la funzione di partizione del sistema come:

$$\begin{aligned} Z &= \int \prod_x \delta(1 - \vec{\sigma}_x^2) d\vec{\sigma}_x e^{N\beta W(1 + \vec{\sigma}_x \vec{\sigma}_{x+\mu})} \\ &= \int \prod_{x,\mu} d\rho_{x,\mu} d\lambda_{x,\mu} \prod_x d\mu_x d\vec{\sigma}_x e^{NA}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

con A dato da:

$$\begin{aligned} A &= \frac{\beta}{2} \sum_{x,\mu} [\lambda_{x,\mu} - \lambda_{x,\mu} \rho_{x,\mu} + 2W(\rho_{x,\mu})] + \frac{\beta}{2} \sum_x \mu_x + \\ &\quad + \frac{\beta}{2} \sum_{x,\mu} \lambda_{x,\mu} \vec{\sigma}_x \vec{\sigma}_{x+\mu} - \frac{\beta}{2} \sum_x \mu_x \vec{\sigma}_x^2. \end{aligned} \quad (3.7)$$

3.2 Integrazione gaussiana

La linearizzazione dell'azione svolta nella sezione precedente, ci ha portato a scrivere un'azione contenente tre campi ausiliari. Questo procedimento ha reso quadratica la parte in σ . Questa parte può quindi essere integrata esattamente attraverso l'integrale gaussiano. Otterremo un'azione effettiva, in cui sono scomparsi i campi fisici; utilizzando il metodo del punto sella calcoliamo i valori degli ausiliari che rendono stazionaria l'azione, in un secondo tempo calcoliamo il propagatore.

Riprendiamo l'espressione ottenuta nella sezione precedente per A :

$$\begin{aligned} A &= \frac{\beta}{2} \sum_{x,\mu} [\lambda_{x,\mu} - \lambda_{x,\mu} \rho_{x,\mu} + 2W(\rho_{x,\mu})] + \frac{\beta}{2} \sum_x \mu_x + \\ &\quad + \frac{\beta}{2} \sum_{x,\mu} \lambda_{x,\mu} \vec{\sigma}_x \vec{\sigma}_{x+\mu} - \frac{\beta}{2} \sum_x \mu_x \vec{\sigma}_x^2. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Nella seconda riga abbiamo scritto i termini quadratici nelle σ , inoltre le manipolazioni svolte fanno sì che si fattorizzi un termine β^{-2} di fronte alla formula dell'energia libera. Detto questo possiamo passare a integrare il campo N dimensionale σ , riassumendo la seconda parte dell'equazione (3.8) come:

$$-\frac{\beta}{2} \sum_{x,y,\alpha,\beta} \sigma_x^\alpha \delta_{\alpha,\beta} O_{x,y} \sigma_y^\beta, \quad (3.9)$$

con

$$O_{x,y} = \mu_x \delta_{x,y} - \frac{1}{2} \sum_{\mu} \delta_{x,y+\mu} \lambda_{y,\mu} - \frac{1}{2} \sum_{\mu} \delta_{y,x+\mu} \lambda_{x,\mu}, \quad (3.10)$$

avendo imposto la simmetria dell' operatore per poter risolvere l' integrale gaussiano che fornisce il termine:

$$e^{-\frac{1}{2} \text{tr} \log N\beta - \frac{1}{2} \text{tr} \log \Theta}, \quad (3.11)$$

con

$$\Theta_{x,y,\alpha,\beta} = \delta_{\alpha,\beta} O_{x,y}. \quad (3.12)$$

Ora possiamo valutare $\text{tr} \log \Theta$ essendo:

$$\text{tr} \log \Theta = N \text{tr} \log O. \quad (3.13)$$

Così facendo abbiamo completamente fattorizzato la dipendenza da N nella nostra azione.

Infine ci riportiamo all' Hamiltoniana effettiva seguente:

$$H_{eff} = -N A', \quad (3.14)$$

con

$$\begin{aligned} A' &= -\frac{1}{2N} \log(N\beta) - \frac{1}{2} \text{tr} \log(O) + \frac{\beta}{2} \sum_{x,\mu} (\lambda_{x,\mu} (1 - \rho_{x,\mu}) + 2W(\rho_{x,\mu})) \\ &\quad + \frac{\beta}{2} \sum_x \mu_x. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Riscriviamo per concludere, la parte quadratica nei campi nello spazio dei momenti otteniamo:

$$\begin{aligned} \sum_{x,y} O_{x,y} \vec{\sigma}_x \vec{\sigma}_y &= \int d\vec{p}_1 d\vec{p}_2 \vec{\sigma}(-\vec{p}_1) \vec{\sigma}(\vec{p}_2) K(\vec{p}_1, \vec{p}_2), \\ K[\mu, \lambda](\vec{p}_1, \vec{p}_2) &= \mu(\vec{p}_1 - \vec{p}_2) - \cos\left(\frac{p_{1,\mu} + p_{2,\mu}}{2}\right) \lambda_{\mu}(\vec{p}_1 - \vec{p}_2). \end{aligned} \quad (3.16)$$

La parte restante dell' azione presenta interazione costante e si scrive quindi banalmente.

3.3 Equazioni del punto sella

A questo punto, in maniera canonica, si procede alla valutazione della funzione di partizione con il metodo del punto sella (ponendoci ovviamente nel limite in cui N va all' infinito). A tal proposito scriviamo:

$$\begin{aligned} \lambda_{x,\mu} &= \bar{\lambda}^0 + \frac{\hat{\lambda}_{x,\mu}}{\sqrt{N}}, \\ \rho_{x,\mu} &= \bar{\rho}^0 + \frac{\hat{\rho}_{x,\mu}}{\sqrt{N}}, \\ \mu_x &= \bar{\mu}^0 + \frac{\hat{\mu}_x}{\sqrt{N}}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Scriveremo nello spazio dei momenti queste relazioni come:

$$\begin{aligned}\lambda_\mu(\vec{p}) &= \bar{\lambda}^0 \delta(\vec{p}) + \frac{\hat{\lambda}_\mu(\vec{p})}{\sqrt{N}}, \\ \rho_\mu(\vec{p}) &= \bar{\rho}^0 \delta(\vec{p}) + \frac{\hat{\rho}_\mu(\vec{p})}{\sqrt{N}}, \\ \mu(\vec{p}) &= \bar{\mu}^0 \delta(\vec{p}) + \frac{\hat{\mu}(\vec{p})}{\sqrt{N}}.\end{aligned}\quad (3.18)$$

Se riscriviamo la (3.16) al punto sella otteniamo:

$$\begin{aligned}K[\bar{\mu}^0, \bar{\lambda}^0](\vec{p}_1, \vec{p}_2) &= \delta(\vec{p}_1 - \vec{p}_2) \frac{\bar{\lambda}^0}{2} (m_0^2 + \hat{p}^2), \\ m_0^2 &= \frac{2\bar{\mu}^0}{\bar{\lambda}^0} - 2d, \\ \hat{p}^2 &= \sum_\mu 4 \sin^2\left(\frac{p_\mu}{2}\right), \\ \sum_\mu \cos p_\mu &= d - \frac{\hat{p}^2}{2}.\end{aligned}\quad (3.19)$$

m_0 ha il significato di inverso della correlazione *spin-spin* (infatti è la massa del propagatore dei campi σ , ci ritroviamo il contributo di questi campi nei vertici effettivi della teoria). Il nostro modello non presenta criticità rispetto questo accoppiamento, per cui i parametri critici si manifesteranno di modo che $m_{0c} > 0$. Derivando l'azione rispetto μ , λ e ρ e valutando il risultato al punto sella otteniamo le seguenti equazioni :

$$\begin{aligned}\frac{\beta}{2} &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{O} \right]_{x,x}, \\ -\frac{\beta}{2} (1 - \bar{\rho}^0) &= \frac{1}{4} \left[\frac{1}{O} \right]_{x,x+\mu} + \frac{1}{4} \left[\frac{1}{O} \right]_{x+\mu,x}, \\ \frac{\beta}{2} (2W'(\bar{\rho}^0) - \bar{\lambda}^0) &= 0.\end{aligned}\quad (3.20)$$

Utilizzando il fatto che:

$$\left[\frac{1}{O} \right]_{x,y} = \frac{2}{\bar{\lambda}^0} \int d\vec{p} \frac{e^{i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})}}{m_0^2 + \hat{p}^2}, \quad (3.21)$$

e definendo:

$$I(m_0^2) = \int d\vec{p} \frac{1}{m_0^2 + \hat{p}^2}, \quad (3.22)$$

otteniamo:

$$\begin{aligned}\frac{\beta}{2} - \frac{I(m_0^2)}{\bar{\lambda}^0} &= 0, \\ d\beta(1 - \bar{\rho}^0) + \frac{1}{\bar{\lambda}^0} [(2d + m_0^2)I(m_0^2) - 1] &= 0, \\ \bar{\lambda}^0 - 2W'(\bar{\rho}^0) &= 0;\end{aligned}\quad (3.23)$$

dove per la seconda uguaglianza abbiamo sommato su tutte le componenti $\mu = 1, 2, \dots, d$), utilizzando l'uguaglianza $\sum_{\mu} \cos p_{\mu} = d - \frac{1}{2}\widehat{p}^2$, e aggiungendo e togliendo un m_0^2 . Dalla (3.21) si capisce quanto detto prima riguardo il significato fisico di m_0^2 , infatti detto $\Delta(\vec{p}, m_0^2)$ il propagatore del campo σ si ha:

$$\Delta(\vec{p}, m_0^2) = \frac{1}{\beta W'} \frac{1}{\widehat{p}^2 + m_0^2}. \quad (3.24)$$

Notiamo che si fattorizza un β^{-1} , in una teoria effettiva (in cui ho tanti propagatori Δ quanti vertici con questo campo) questi vengono cancellati dai vertici. A questo punto si ricava facilmente la funzione energia libera all'ordine zero definita come:

$$F = -\frac{1}{NV} \log(Z), \quad (3.25)$$

$$Z = \int \prod_{x,\mu} (d\rho_{x,\mu} d\lambda_{x,\mu}) \prod_x d\mu_x e^{NA'}. \quad (3.26)$$

Esplicitamente:

$$F = -\frac{\beta d \bar{\lambda}^0}{2} (1 - \bar{\rho}^0) - \beta d W(\bar{\rho}^0) - \frac{\beta \bar{\mu}^0}{2} + \frac{1}{2} \log \left(\frac{\beta \bar{\lambda}^0}{4} \right), \quad (3.27)$$

da cui utilizzando ripetutamente le equazioni del punto sella otteniamo:

$$F = -\beta d W(\bar{\rho}^0) + \frac{1}{2} \log I(m_0^2) + \frac{1}{2} L(m_0^2), \quad (3.28)$$

con

$$L(m_0^2) = \int_B \log(\widehat{p}^2 + m_0^2) d\vec{p}. \quad (3.29)$$

Si noti, nella definizione di energia libera, il fattore $1/N$ che, oltre a rendere di ordine zero il primo termine di F e quindi rendere ben definita questa grandezza nel limite in cui N va all'infinito, ci da l'idea di una termodinamica fatta su un singolo sito. A tal proposito c'è da dire che la criticità osservata non è peculiare del fatto che abbiamo a che fare con un volume infinito; tuttavia è ben noto che per osservare comportamenti non analitici della funzione di partizione dobbiamo avere a che fare con infiniti gradi di libertà, questa visione è recuperata anche in questo caso nel momento che andiamo a fare il limite in cui N tende all'infinito; addirittura come vedremo si osserva la stessa tipologia di transizione critica per un sistema patologico costituito semplicemente da due link! Eliminando $\bar{\lambda}^0$ dal sistema di tre equazioni sopra scritte otteniamo quella che chiameremo gap-equation:

$$\beta = \frac{I(m_0^2)}{W'(\bar{\rho}^0)}, \quad (3.30)$$

dove

$$\bar{\rho}^0 = 2 + \frac{m_0^2}{2d} - \frac{1}{2dI(m_0^2)}. \quad (3.31)$$

La non invertibilità della gap-equation implica che fissato il parametro fisico β esistono più m_0 corrispondenti, e quindi più fasi per il nostro sistema secondo la (3.27).

3.4 Inesistenza di ordine a lungo range

Dimostriamo che le equazioni del punto sella appena ottenute implicano l'assenza di ordine a lungo range per qualsiasi $\beta < \infty$. Otteniamo cioè il risultato che $m_0^2 = 0$ implica che necessariamente $\beta = \infty$, per cui la correlazione *spin-spin* decade esponenzialmente per ogni temperatura fissata diversa da zero del nostro sistema. Riotteniamo il celebre risultato di Mermin Wagner, dal momento che abbiamo a che fare con un'interazione a breve range.

Notiamo che $\bar{\rho}_0(m_0^2)$ è una funzione strettamente decrescente in m_0^2 (la definizione dei B viene data in appendice):

$$\frac{d\bar{\rho}_0(m_0^2)}{dm_0^2} = \frac{1}{4} - \frac{B[2]}{4B[1]^2}, \quad (3.32)$$

inoltre si ha che:

$$B[1]^2 \leq B[2]. \quad (3.33)$$

Verifichiamo poi facilmente che $\bar{\rho}_0(0) = 2$ e $\bar{\rho}_0(\infty) = 1$, che unito al risultato precedente suggerisce che $W'(\bar{\rho}_0(m_0^2))$ si mantiene finito per qualsiasi valore di m_0^2 . Dal fatto che solo per $m_0^2 = 0$ si ha che:

$$I(0) = \infty, \quad (3.34)$$

segue quanto ci eravamo proposti di dimostrare. Notiamo che questa dimostrazione sembrerebbe venir meno nel caso in cui $W(x)$ si presentasse non analitica per un qualche valore $0 \leq x \leq 2$.

3.5 Sviluppo attorno al punto sella: propagatore

Sostanzialmente ci occorre lo sviluppo dell'azione NA' al secondo ordine. I termini al primo ordine sono ovviamente nulli, dal momento che stiamo facendo lo sviluppo in un intorno del punto sella. Per comodità introduciamo la seguente notazione compatta:

$$\begin{aligned} \widehat{\Psi}_0(x) &= \widehat{\mu}_x, \\ \widehat{\Psi}_1(x) &= \widehat{\lambda}_{x,\widehat{1}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \widehat{\Psi}_2(x) &= \widehat{\lambda}_{x,\widehat{2}}, \\
 \widehat{\Psi}_3(x) &= \widehat{\rho}_{x,\widehat{1}}, \\
 \widehat{\Psi}_4(x) &= \widehat{\rho}_{x,\widehat{2}};
 \end{aligned} \tag{3.35}$$

mentre in seguito indicheremo con $\Psi_A(\vec{p})$ le rispettive trasformate di Fourier. Si osservi inoltre di come abbiamo scelto due direzioni ($\widehat{1}$, $\widehat{2}$), ci stiamo quindi limitando al caso bidimensionale, anche se sostanzialmente lo eravamo già da prima.

Ora:

$$NA' = NA'(\vec{\rho}^0, \vec{\lambda}^0, \vec{\mu}^0) + \frac{1}{2} \sum_{A,B,x,y} \frac{\delta^2 NA'}{\delta \widehat{\Psi}_A(x) \delta \widehat{\Psi}_B(y)} \widehat{\Psi}_A(x) \widehat{\Psi}_B(y) + \dots \tag{3.36}$$

Dove il meccanismo di ridefinizione dei campi, fa sì che i termini successivi della forma $\delta^n NA$ vadano come:

$$\frac{\delta^n NA'}{\delta \widehat{\Psi}_{A_1}(x_1) \dots \delta \widehat{\Psi}_{A_n}(x_n)} \sim N^{-n/2}. \tag{3.37}$$

In maniera standard si ricava la struttura delle derivate seconde, che valutate al punto sella sono tutte funzioni di:

$$\begin{aligned}
 \Lambda_{x,y} &= \left(\frac{1}{O} \right)_{x,y}, \\
 \Lambda_{x,y} &= \frac{2}{\lambda^0} \int \frac{e^{i(\vec{x}-\vec{y})\vec{p}}}{\vec{p}^2 + m_0^2} d\vec{p}.
 \end{aligned} \tag{3.38}$$

Vista la forma in cui si scrive $\frac{1}{O}$, vogliamo sviluppare la nostra azione nello spazio dei momenti, vogliamo insomma ottenere un espressione del tipo:

$$NA' = NA'(\vec{\lambda}^0, \vec{\rho}^0, \vec{\mu}^0) - \frac{1}{2} \sum_{A,B} \int d\vec{p} P_{A,B}^{-1}(\vec{p}, m_0^2) \Psi_A(\vec{p}) \Psi_B(-\vec{p}), \tag{3.39}$$

con $P_{A,B}(\vec{p})$ matrice quadrata a cinque componenti. Questa si ottiene derivando due volte l'azione rispetto ai campi esterni a momento \vec{p} (a meno di un fattore di normalizzazione della misura). La parte in λ e μ ($A, B = 0, 1, 2$) si ottiene derivando la (3.19). Si trovano espressioni non banali che vengono scritte in termini di certe grandezze $A_{i,j}(\vec{p})$, introdotte in seguito. Nello spazio delle configurazioni si ha:

$$\frac{\delta^2 NA'}{\delta \widehat{\Psi}_0(x) \delta \widehat{\Psi}_0(y)} = \frac{1}{2} \Lambda_{y,x} \Lambda_{x,y}, \tag{3.40}$$

$$\frac{\delta^2 NA'}{\delta \widehat{\Psi}_0(y) \delta \widehat{\Psi}_{1/2}(x)} = -\frac{1}{4} \left(\Lambda_{y,x} \Lambda_{x+\widehat{1}/2,y} + \Lambda_{y,x+\widehat{1}/2} \Lambda_{x,y} \right), \tag{3.41}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\delta^2 NA'}{\delta \widehat{\Psi}_A(y) \delta \widehat{\Psi}_B(x)} &= \frac{1}{8} \left(\Lambda_{y,x} \Lambda_{x+\mu,y+\nu} + \Lambda_{y,x+\mu} \Lambda_{x,y+\nu} \right. \\
 &\quad \left. + \Lambda_{y+\nu,x} \Lambda_{x+\mu,y} + \Lambda_{y+\nu,x+\mu} \Lambda_{x,y} \right),
 \end{aligned} \tag{3.42}$$

con $A, B = 1, 2$ nell' ultima espressione. È molto più semplice ricavare i restanti termini di P^{-1} ; i termini di accoppiamento sono infatti costanti e si leggono direttamente in A' nella parte non logaritmica. Per la parte in $\lambda - \rho$ si ha:

$$\frac{\delta^2 NA'}{\delta \widehat{\Psi}_A(y) \delta \widehat{\Psi}_B(x)} = -\frac{\beta}{2} \delta_{x,y}, \quad (3.43)$$

con $A = 1$ e $B = 3$, oppure $A = 2$ e $B = 4$, zero altrimenti. Per finire abbiamo un accoppiamento diagonale anche per i campi ρ :

$$\frac{\delta^2 NA'}{\delta \widehat{\Psi}_A(y) \delta \widehat{\Psi}_B(x)} = \beta W''(\vec{\rho}^0) \delta_{x,y} \quad (3.44)$$

dove necessariamente $A = 3$ e $B = 3$ oppure $A = 4$ e $B = 4$.

Abbiamo supposto che la parte quadratica dell' azione dipenda solo da un momento \vec{p} (3.39), questo segue dall' invarianza della teoria per traslazione e vale in generale per tutti i vertici.

3.5.1 Struttura dettagliata di $P_{A,B}^{-1}(\vec{p})$

Vogliamo calcolare nello spazio dei momenti la seguente quantità:

$$\sum_{x,y,A,B} \frac{\delta^2 NA'}{\delta \widehat{\Psi}_A(x) \delta \widehat{\Psi}_B(y)} \widehat{\Psi}_A(x) \widehat{\Psi}_B(y). \quad (3.45)$$

Introdotte le rispettive trasformate di Fourier dei due campi, possiamo riscrivere l' espressione precedente (sfruttando l' omogeneità e l' isotropia spaziale, per cui la derivata seconda è funzione soltanto di $\vec{r} = \vec{y} - \vec{x}$) come:

$$\sum_{x,r,A,B} \frac{\delta^2 NA'}{\delta \widehat{\Psi}_A(0) \delta \widehat{\Psi}_B(\vec{r})} \int d\vec{p} d\vec{q} e^{-i(\vec{p}+\vec{q})\vec{x} - i\vec{q}\vec{r}} \Psi_A(\vec{p}) \Psi_B(\vec{q}), \quad (3.46)$$

sommando su x si estrae una $\delta(\vec{p} + \vec{q})$ che da il risultato finale:

$$- \sum_{A,B} \int d\vec{p} P_{A,B}^{-1}(\vec{p}) \Psi_A(\vec{p}) \Psi_B(-\vec{p}), \quad (3.47)$$

dove per confronto abbiamo trovato l' espressione:

$$P_{A,B}^{-1}(\vec{p}) = - \sum_{\vec{r}} \frac{\delta^2 NA'}{\delta \widehat{\Psi}_A(0) \delta \widehat{\Psi}_B(\vec{r})} e^{-i\vec{p}\vec{r}}. \quad (3.48)$$

Come conseguenza abbiamo per esempio il fatto che la matrice che si ottiene fissando \vec{p} ($P_{A,B}^{-1}$) è Hermitiana, questo segue dal fatto che l' azione è reale e che posso traslare i termini di $-\vec{r}$ per cui:

$$\frac{\delta^2 NA'}{\delta \widehat{\Psi}_A(0) \delta \widehat{\Psi}_B(\vec{r})} = \frac{\delta^2 NA'}{\delta \widehat{\Psi}_A(-\vec{r}) \delta \widehat{\Psi}_B(0)}; \quad (3.49)$$

segue facilmente quanto affermato. Diamo infine il risultato finale. Conviene introdurre i seguenti integrali:

$$A_{i,j}(\vec{p}, m_0^2) = \int d\vec{p} \frac{\{\cos(q_0)\}^i \{\cos(q_1)\}^j}{(m_0^2 + \widehat{q + \frac{\beta}{2}})(m_0^2 + \widehat{q - \frac{\beta}{2}})}. \quad (3.50)$$

Detto questo troviamo i seguenti valori per $P_{A,B}^{-1}$:

$$\begin{aligned} P_{0,0}^{-1}(\vec{p}, m_0^2) &= -\frac{1}{2} \frac{A_{0,0}(\vec{p}, m_0^2)}{W'^2}, \\ P_{0,1}^{-1}(\vec{p}, m_0^2) &= \frac{1}{2} \frac{A_{1,0}(\vec{p}, m_0^2)}{W'^2}, \\ P_{0,2}^{-1}(\vec{p}, m_0^2) &= \frac{1}{2} \frac{A_{0,1}(\vec{p}, m_0^2)}{W'^2}, \\ P_{0,3}^{-1}(\vec{p}, m_0^2) &= P_{0,4}^{-1}(\vec{p}, m_0^2) = 0, \\ P_{1,1}^{-1}(\vec{p}, m_0^2) &= -\frac{1}{2} \frac{A_{2,0}(\vec{p}, m_0^2)}{W'^2}, \\ P_{2,2}^{-1}(\vec{p}, m_0^2) &= -\frac{1}{2} \frac{A_{0,2}(\vec{p}, m_0^2)}{W'^2}, \\ P_{1,2}^{-1}(\vec{p}, m_0^2) &= -\frac{1}{2} \frac{A_{1,1}(\vec{p}, m_0^2)}{W'^2}. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Questi con i risultati ottenuti nella sezione precedente vengono riassunti nella seguente struttura matriciale (ora e in seguito quando scriveremo W intenderemo sempre $W(\vec{p}^0)$):

$$\mathbf{P}^{-1}(\vec{p}) = \begin{pmatrix} -\frac{A_{0,0}}{2W'^2} & \frac{A_{1,0}}{2W'^2} & \frac{A_{0,1}}{2W'^2} & 0 & 0 \\ \frac{A_{1,0}}{2W'^2} & -\frac{A_{2,0}}{2W'^2} & -\frac{A_{1,1}}{2W'^2} & \frac{\beta}{2} & 0 \\ \frac{A_{0,1}}{2W'^2} & -\frac{A_{1,1}}{2W'^2} & -\frac{A_{0,2}}{2W'^2} & 0 & \frac{\beta}{2} \\ 0 & \frac{\beta}{2} & 0 & -\beta W'' & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\beta}{2} & 0 & -\beta W'' \end{pmatrix}.$$

3.6 Vertici della teoria

Supponendo di sviluppare l' azione oltre ai termini quadratici, scritti nella sezione precedente otterremo espressioni del tipo:

$$\sum_{A,B,C} \sum_{x,y,z} \frac{\delta^3 N A'[\bar{\Psi}^0]}{\delta \widehat{\Psi}_A(x) \delta \widehat{\Psi}_B(y) \delta \widehat{\Psi}_C(z)} \widehat{\Psi}_A(x) \widehat{\Psi}_B(y) \widehat{\Psi}_C(z), \quad (3.52)$$

riscrivendo i campi Ψ in termine delle loro trasormate di Fourier, andiamo a definire i nostri vertici nello spazio dei momenti:

$$\sum_{A,B,C} \sum_{x,y,z} \int d\vec{p}d\vec{q}d\vec{t} \frac{\delta^3 NA'[\bar{\Psi}^0]}{\delta\widehat{\Psi}_A(x)\delta\widehat{\Psi}_B(y)\delta\widehat{\Psi}_C(z)} e^{i(\vec{p}\vec{x}+\vec{q}\vec{y}+\vec{t}\vec{z})} \Psi_A(\vec{p})\Psi_B(\vec{q})\Psi_C(\vec{t}), \quad (3.53)$$

ponendo:

$$\bar{V}[\Psi_A(\vec{p}), \Psi_B(\vec{q}), \Psi_C(\vec{t})] := \sum_{x,y,z} \frac{\delta^3 NA'[\bar{\Psi}^0]}{\delta\widehat{\Psi}_A(x)\delta\widehat{\Psi}_B(y)\delta\widehat{\Psi}_C(z)} e^{i(\vec{p}\vec{x}+\vec{q}\vec{y}+\vec{t}\vec{z})}, \quad (3.54)$$

riscriviamo il termine cubico dell' azione come:

$$\int d\vec{p}d\vec{q}d\vec{t} \bar{V}[\Psi_A(\vec{p}), \Psi_B(\vec{q}), \Psi_C(\vec{t})] \Psi_A(\vec{p})\Psi_B(\vec{q})\Psi_C(\vec{t}). \quad (3.55)$$

Il fatto che poi la nostra teoria è simmetrica per traslazioni pone:

$$\bar{V}[\Psi_A(\vec{p}), \Psi_B(\vec{q}), \Psi_C(\vec{t})] =: \delta(\vec{p} + \vec{q} + \vec{t}) V[\Psi_A(\vec{p}), \Psi_B(\vec{q}), \Psi_C(\vec{t})]. \quad (3.56)$$

In futuro useremo indistintamente anche la notazione più veloce:

$$V_{A,B,C}(\vec{p}, \vec{q}, -\vec{p} - \vec{q}) := V[\Psi_A(\vec{p}), \Psi_B(\vec{q}), \Psi_C(-\vec{p} - \vec{q})], \quad (3.57)$$

non adottiamo da principio questa perchè ora andiamo a scrivere tutti i vertici possibili, e la prima notazione è più comoda. Considerazioni del tutto analoghe valgono nel caso in cui vogliamo definire vertici che incidono su quattro campi.

Nello scrivere i vertici, ci si accorge che questi presentano la struttura derivante dal fatto che stiamo considerando una teoria efficace (abbiamo integrato i campi σ), il che si ripercuote nella costante presenza del termine $\frac{1}{\vec{p}^2+m_0^2}$. Abbiamo che i vertici si dividono in due classi, quelli che contengono i campi ρ (e soltanto questi), sono costanti e valgono $\beta W^n(\tau)$ e quelli su cui incidono i campi μ e λ ; questi derivano soltanto dal termine $-\frac{1}{2}\text{tr} \log K$, che riscriviamo:

$$A' = \dots - \frac{1}{2}\text{tr} \log K, \\ K(\vec{p}_1, \vec{p}_2) = \mu(\vec{p}_1 - \vec{p}_2) - \sum_{\mu} \cos\left(\frac{p_{1,\mu}+p_{2,\mu}}{2}\right) \lambda_{\mu}(\vec{p}_1 - \vec{p}_2). \quad (3.58)$$

Per ottenere i vertici non banali, deriveremo questo termine logaritmico n volte per poi valutarlo sul punto sella. Introducendo:

$$\delta_{\vec{q}}^A := \frac{\delta}{\delta\Psi_A(\vec{q})}. \quad (3.59)$$

Le regole di derivazione di K sono:

$$\delta_{\vec{q}}^0 K(\vec{p}_1, \vec{p}_2) = \delta(\vec{q} + \vec{p}_2 - \vec{p}_1), \quad (3.60)$$

$$\delta_{\vec{q}}^1 K(\vec{p}_1, \vec{p}_2) = -\delta(\vec{q} + \vec{p}_2 - \vec{p}_1) \cos\left(\frac{p_{1,\mu} + p_{2,\mu}}{2}\right), \quad (3.61)$$

$$K^{-1}(\vec{p}_1, \vec{p}_2) = (W'(\widehat{p}_1^2 + m_0^2))^{-1} \delta(\vec{p}_1 - \vec{p}_2). \quad (3.62)$$

D' ora innanzi assumiamo la convenzione:

$$\gamma(p) = \frac{1}{m_0^2 + \widehat{p}^2}. \quad (3.63)$$

Inoltre in tutte le espressioni che seguono tutte le integrazioni (tipicamente in \vec{t}) saranno estese al dominio $t = [(-\pi, \pi), (-\pi, \pi)]$.

3.6.1 Verici a tre gambe

Dobbiamo valutare il termine:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \delta_{\vec{k}}^C \delta_{\vec{q}}^B \delta_{\vec{p}}^A \text{tr} \log K &= -\frac{1}{2} K^{-1}(\delta_{\vec{k}}^C K) K^{-1}(\delta_{\vec{q}}^B K) K^{-1}(\delta_{\vec{p}}^A K) \\ &\quad -\frac{1}{2} K^{-1}(\delta_{\vec{q}}^B K) K^{-1}(\delta_{\vec{k}}^C K) K^{-1}(\delta_{\vec{p}}^A K), \\ &= -K^{-1}(\delta_{\vec{k}}^C K) K^{-1}(\delta_{\vec{q}}^B K) K^{-1}(\delta_{\vec{p}}^A K). \end{aligned} \quad (3.64)$$

L'espressione è del tipo:

$$\text{tr} f[A, B, C](\vec{p}, \vec{q}, \vec{k}) + \text{tr} f[A, B, C](-\vec{p}, -\vec{q}, -\vec{k})^T, \quad (3.65)$$

(T sta per trasposto). Dato che $\delta(\vec{p} + \vec{p}_2 - \vec{p}_1)^T = \delta(-\vec{p} + \vec{p}_2 - \vec{p}_1)$, si ha che se chiamo $f[A, B, C](\vec{p}, \vec{q}, \vec{k})$ il contributo del primo termine nella (3.65) allora il secondo termine vale $f[A, B, C](-\vec{p}, -\vec{q}, -\vec{k})$; di fatto si vede in tutte le espressioni che si ricavano che f non cambia invertendo contemporaneamente tutti i momenti esterni (inversione temporale), per cui vale la seconda uguaglianza nella (3.64). Considerazioni del tutto analoghe valgono nel caso in cui abbiamo a che fare con quattro vertici e non le rifaremo al momento opportuno.

Si osservi che l'espressione ricavata ha anche un' interpretazione grafica in termini di cammini chiusi possibili. La (3.64) ci dice che due cammini con versi opposti danno lo stesso contributo. Per ottenere vertici di ordine superiore, scelto un verso di percorrenza, non faremo altro che inserire in tutti i modi possibili una derivazione su tutti i lati del grafico relativo al vertice precedente con un meno di fronte. Questo è chiaro se pensiamo ai vertici come a grafici coinvolgenti i campi σ , il percorso chiuso è attraversato dal momento \vec{t} , di questi campi; gli ausiliari incidono in tutti gli ordini possibili su questo anello.

Detto questo ritroviamo che:

$$V[\Psi_A(\vec{p}), \Psi_B(\vec{q}), \Psi_C(\vec{k} = -\vec{p} - \vec{q})] = -\frac{1}{2}\delta_k^C \delta_q^B \delta_p^A \text{tr} \log K, \quad (3.66)$$

con $A, B = 0, \dots, 2$. Usando la (3.64) otteniamo:

$$V[\mu(\vec{p}), \mu(\vec{q}), \mu(\vec{k})] = -\frac{1}{W'^3} \int d\vec{t} \gamma(q+t) \gamma(t) \gamma(t-k). \quad (3.67)$$

Per individuare le parti divergenti del nostro calcolo siamo interessati a:

$$V[\mu(0), \mu(0), \mu(0)] = -\frac{1}{W'^3} B[3], \quad (3.68)$$

$$\begin{aligned} V[\mu(\vec{p}), \mu(-\vec{p}), \mu(0)] &= -\frac{1}{W'^3} \int d\vec{t} \gamma(t)^2 \gamma(t+p) \\ &= -\frac{1}{W'^3} \int d\vec{t} \gamma(t) \gamma(t+p)^2. \end{aligned} \quad (3.69)$$

Proseguendo:

$$\begin{aligned} V[\mu(\vec{p}), \mu(\vec{q}), \lambda_\mu(\vec{k})] &= \\ &= \frac{1}{W'^3} \int d\vec{t} \gamma(t+k) \gamma(t) \gamma(t-q) \cos(t_\mu + \frac{k_\mu}{2}) \\ &= \frac{1}{W'^3} \int d\vec{t} \gamma(t-p) \gamma(t) \gamma(t+q) \cos(t_\mu + \frac{q_\mu}{2} - \frac{p_\mu}{2}). \end{aligned} \quad (3.70)$$

Segue:

$$\sum_\mu V[\mu(0), \mu(0), \lambda_\mu(0)] = \frac{1}{W'^3} (2B[3] - B[3, 1]), \quad (3.71)$$

$$\begin{aligned} V[\mu(\vec{p}), \mu(-\vec{p}), \lambda_\mu(0)] &= \frac{1}{W'^3} \int d\vec{t} \gamma(t-p)^2 \gamma(t) \cos(t_\mu - p_\mu) \\ &= \frac{1}{W'^3} \int d\vec{t} \gamma(t)^2 \gamma(t+p) \cos t_\mu, \end{aligned} \quad (3.72)$$

$$\begin{aligned} V[\mu(\vec{p}), \mu(0), \lambda_\mu(-\vec{p})] &= \frac{1}{W'^3} \int d\vec{t} \gamma(t+p)^2 \gamma(t) \cos(t_\mu + \frac{p_\mu}{2}) \\ &= \frac{1}{W'^3} \int d\vec{t} \gamma(t+p) \gamma(t)^2 \cos(t_\mu + \frac{p_\mu}{2}); \end{aligned} \quad (3.73)$$

dove abbiamo usato per l' ultima uguaglianza la simmetria dell' integrale sotto cambio di segno per \vec{p} .

$$\begin{aligned} V[\mu(\vec{k}), \lambda_\mu(\vec{p}), \lambda_\nu(\vec{q})] &= \\ &= -\frac{1}{W'^3} \int d\vec{t} \gamma(t+k) \gamma(t) \cos(t_\nu - \frac{q_\nu}{2}) \gamma(t-q) \cos(t_\mu + \frac{k_\mu}{2} - \frac{q_\mu}{2}) \\ &= -\frac{1}{W'^3} \int d\vec{t} \gamma(t-p) \gamma(t) \gamma(t+q) \cos(t_\nu + \frac{q_\nu}{2}) \cos(t_\mu - \frac{p_\mu}{2}), \end{aligned} \quad (3.74)$$

$$V[\mu(\vec{p}), \lambda_\mu(-\vec{p}), \lambda_\nu(0)] = \quad (3.75)$$

$$-\frac{1}{W'^3} \int d\vec{t} \gamma(t+p) \gamma(t)^2 \cos(t_\mu + \frac{p_\mu}{2}) \cos(t_\nu),$$

$$V[\mu(0), \lambda_\mu(\vec{p}), \lambda_\nu(-\vec{p})] = \quad (3.76)$$

$$-\frac{1}{W'^3} \int d\vec{t} \gamma(t+p)^2 \gamma(t) \cos(\vec{t}_\mu + \frac{p_\mu}{2}) \cos(\vec{t}_\nu + \frac{p_\nu}{2})$$

$$= -\frac{1}{W'^3} \int d\vec{t} \gamma(t+p) \gamma(t)^2 \cos(\vec{t}_\mu + \frac{p_\mu}{2}) \cos(\vec{t}_\nu + \frac{p_\nu}{2}),$$

$$\sum_{\mu, \nu} V[\mu(0), \lambda_\mu(0), \lambda_\nu(0)] = \quad (3.77)$$

$$-\frac{1}{W'^3} (4B[3] - 4B[3, 1] + \frac{1}{2}B[3, 2] + \frac{1}{2}B[3, 1, 1]).$$

Infine

$$V[\lambda_\alpha(\vec{p}), \lambda_\beta(\vec{q}), \lambda_\gamma(\vec{k})] = \quad (3.78)$$

$$\frac{1}{W'^3} \int d\vec{t} \gamma(t+k) \gamma(t) \gamma(t-q) \cos(t_\gamma + \frac{k_\gamma}{2}) \cos(t_\beta - \frac{q_\beta}{2})$$

$$\cos(t_\alpha + \frac{k_\alpha}{2} - \frac{q_\alpha}{2}),$$

$$V[\lambda_\alpha(\vec{p}), \lambda_\beta(-\vec{p}), \lambda_\gamma(0)] = \quad (3.79)$$

$$\frac{1}{W'^3} \int d\vec{t} \gamma(t+p) \gamma(t)^2 \cos(t_\alpha + \frac{p_\alpha}{2}) \cos(t_\beta + \frac{p_\beta}{2}) \cos p_\gamma,$$

$$\sum_{\alpha, \beta, \gamma} V[\lambda_\alpha(0), \lambda_\beta(0), \lambda_\gamma(0)] = \quad (3.80)$$

$$\frac{1}{W'^3} (8B[3] - 12B[3, 1] + 3B[3, 2] + 3B[3, 1, 1] - \frac{1}{4}B[3, 3]$$

$$-\frac{3}{4}B[3, 2, 1]).$$

Diamo infine la semplice struttura di

$$V[\rho_\alpha(\vec{p}_1), \rho_\beta(\vec{p}_2), \rho_\gamma(\vec{p}_3)] = \beta W''' (\vec{p}^0) \delta(\sum_i \vec{p}_i) \delta_{\alpha, \beta} \delta_{\beta, \gamma}, \quad (3.81)$$

in particolare indipendente dai momenti entranti. Notiamo che i vertici del primo tipo, quelli che coinvolgono cioè i campi λ e μ , della forma $V_{a,b,c}(\vec{p}, -\vec{p}, 0)$ si ottengono semplicemente, dato il segno giusto, pensando di assegnare per ogni momento entrante un termine $\cos t$ se il campo è scalare (μ) oppure un termine $\cos(t + \frac{p}{2})$ nel caso in cui è vettoriale (λ). Il tutto si

generalizza anche nel caso di vertici a quattro gambe, con la complicazione topologica di avere due possibili contrazioni ($V(p, -p, 0, 0)$ e $V(p, 0, 0, -p)$) a cui corrispondono due differenti termini moltiplicativi ($\gamma(t)^3\gamma(t+p)$ e $\gamma(t)^2\gamma(t+p)^2$); se pensiamo i vertici in termini di vertici effettivi, allora le precedenti regole sono di chiara interpretazione.

3.6.2 Vertici a quattro gambe

A partire da (3.64) otteniamo la stessa equazione nel caso in cui abbiamo a che fare con vertici a quattro gambe. Come già accennato anche con un metodo grafico arriviamo all' espressione (con definizioni analoghe):

$$\begin{aligned} V[\Psi_A(\vec{p}), \Psi_B(\vec{q}), \Psi_C(\vec{k}), \Psi_D(\vec{l})] = & \quad (3.82) \\ & K^{-1}(\delta_k^c K)K^{-1}(\delta_q^b K)K^{-1}(\delta_p^a K)K^{-1}(\delta_l^d K) + K^{-1}(\delta_k^c K)K^{-1}(\delta_q^b K) \\ & K^{-1}(\delta_l^d K)K^{-1}(\delta_p^a K) + K^{-1}(\delta_k^c K)K^{-1}(\delta_l^d K)K^{-1}(\delta_q^b K)K^{-1}(\delta_p^a K). \end{aligned}$$

Senza indugi quindi:

$$\begin{aligned} V[\mu(\vec{p}), \mu(\vec{q}), \mu(\vec{k}), \mu(\vec{l} = -\vec{p} - \vec{q} - \vec{k})] = & \quad (3.83) \\ & \frac{1}{W^4} \int d\vec{t} \left[\gamma(t-q-p-k)\gamma(t-q-k)\gamma(t-k)\gamma(t) \right. \\ & + \gamma(t-q-l-k)\gamma(t-q-k)\gamma(t-k)\gamma(t) + \gamma(t-q-l-k)\gamma(t-l-k) \\ & \left. \gamma(t-k)\gamma(t) \right], \end{aligned}$$

sempre per i nostri scopi abbiamo:

$$\begin{aligned} V[\mu(\vec{p}), \mu(-\vec{p}), \mu(\vec{q}), \mu(-\vec{q})] = & \quad (3.84) \\ & \frac{1}{W^4} \int d\vec{t} \left[\gamma(t)^2\gamma(t+p)\gamma(t+q) + \gamma(t)^2\gamma(t+p)\gamma(t-q) \right. \\ & \left. + \gamma(t+p)\gamma(t-q)\gamma(t+p-q)\gamma(t) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V[\mu(\vec{p}), \mu(-\vec{p}), \mu(0), \mu(0)] = & \quad (3.85) \\ & \frac{1}{W^4} \int d\vec{t} \left[2\gamma(t)^3\gamma(t+p) + \gamma(t)^2 \right. \\ & \left. \gamma(t+p)^2 \right], \end{aligned}$$

$$V[\mu(0), \mu(0), \mu(0), \mu(0)] = \frac{3}{W^4} B[4]. \quad (3.86)$$

$$\begin{aligned} V[\mu(\vec{p}), \mu(\vec{q}), \mu(\vec{l}), \lambda_\mu(\vec{k})] = & \quad (3.87) \\ & -\frac{1}{W^4} \int d\vec{t} \cos(t_\mu + \frac{k_\mu}{2}) \left[\gamma(t+k)\gamma(t)\gamma(t-q)\gamma(t-q-p) \right. \\ & + \gamma(t+k)\gamma(t)\gamma(t-q)\gamma(t-q-l) + \gamma(t+k)\gamma(t)\gamma(t-l) \\ & \left. \gamma(t-l-q) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V[\mu(\vec{p}), \mu(-\vec{p}), \mu(\vec{k}), \lambda_\mu(-\vec{k})] = & \quad (3.88) \\
& -\frac{1}{W^{14}} \int d\vec{t} \cos(t_\mu + \frac{k_\mu}{2}) \gamma(t)^2 \gamma(t+p) \gamma(t+k) \\
& + \cos(t_\mu - \frac{k_\mu}{2}) \left[\gamma(t) \gamma(t+p) \gamma(t-k) + \gamma(t)^2 \gamma(t+p) \gamma(t-k) \right. \\
& \left. \gamma(t+p-k) \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V[\mu(0), \mu(0), \mu(\vec{k}), \lambda_\mu(-\vec{k})] = & \quad (3.89) \\
& -\frac{1}{W^{14}} \int d\vec{t} \cos(t_\mu + \frac{k_\mu}{2}) \left[2\gamma(t)^3 \gamma(t+k) + \gamma(t)^2 \gamma(t+k)^2 \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V[\mu(\vec{p}), \mu(-\vec{p}), \mu(0), \lambda_\mu(0)] = & \quad (3.90) \\
& -\frac{1}{W^{14}} \int d\vec{t} \cos t_\mu \left[2\gamma(t)^3 \gamma(t+p) + \gamma(t)^2 \gamma(t+p)^2 \right],
\end{aligned}$$

$$\sum_\mu V[\mu(0), \mu(0), \mu(0), \lambda_\mu(0)] = \frac{-1}{W^{14}} (2B[4] - B[4, 1]). \quad (3.91)$$

$$\begin{aligned}
V[\mu(\vec{q}), \mu(\vec{l}), \lambda_\mu(\vec{p}), \lambda_\nu(\vec{k})] = & \quad (3.92) \\
& \frac{1}{W^{14}} \int d\vec{t} \gamma(t+k+q) \gamma(t+q) \gamma(t) \gamma(t-p) \cos(t_\nu + q_\nu + \frac{k_\nu}{2}) \\
& \cos(t_\mu - \frac{p_\mu}{2}) + \gamma(t+k+q) \gamma(t+q) \gamma(t) \gamma(t-l) \cos(t_\nu + \frac{k_\nu + q_\nu - l_\nu}{2}) \\
& \cos(t_\mu + q_\mu + \frac{k_\mu}{2}) + \gamma(t+l+k) \gamma(t+l) \gamma(t) \gamma(t-q) \cos(t_\nu \\
& + \frac{k_\nu + l_\nu - q_\nu}{2}) \cos(t_\mu + l_\mu + \frac{k_\mu}{2}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V[\mu(\vec{q}), \mu(-\vec{q}), \lambda_\mu(\vec{p}), \lambda_\nu(-\vec{p})] = & \quad (3.93) \\
& \frac{1}{W^{14}} \int d\vec{t} \gamma(t+q-p) \gamma(t+q) \gamma(t-p) \gamma(t) \cos(t_\mu + q_\mu - \frac{p_\mu}{2}) \\
& \cos(t_\nu - \frac{p_\nu}{2}) + \gamma(t+p) \gamma(t)^2 \gamma(t+q) \cos(t_\mu - q_\mu + \frac{p_\mu}{2}) \cos(t_\nu - q_\nu + \frac{p_\nu}{2}) \\
& + \gamma(t)^2 \gamma(t+q) \gamma(t-p) \cos(t_\mu - \frac{p_\mu}{2}) \cos(t_\nu - \frac{p_\nu}{2}),
\end{aligned}$$

$$V[\mu(\vec{q}), \mu(-\vec{q}), \lambda_\mu(0), \lambda_\nu(0)] = \quad (3.94)$$

$$\frac{1}{W^{14}} \int d\vec{t} \left[\gamma(t)^2 \gamma(t+q)^2 \cos t_\mu \cos(t_\nu + q_\mu) + \gamma(t)^3 \gamma(t+q) \right. \\ \left. \cos t_\mu \cos t_\nu \right]$$

$$V[\mu(0), \mu(0), \lambda_\mu(\vec{p}), \lambda_\nu(-\vec{p})] = \quad (3.95)$$

$$\frac{1}{W^{14}} \int d\vec{t} \cos(t - \mu + \frac{p_\mu}{2}) \cos(t_\nu + \frac{p_\nu}{2}) \left[\gamma(t)^2 \gamma(t+p)^2 + 2\gamma(t+p) \right. \\ \left. \gamma(t)^3 \right],$$

$$V[\mu(\vec{p}), \mu(\vec{k}), \lambda_\mu(-\vec{p}), \lambda_\nu(-\vec{k})] = \quad (3.96)$$

$$\frac{1}{W^{14}} \int d\vec{t} \gamma(t+k) \gamma(t)^2 \gamma(t+p) \cos(t_\nu + \frac{k_\nu}{2}) \cos(t_\mu + \frac{p_\mu}{2}) \\ + \gamma(t+k-p) \gamma(t-p) \gamma(t+k) \gamma(t) \cos(t_\mu + k_\mu - \frac{p_\mu}{2}) \cos(t_\nu - p_\nu + \frac{k_\nu}{2}) \\ + \gamma(t)^2 \gamma(t-k) \gamma(t+p) \cos(t_\mu + \frac{p_\mu}{2}) \cos(t_\nu - \frac{k_\nu}{2}),$$

$$V[\mu(\vec{p}), \mu(0), \lambda_\mu(-\vec{p}), \lambda_\nu(0)] = \quad (3.97)$$

$$\frac{1}{W^{14}} \int d\vec{t} 2\gamma(t)^3 \gamma(t+p) \cos t_\nu \cos(t_\mu + \frac{p_\mu}{2}) \\ + \gamma(t+p)^2 \gamma(t)^2 \cos(t_\nu) \cos(t_\mu + \frac{p_\mu}{2}),$$

$$\sum_{\mu, \nu} V[\mu(0), \mu(0), \lambda_\mu(0), \lambda_\nu(0)] = \quad (3.98)$$

$$\frac{1}{W^{14}} \left[4B[4] - 4B[4, 1] + \frac{1}{2}B[4, 2] + \frac{1}{2}B[4, 1, 1] \right].$$

$$V[\mu(\vec{k}), \lambda_\alpha(\vec{p}), \lambda_\beta(\vec{q}), \lambda_\gamma(\vec{l})] = \quad (3.99)$$

$$-\frac{1}{W^{14}} \int d\vec{t} \gamma(t+k+q) \gamma(t+q) \gamma(t) \gamma(t-p) \cos(t_\beta) \\ + \frac{q_\beta}{2} \cos(t_\alpha - \frac{p_\alpha}{2}) \cos(t_\gamma + \frac{q_\gamma + k_\gamma - p_\gamma}{2}) \\ + \gamma(t+k+q) \gamma(t+q) \gamma(t) \gamma(t-l) \cos(t_\beta + \frac{q_\beta}{2}) \cos(t_\gamma - \frac{l_\gamma}{2})$$

$$\begin{aligned} & \cos\left(t_\alpha + \frac{q_\alpha + k_\alpha - l_\alpha}{2}\right) + \gamma(t+k+l)\gamma(t+l)\gamma(t)\gamma(t-q) \\ & \cos\left(t_\gamma + \frac{l_\gamma}{2}\right) \cos\left(t_\beta - \frac{q_\beta}{2}\right) \cos\left(t_\alpha + \frac{l_\alpha + k_\alpha - q_\alpha}{2}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V[\mu(\vec{k}), \lambda_\alpha(-\vec{k}), \lambda_\beta(\vec{p}), \lambda_\gamma(-\vec{p})] = & \quad (3.100) \\ & -\frac{1}{W'^4} \int d\vec{t} \gamma(t)^2 \gamma(t+k) \gamma(t+p) \cos\left(t_\beta + \frac{p_\beta}{2}\right) \\ & \cos\left(t_\gamma + \frac{p_\gamma}{2}\right) \cos\left(t_\alpha + \frac{k_\alpha}{2}\right) + \gamma(t+k-p) \gamma(t-p) \\ & \gamma(t+k) \gamma(t) \cos\left(t_\gamma + k_\gamma - \frac{p_\gamma}{2}\right) \cos\left(t_\alpha + \frac{k_\alpha}{2}\right) \cos\left(t_\beta - \frac{p_\beta}{2}\right) \\ & + \gamma(t)^2 \gamma(t+p) \gamma(t-k) \cos\left(t_\gamma + \frac{p_\gamma}{2}\right) \cos\left(t_\beta + \frac{p_\beta}{2}\right) \cos\left(t_\alpha - \frac{k_\alpha}{2}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V[\mu(\vec{k}), \lambda_\alpha(-\vec{k}), \lambda_\beta(0), \lambda_\gamma(0)] = & \quad (3.101) \\ & -\frac{1}{W'^4} \int d\vec{t} 2\gamma(t+k)\gamma(t)^3 \cos t_\beta \cos t_\gamma \cos\left(t_\alpha + \frac{k_\alpha}{2}\right) \\ & + \gamma(t+k)^2 \gamma(t)^2 \cos(t_\beta + k_\beta) \cos\left(t_\alpha + \frac{k_\alpha}{2}\right) \cos t_\gamma, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V[\mu(0), \lambda_\alpha(0), \lambda_\beta(\vec{p}), \lambda_\gamma(-\vec{p})] = & \quad (3.102) \\ & -\frac{1}{W'^4} \int d\vec{t} \cos t_\alpha \cos\left(t_\beta + \frac{p_\beta}{2}\right) \cos\left(t_\gamma + \frac{p_\gamma}{2}\right) \left[2\gamma(t)^3 \gamma(t+p) \right. \\ & \left. + \gamma(t)^2 \gamma(t+p)^2\right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha, \beta, \gamma} V[\mu(0), \lambda_\alpha(0), \lambda_\beta(0), \lambda_\gamma(0)] = & \quad (3.103) \\ & \frac{-1}{W'^4} \left[8B[4] - 12B[4, 1] + 3B[4, 2] + 3B[4, 1, 1] - \frac{1}{4}B[4, 3] \right. \\ & \left. - \frac{3}{4}B[4, 2, 1]\right]. \end{aligned}$$

Infine:

$$V[\lambda_\alpha(\vec{p}), \lambda_\beta(\vec{q}), \lambda_\gamma(\vec{k}), \lambda_\delta(\vec{l})] = \quad (3.104)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{W^{i4}} \int d\vec{t} \vec{\gamma}(t+k) \gamma(t) \gamma(t-q) \gamma(t-q-p) \cos(t_\gamma + \frac{k_\gamma}{2}) \\
& \cos(t_\beta - \frac{q_\beta}{2}) \cos(t_\alpha - q_\alpha - \frac{p_\alpha}{2}) \cos(t_\delta + \frac{k_\delta - p_\delta - q_\delta}{2}) + \gamma(t+k) \gamma(t) \\
& \gamma(t-q) \gamma(t-q-l) \cos(t_\gamma + \frac{k_\gamma}{2}) \cos(t_\beta - \frac{q_\beta}{2}) \cos(t_\delta - q_\delta - \frac{l_\delta}{2}) \\
& \cos(t_{al} + \frac{k_\alpha - l_\alpha - q_\alpha}{2}) + \gamma(t+k) \gamma(t) \gamma(t-l) \gamma(t-q-l) \\
& \cos(t_\gamma + \frac{k_\gamma}{2}) \cos(t_\delta - \frac{l_\delta}{2}) \cos(t_\beta - l_\beta - \frac{q_\beta}{2}) \cos(t_\alpha + \frac{k_\alpha - q_\alpha - l_{al}}{2})
\end{aligned}$$

$$V[\lambda_\alpha(\vec{p}), \lambda_\beta(-\vec{p}), \lambda_\gamma(\vec{k}), \lambda_\delta(-\vec{k})] = \quad (3.105)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{W^{i4}} \int d\vec{t} \vec{\gamma}(t+k) \gamma(t+p) \gamma(t)^2 \\
& \cos(t_\alpha + \frac{p_\alpha}{2}) \cos(t_\beta + \frac{p_\beta}{2}) \cos(t_\gamma + \frac{k_\gamma}{2}) \cos(t_\delta + \frac{k_\delta}{2}) \\
& + \gamma(t+k) \gamma(t) \gamma(t+p) \gamma(t+p+k) \cos(t_\alpha + \frac{p_\alpha}{2}) \cos(t_\gamma + \frac{k_\gamma}{2}) \\
& \cos(t_\delta + p_\delta + \frac{k_\delta}{2}) \cos(t_\beta + k_\beta + \frac{p_\beta}{2}) + \gamma(t)^2 \gamma(t-k) \gamma(t+p) \\
& \cos(t_\gamma - \frac{k_\gamma}{2}) \cos(t_\delta - \frac{k_\delta}{2}) \cos(t_\alpha + \frac{p_\alpha}{2}) \cos(t_\beta + \frac{p_\beta}{2}),
\end{aligned}$$

$$V[\lambda_\alpha(\vec{p}), \lambda_\beta(-\vec{p}), \lambda_\gamma(0), \lambda_\delta(0)] = \quad (3.106)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{W^{i4}} \int d\vec{t} 2\vec{\gamma}(t+p) \gamma(t)^3 \cos t_\gamma \cos t_\delta \cos(t_\alpha + \frac{p_\alpha}{2}) \cos(t_\beta + \frac{p_\beta}{2}) \\
& + \gamma(t+p)^2 \gamma(t)^2 \cos(\vec{t}) \cos(\vec{t} + \frac{\vec{p}}{2})^2 \cos(\vec{t} + \vec{p}),
\end{aligned}$$

$$\sum_{\alpha, \beta, \gamma, \delta} V[\lambda_\alpha(0), \lambda_\beta(0), \lambda_\gamma(0), \lambda_\delta(0)] = \quad (3.107)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{W^{i4}} \left[16B[4] - 32B[4, 1] + 12B[4, 2] - 2B[4, 3] + \frac{1}{8}B[4, 4] \right. \\
& \left. + 12B[4, 1, 1] - 6B[4, 2, 1] + \frac{1}{2}B[4, 3, 1] + \frac{3}{8}B[4, 2, 2] \right].
\end{aligned}$$

3.7 Sviluppi al primo ordine in p^2

Al fine di scoprire le divergenze dei nostri diagrammi che ci forniranno il coefficiente critico desiderato, dobbiamo sviluppare al primo ordine gli elementi della nostra teoria fino a qui trovati; in particolare il propagatore e i vertici.

3.7.1 Sviluppo del propagatore

Convienne introdurre i seguenti integrali (appendice A):

$$B[r, n_0, n_1] = \int d\vec{p} \frac{\widehat{p}_0^{2n_0} \widehat{p}_1^{2n_1}}{(\widehat{p}^2 + m_0^2)^r}, \quad (3.108)$$

questi si riducono tutti a termini della forma $B[r]$, i quali a loro volta si riportano a termini della forma $B[1]$ e $B[2]$ (quest'ultima riduzione è peculiare delle due dimensioni). Si noti che porremo $B[r, n, 0] = B[r, 0, n] = B[r, n]$, la scrittura non presenta ambiguità vista la simmetria (analogamente $B[r] = B[r, 0, 0]$). A tal proposito vale la relazione più generale $B[r, n, m] = B[r, m, n]$. Abbiamo che per i termini di P^{-1} dipendenti da p , cioè $P_{A,B}^{-1}$ con $A, B = 0, 1, 2$, all'ordine zero:

$$\begin{aligned} A_{0,0} &= B[2], \\ A_{0,1} &= B[2] - \frac{1}{2}B[2, 1], \\ A_{0,2} &= B[2] - B[2, 1] + \frac{1}{4}B[2, 2], \\ A_{1,1} &= B[2] - B[2, 1] + \frac{1}{4}B[2, 1, 1]. \end{aligned} \quad (3.109)$$

Sviluppriamo ora $A_{i,j}(\vec{p})$; a tal proposito scriviamo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(\widehat{p} + \frac{q}{2})^2 + m_0^2} \frac{1}{(\widehat{p} - \frac{q}{2})^2 + m_0^2} &= \frac{1}{(\widehat{p}^2 + m_0^2)^2} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{q^2}{(\widehat{p}^2 + m_0^2)} + \right. \\ \left. \frac{1}{4} \sum_{\mu} \frac{\widehat{p}_{\mu}^2 q_{\mu}^2}{(\widehat{p}^2 + m_0^2)} - \frac{\widehat{p}_{\mu}^4 q_{\mu}^2}{(\widehat{p}^2 + m_0^2)^2} + 4 \frac{\widehat{p}_{\mu}^2 q_{\mu}^2}{(\widehat{p}^2 + m_0^2)^2} + \dots \right], \end{aligned} \quad (3.110)$$

dove con i puntini intendiamo termini di ordini superiori in q^2 e un termine antisimmetrico che scompare automaticamente quando andiamo a integrare in p . Scriviamo i termini $A_{i,j}(q)$ che ci interessano in termini dei nuovi integrali introdotti. Scrivendo $\cos(p_{\mu})$ come $1 - \frac{\widehat{p}_{\mu}^2}{2}$, otteniamo:

$$\begin{aligned} A_{0,0}(p) &= \\ B[2] + p^2 \left[B[4, 1] - \frac{1}{4}B[4, 2] + \frac{1}{4}B[3, 1] - \frac{1}{2}B[3] \right], \end{aligned} \quad (3.111)$$

$$\begin{aligned} A_{0,1}(p) &= \\ A_{0,0}(p) - \frac{1}{2} \left[B[2, 1] - \frac{1}{2}p^2 B[3, 1] + \frac{1}{4}p^2 B[3, 1, 1] + \frac{1}{4}p_1^2 B[3, 2] \right. \\ \left. + B[4, 1, 1]p_0^2 + p_1^2 B[4, 2] - \frac{1}{4}p_0^2 B[4, 2, 1] - \frac{1}{4}p_1^2 B[4, 3] \right], \end{aligned} \quad (3.112)$$

$$\begin{aligned}
A_{0,2}(p) = & \quad (3.113) \\
& 2A_{0,1}(p) - A_{0,0}(p) + \frac{1}{4} \left[B[2, 2] - \frac{1}{2} B[3, 2] p^2 + \frac{1}{4} B[3, 1, 2] p_0^2 \right. \\
& + \frac{1}{4} B[3, 3] p_1^2 + B[4, 1, 2] p_0^2 + B[4, 3] p_1^2 - \frac{1}{4} B[4, 2, 2] p_0^2 \\
& \left. - \frac{1}{4} B[4, 4] p_1^2 \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{1,1}(p) = & \quad (3.114) \\
& A_{1,0}(p) + A_{0,1}(p) - A_{0,0}(p) + \frac{1}{4} \left[B[2, 1, 1] - \frac{1}{2} p^2 B[3, 1, 1] \right. \\
& \left. + \frac{1}{4} p^2 B[3, 2, 1] + B[4, 2, 1] p^2 - \frac{1}{4} p^2 B[4, 3, 1] \right].
\end{aligned}$$

3.7.2 Sviluppo dei vertici a tre gambe

In un approccio più sistematico possibile introduciamo le seguenti espressioni:

$$\begin{aligned}
V^n[a(\widehat{0}), b(\widehat{1})] &= \int d\vec{t} \gamma(t)^{n-1} \gamma(t+p) \widehat{t}_0^{2a} \widehat{t}_1^{2b} \quad (3.115) \\
&= B[n, a, b] - B[n+1, a, b] p^2 + \frac{p_0^2}{2} \left(B[n+1, a+1, b] \right. \\
&+ 8B[n+2, a+1, b] - 2B[n+2, a+2, b] \Big) + \frac{p_1^2}{2} \left(B[n+1, a, b+1] \right. \\
&+ 8B[n+2, a, b+1] - 2B[n+2, a, b+2] \Big) + O(p^4).
\end{aligned}$$

$$V_\mu^n[a(\widehat{0}), b(\widehat{1})] = \int d\vec{t} \gamma(t)^{n-1} \gamma(t+p) \widehat{t}_0^{2a} \widehat{t}_1^{2b} \sin t_\mu p_\mu, \quad (3.116)$$

ovvero:

$$V_0^n[a(\widehat{0}), b(\widehat{1})] = -2p_0^2 B[n+1, a+1, b] + \frac{1}{2} p_0^2 B[n+1, a+2, b], \quad (3.117)$$

$$V_1^n[a(\widehat{0}), b(\widehat{1})] = B[n, a, b] - 2p_1^2 B[n+1, a, b+1] + \frac{1}{2} p_1^2 B[n+1, a, b+2]. \quad (3.118)$$

Da questo punto i vertici si riscrivono in maniera praticamente immediata, (anche se sicuramente non semplificati completamente) al primo ordine in p^2 .

$$V[\mu(\vec{p}), \mu(-\vec{p}), \mu(0)] = -\frac{1}{W^3} V^3. \quad (3.119)$$

$$V[\mu(\vec{p}), \mu(-\vec{p}), \lambda_\mu(0)] = \frac{1}{W'^3} \left[V^3 - \frac{1}{2} V^3[1(\mu)] \right], \quad (3.120)$$

$$V[\mu(\vec{p}), \mu(0), \lambda_\mu(-\vec{p})] = \quad (3.121)$$

$$\frac{1}{W'^3} \left[V^3 - \frac{1}{2} V^3[1(\mu)] - \frac{p_\mu^2}{8} \left(B[3] - \frac{1}{2} B[3, 1] \right) - \frac{1}{2} V_\mu^3 \right].$$

$$V[\mu(\vec{p}), \lambda_\mu(-\vec{p}), \lambda_{\nu \neq \mu}(0)](\vec{p}, -\vec{p}, 0) = \quad (3.122)$$

$$-\frac{1}{W'^3} \left[V^3 - \frac{1}{2} \left(V^3[1(\mu)] + V^3[1(\nu)] \right) - \frac{1}{2} V_\mu^3 + \frac{1}{4} V^3[1(\mu), 1(\nu)] \right]$$

$$+ \frac{1}{4} V_\mu^3[1(\nu)] + \frac{1}{8} p_0^2 B[3, 1] - \frac{1}{32} B[3, 1, 1] p_\mu^2 - \frac{p_\mu^2}{8} B[3],$$

$$V[\mu(\vec{p}), \lambda_\mu(-\vec{p}), \lambda_\mu(0)] = \quad (3.123)$$

$$-\frac{1}{W'^3} \left[V^3 - V^3[1(\mu)] - \frac{1}{2} V_\mu^3 + \frac{1}{4} V^3[2(\mu)] + \frac{1}{4} V_\mu^3[1(\mu)] \right]$$

$$+ \frac{1}{8} p_\mu^2 B[3, 1] - \frac{1}{32} B[3, 2] p_\mu^2 - \frac{p_\mu^2}{8} B[3],$$

$$V[\mu(0), \lambda_\mu(\vec{p}), \lambda_{\nu \neq \mu}(-\vec{p})] = \quad (3.124)$$

$$V[\mu(\vec{p}), \lambda_\nu(-\vec{p}), \lambda_\mu(0)] - \frac{1}{W'^3} \left[-\frac{p_\mu^2}{8} \left(B[3] - B[3, 1] + \frac{1}{4} B[3, 1, 1] \right) \right]$$

$$- \frac{1}{2} V_\mu^3 + \frac{1}{4} V_\mu^3[1(\nu)],$$

$$V[\mu(0), \lambda_\mu(\vec{p}), \lambda_\mu(-\vec{p})] = \quad (3.125)$$

$$V[\mu(\vec{p}), \lambda_\mu(-\vec{p}), \lambda_\mu(0)] - \frac{1}{W'^3} \left[-\frac{p_\mu^2}{8} \left(B[3] - B[3, 1] + \frac{1}{4} B[3, 2] \right) \right]$$

$$- \frac{1}{2} V_\mu^3 + \frac{1}{4} V_\mu^3[1(\mu)] + \frac{p_\mu^2}{4} \left(B[3, 1] - \frac{1}{4} B[3, 2] \right).$$

Infine per i termini del tipo $V[\lambda_\mu(\vec{p}), \lambda_\nu(-\vec{p}), \lambda_\gamma(0)]$, vista la simmetria secondo lo scambio di μ e ν , si presenta la seguente casistica:

$$V[\lambda_\mu(\vec{p}), \lambda_{\nu \neq \mu}(-\vec{p}), \lambda_\mu(0)] = \quad (3.126)$$

$$\frac{1}{W'^3} \left[V^3 - V^3[1(\nu)] - \frac{1}{2} V^3[1(\mu)] + \frac{1}{2} V^3[1(\mu), 1(\nu)] + \frac{1}{4} V^3[2(\mu)] \right]$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{8}V^3[2(\mu), 1(\nu)] - \frac{p^2}{8} \left(B[3] - \frac{3}{2}B[3, 1] + \frac{1}{2}B[3, 1, 1] + \frac{1}{4}B[3, 2] \right. \\
& \left. - \frac{1}{8}B[3, 2, 1] \right) - \frac{1}{2} \left(V_\nu^3 - V_\nu^3[1(\mu)] + \frac{1}{4}V_\nu^3[2(\nu)] \right) - \frac{1}{2} \left(V_\mu^3 \right. \\
& \left. - \frac{1}{2}V_\mu^3[1(\nu)] - \frac{1}{2}V_\mu^3[1(\mu)] + \frac{1}{4}V_\mu^3[1(\mu), 1(\nu)] \right) \Big],
\end{aligned}$$

$$V[\lambda_\mu(\vec{p}), \lambda_\mu(-\vec{p}), \lambda_{\gamma \neq \mu}(0)] = \quad (3.127)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{W^3} \left[V^3 - V^3[1(\mu)] - \frac{1}{2}V^3[1(\gamma)] + \frac{1}{2}V^3[1(\mu), 1(\gamma)] + \frac{1}{4}V^3[2(\mu)] \right. \\
& \left. - \frac{1}{8}V^3[2(\mu), 1(\gamma)] - \frac{p_\mu^2}{4} \left(B[3] - \frac{5}{2}B[3, 1] + B[3, 1, 1] + \frac{1}{2}B[3, 2] \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{1}{4}B[3, 2, 1] \right) - V_\mu^3 + \frac{1}{2}V_\mu^3[1(\mu)] + \frac{1}{2}V_\mu^3[1(\gamma)] + \frac{1}{4}V_\mu^3[1(\mu), 1(\gamma)] \right]
\end{aligned}$$

$$V[\lambda_\mu(\vec{p}), \lambda_\mu(-\vec{p}), \lambda_\mu(0)] = \quad (3.128)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{W^3} \left[V^3 - \frac{3}{2}V^3[1(\mu)] + \frac{3}{4}V^3[2(\mu)] + \frac{1}{8}V^3[3(\mu)] - \frac{p_\mu^2}{4} \left(B[3] \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{5}{2}B[3, 1] + \frac{3}{2}B[3, 2] - \frac{1}{4}B[3, 3] \right) - V_\mu^3 + V_\mu^3[1(\mu)] - \frac{1}{4}V_\mu^3[2(\mu)] \right].
\end{aligned}$$

3.7.3 Calcoli supplementari

Abbiamo inoltre usato per ricavare le espressioni precedenti a momento zero le seguenti uguaglianze. Definiamo:

$$\cos \vec{p} := \sum_{\mu} \cos p_{\mu}, \quad (3.129)$$

allora:

$$\begin{aligned}
\cos \vec{p} &= 2 - \frac{1}{2}\hat{p}^2 \\
\cos^2 \vec{p} &= 4 - 2\hat{p}^2 + \frac{1}{4}(\hat{p}_0^4 + \hat{p}_1^4) + \frac{1}{2}\hat{p}_0^2\hat{p}_1^2 \\
\cos^3 \vec{p} &= 8 - 6\hat{p}^2 + \frac{3}{2}(\hat{p}_0^4 + \hat{p}_1^4 + 2\hat{p}_0^2\hat{p}_1^2) \\
&\quad - \frac{1}{8}(\hat{p}_0^6 + \hat{p}_1^6 + 3\hat{p}_0^4\hat{p}_1^2 + 3\hat{p}_0^2\hat{p}_1^4) \\
\cos^4 \vec{p} &= 16 - 16(\hat{p}_0^2 + \hat{p}_1^2) + 6(\hat{p}_0^4 + \hat{p}_1^4) - (\hat{p}_0^6 + \hat{p}_1^6) + \frac{1}{16}(\hat{p}_0^8 + \hat{p}_1^8) + 12\hat{p}_0^2\hat{p}_1^2 \\
&\quad - 3(\hat{p}_0^4\hat{p}_1^2 + \hat{p}_0^2\hat{p}_1^4) + \frac{1}{4}(\hat{p}_0^6\hat{p}_1^2 + \hat{p}_0^2\hat{p}_1^6) + \frac{3}{8}\hat{p}_0^4\hat{p}_1^4. \quad (3.130)
\end{aligned}$$

Capitolo 4

Criticità ad albero

Come trovato da [4] in accordo con simulazioni fatte per $N = 3$, abbiamo che il sistema in esame presenta criticità per quanto riguarda la correlazione *energia-energia*; si osserva quindi un calore specifico divergente. Lo stimolo da cui parte questo lavoro è che le due precedenti referenze trovano comportamenti critici differenti. Quello che facciamo ora è di tentare uno sviluppo in N^{-1} del nostro sistema, recuperare i risultati di [4] (diagrammi ad albero) e cercare di estendere il conto a un loop effettivo (nel prossimo capitolo).

4.1 Studio della gap-equation

Discutere il comportamento critico del sistema all'ordine zero, equivale a studiare l'unicità o meno della soluzione delle equazioni del punto sella (5.25); se infatti queste ammettono più di una soluzione allora saranno presenti più fasi possibili del sistema, tra le quali quella che minimizza l'energia libera (3.27) viene definita stabile.

In questa sezione studiamo dettagliatamente la parametrizzazione di β ottenuta dalle equazioni del punto sella:

$$\begin{aligned}\beta(m_0^2) &= \frac{I(m_0^2)}{W'(\bar{p}^0)} \\ \bar{p}^0(m_0^2) &= 2 + \frac{m_0^2}{4} - \frac{1}{4I(m_0^2)}.\end{aligned}\tag{4.1}$$

Nella fig. (4.1), si disegna l'andamento di β per vari valori di p . Ritroviamo che m_0 si mantiene strettamente positiva per valori di β finiti, non abbiamo quindi ordine a lungo range per β finiti.

Tuttavia quello che colpisce di più è la struttura *massimo-minimo* che compare per un opportuno $p > p_c$. Teniamo conto che abbiamo ottenuto l'energia libera (3.27) in funzione di m_0^2 . Quindi se per un fissato $\beta = \bar{\beta}$, temperatura del sistema, esistono più m_0^2 corrispondenti (come succede per esempio per $p = 5.5$), il sistema avrà accesso a più di una configurazione

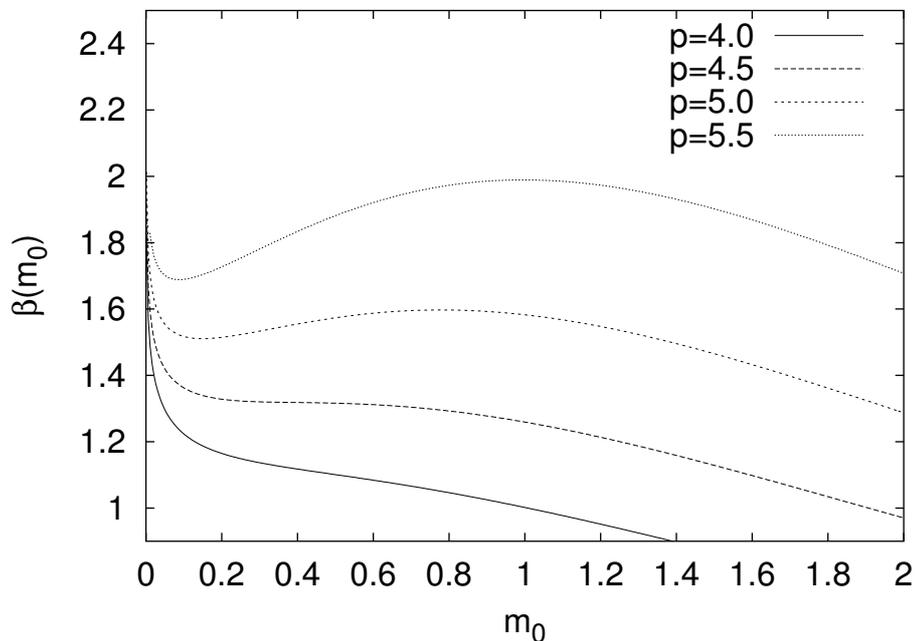


Figura 4.1: β per vari valori di p . Il punto in cui il massimo e il minimo si annichilano fissa i parametri critici β_c , p_c e $m_{0,c}$

possibile. La configurazione stabile è quella che minimizza l'energia libera. Per p piccoli non osserviamo quindi transizioni di fase, mentre per p grandi siamo in presenza di una transizione di fase di prima specie. Questa in particolare si spegne in una transizione continua, per un particolare valore p_c per cui la struttura *massimo-minimo* degenera in un flesso orizzontale.

Nella fig. (4.2) riportiamo l'energia libera del sistema per $p = 5$. In questa è ben visibile come tendendo al punto critico le due fasi stabili si incrociano per diventare metastabili. La fase instabile richiude queste due linee metastabili creando la tipica forma a farfalla. Si vede inoltre come l'energia libera della fase stabile presenti una discontinuità nella sua derivata prima.

Uno studio numerico di $\beta(m_0^2, p_c)$ fatto in [4] permette di ottenere i seguenti risultati al punto critico:

$$\begin{aligned} \beta - \beta_c &= -a(m_0 - m_{0c})^3 + O\left((m_0 - m_{0c})^4\right) \\ a &= -0.035726, \\ \beta_c &= 1.33472, \\ p = p_c &= 4.537857. \end{aligned} \tag{4.2}$$

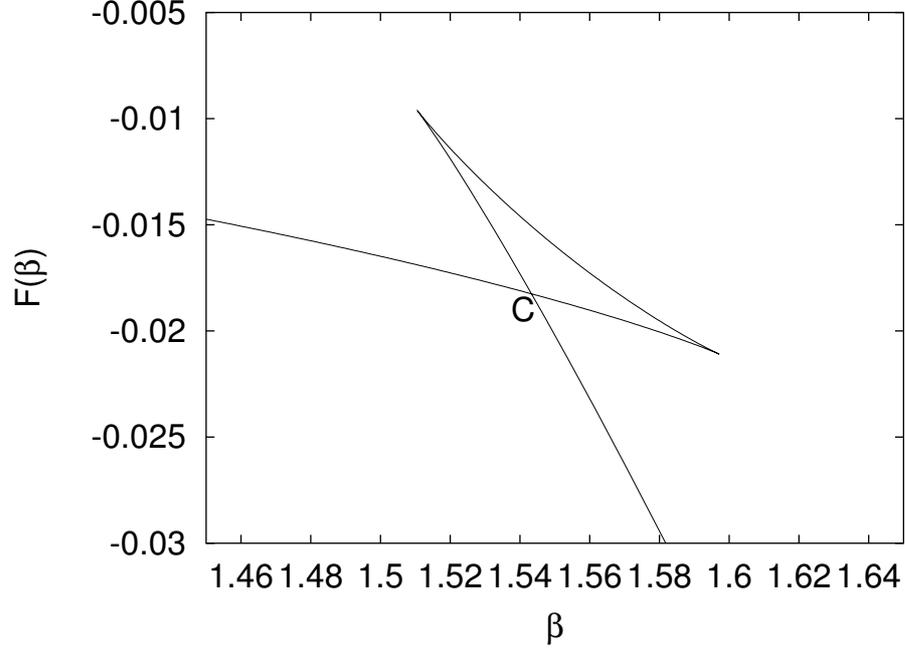


Figura 4.2: Energia libera in funzione di β per $p = 5$. Si osservi la tipica forma a farfalla costituita da due fasi stabili (ad energia inferiore), due metastabili e una instabile.

Tutte le quantità fisiche vengono ottenute in funzione dei campi e della temperatura; questi a loro volta sono stati parametrizzati da m_0^2 . Se vogliamo esprimere allora queste grandezze in funzione di β , dobbiamo invertire la relazione appena scritta (4.2), questo introduce delle non analiticità. Infatti a p_c :

$$m_0^2 - m_{0,c}^2 \sim (\beta - \beta_c)^{\frac{1}{3}}. \quad (4.3)$$

Quindi anche se ottengo grandezze analitiche in m_0^2 , queste diventano non analitiche in un intorno del punto critico se espresse in funzione di β . Considerando l'energia media del sistema:

$$E = \bar{p}^0(m_{0,c}^2) + \frac{d\bar{p}^0(m_{0,c}^2)}{dm_0^2} (m_0^2 - m_{0,c}^2) + \dots \quad (4.4)$$

troviamo:

$$\begin{aligned} E &= E_0 + \Lambda_c (\beta - \beta_c)^{\frac{1}{3}} \\ C &\sim (\beta - \beta_c)^{-\frac{2}{3}}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Ritroviamo quindi un comportamento critico per il calore specifico come anticipato nel capitolo 2. Ci preoccupiamo ora di trovare un parametro d'ordine che regoli questa transizione, trovando come ci aspettiamo l'energia.

4.2 Singolarità del propagatore P

Vogliamo studiare la correlazione energetica. Visto il formalismo introdotto questa non è altro che la funzione a due punti dei campi ρ . Dal momento che ci limitiamo a considerazioni ad albero, studiamo il propagatore P , in particolare i suoi comportamenti divergenti.

4.2.1 Determinante

Vista la forma di $P^{-1}(\vec{p})$ ci aspettiamo una formula abbastanza complicata per $P(\vec{p})$. Siamo tuttavia interessati a divergenze del propagatore; queste, vista la formula analitica di P^{-1} , non possono che essere ricollegate a zeri del determinante. Il programma che ci proponiamo è quello di verificare che il determinante si fattorizza per $\vec{p} = (p, p)$; un fattore ($D_1(\vec{p})$) si annulla per valori dei parametri critici ed a momento esterno nullo. Dimostriamo infatti l'uguaglianza:

$$D_1(0) \sim \frac{d\beta}{dm_0^2}, \quad (4.6)$$

con β dato dalla gap-equation (4.1). D_1 può essere definito a meno di una costante, quello che faremo sarà di imporre:

$$D_1(0) = -\frac{d\beta}{dm_0^2}. \quad (4.7)$$

Osseviamo che per $p = p_c$ $D_1(0) > 0$. Supponendo di sviluppare $D_1(\vec{p})$, avremo:

$$D_1(p) = k(M^2 + p^2) + O(p^4) = k(M^2 + \hat{p}^2) + O(\hat{p}^4). \quad (4.8)$$

Viste le condizioni di criticità assunte:

$$\frac{d\beta(m_{0c})}{dm_0^2} = 0, \quad (4.9)$$

$$\frac{d^2\beta(m_{0c})}{(dm_0^2)^2} = 0, \quad (4.10)$$

abbiamo che anche la derivata prima di D_1 va a zero per valori dei parametri critici, questo suggerisce che:

$$M \sim m_0 - m_{0,c}, \quad (4.11)$$

con M che viene riletta come la massa non rinormalizzata degli ausiliari.

Troviamo:

$$\begin{aligned} D_1(0) &= \frac{1}{\beta W'^3} \left(4A_{0,1}^2 W'' - 2A_{0,0}A_{0,2}W'' - 2A_{0,0}A_{1,1}W'' + A_{0,0}\beta W'^2 \right) \\ &= \frac{1}{4\beta W'^3} \left(4B[1]B[2]W' + (B[1]^2 - B[2])W'' \right). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Essendo:

$$\frac{d\beta}{dm_0^2} = -\frac{1}{4B[1]W'^2} \left(W''(B[1]^2 - B[2]) + 4W'B[1]B[2] \right), \quad (4.13)$$

otteniamo il risultato preannunciato.

Sempre a momento zero, dopo aver fattorizzato l' inverso del determinante che compare nella formula dell' inverso, troviamo:

$$\begin{aligned} \sum_{\mu,\nu} \langle \hat{\rho}_\mu(0), \hat{\rho}_\nu(0) \rangle &= - \sum_{a,b=4}^5 P_{a,b}(0) = \\ &= \frac{2(B[1]^2 - B[2])}{W'^2\beta(W''(B[1]^2 - B[2]) + 4W'B[1]B[2])} \sim (\beta - \beta_c)^{-\frac{2}{3}}, \end{aligned} \quad (4.14)$$

dove abbiamo utilizzato i risultati ottenuti sopra, e la parametrizzazione di β in un intorno della criticità. Abbiamo dimostrato così che la suscettività energetica, si presenta critica, con un coefficiente critico uguale a quello del calore specifico.

4.2.2 Formula completa per $P(0)$

Nella precedente sezione non abbiamo utilizzato esplicitamente la forma di P se non per l' ultima espressione. Anche se abbiamo esaurito lo studio della criticità ad albero, ne approfittiamo per scrivere i termini del propagatore e alcuni altri elementi che utilizzeremo massicciamente nel prossimo capitolo.

Una semplificazione notevole è presente nel momento in cui vogliamo calcolare il propagatore per valori dell' impulso \vec{p} tali che $p_1 = p_2$. Per questi valori infatti si ha l' uguaglianza $A_{i,j} = A_{j,i}$ essendo in generale $A_{i,j}(p_1, p_2) = A_{j,i}(p_2, p_1)$.

Cerchiamo di ricavare espressioni esatte, nel prossimo capitolo faremo le dovute approssimazioni. Si evince che molte quantità si scrivono in modo naturale in termini di $\frac{d\beta}{dm_0^2}$, come abbiamo visto succedere per il determinante.

Otteniamo:

$$P_{0,0} = \frac{8A_{0,1}^2 W''}{A_{0,0} W' \beta} \left(-\frac{d\beta}{dm_0^2} \right)^{-1} + \frac{2W'^2}{A_{0,0}} \quad (4.15)$$

$$P_{0,1} = P_{0,2} = \frac{4A_{0,1}^2 W''}{W' \beta} \left(-\frac{d\beta}{dm_0^2} \right)^{-1} \quad (4.16)$$

$$P_{1,1} = \left(-\frac{d\beta}{dm_0^2} \right)^{-1} \frac{4W''(2A_{0,1}^2 W'' - 2A_{0,0}A_{0,2}W'' + A_{0,0}W'^2\beta)}{W'\beta(2A_{1,1}W'' - 2A_{0,2}W'' + W'^2\beta)} \quad (4.17)$$

$$P_{1,2} = \left(-\frac{d\beta}{dm_0^2} \right)^{-1} \frac{8W''^2(A_{0,1}^2 - A_{0,0}A_{1,1})}{W'\beta(2A_{1,1}W'' - 2A_{0,2}W'' + W'^2\beta)} \quad (4.18)$$

$$P_{1,3} = \left(-\frac{d\beta}{dm_0^2} \right)^{-1} \frac{4A_{0,1}^2 W'' - 4A_{0,0}A_{0,2}W'' + 2A_{0,0}W'^2\beta}{2A_{0,2}W'W''\beta - 2A_{1,1}W'W''\beta - W'^3\beta^2} \quad (4.19)$$

$$P_{1,4} = \left(-\frac{d\beta}{dm_0^2} \right)^{-1} \frac{4A_{0,1}^2 W'' - 4A_{0,0}A_{1,1}W''}{-2A_{0,2}W'W''\beta + 2A_{1,1}W'W''\beta + W'^3\beta^2} \quad (4.20)$$

$$P_{3,3} = \left(-\frac{d\beta}{dm_0^2} \right)^{-1} \left[\frac{A_{0,1}^2(8A_{1,1}W'' - 8A_{0,2}W'' + 2W'^2\beta)}{W'^3\beta^2(-2A_{0,2}W'' + 2A_{1,1}W'' + W'^2\beta)} + \frac{2A_{0,0}(2A_{0,2}^2 W'' - 2A_{1,1}^2 W'' - A_{0,2}W'^2\beta)}{W'^3\beta^2(-2A_{0,2}W'' + 2A_{1,1}W'' + W'^2\beta)} \right] \quad (4.21)$$

$$P_{3,4} = \left(-\frac{d\beta}{dm_0^2} \right)^{-1} \frac{2A_{0,1}^2 - 2A_{0,0}A_{1,1}}{W'\beta(-2A_{0,2}W'' + 2A_{1,1}W'' + W'^2\beta)}. \quad (4.22)$$

Queste si completano in modo naturale con alcune relazioni immediate come $P_{0,1} = P_{0,2}$.

Possiamo estendere in maniera banale le formule appena scritte al caso in cui $\vec{p} = (p, p)$ (oppure $\vec{p} = (p, -p)$), sostituendo a ciascun termine $A_{i,j} := A_{i,j}(0) A_{i,j}(\vec{p})$, e fattorizzando tutte le espressioni con:

$$\frac{1}{-\frac{d\beta}{dm_0^2} + ap^2 + \Sigma(p^2)}, \quad (4.23)$$

con a e $\Sigma(x)$ specificati in seguito.

Possiamo semplificare il risultato appena ottenuto, se pensiamo di contrarre P con un vettore che non distingue indici vettoriali. Questo succede nel calcolo dei valori di aspettazione dei campi all'ordine N^{-1} (magnetizzazione). In questo caso il vettore (che chiameremo h_α), essendo un oggetto ad impulso nullo, non distingue indici vettoriali $h_1 = h_2$ e $h_3 = h_4$.

Se sommiamo termini di P nel modo seguente:

$$\sum_{\beta} P_{\alpha,\beta} h_\beta = P_{\alpha,0} h_0 + (P_{\alpha,1} + P_{\alpha,2}) h_1 + (P_{\alpha,3} + P_{\alpha,4}) h_4, \quad (4.24)$$

otteniamo:

$$P_{0,3} = P_{0,4} = \frac{2A_{0,1}}{W'\beta} \left(-\frac{d\beta}{dm_0^2} \right)^{-1} \quad (4.25)$$

$$P_{1,1} + P_{1,2} = \frac{4A_{0,0}W''}{W'\beta} \left(-\frac{d\beta}{dm_0^2} \right)^{-1} \quad (4.26)$$

$$P_{1,3} + P_{1,4} = \frac{2A_{0,0}}{W'\beta} \left(-\frac{d\beta}{dm_0^2} \right)^{-1} \quad (4.27)$$

$$P_{3,3} + P_{3,4} = \frac{A_{0,0}}{W'W''\beta} \left(-\frac{d\beta}{dm_0^2} \right)^{-1} + \frac{1}{\beta W''}. \quad (4.28)$$

D' ora innanzi conviene porre:

$$-\frac{d\beta}{dm_0^2} =: s \quad (4.29)$$

In un intorno del punto critico, come vedremo nel prossimo capitolo, la parte singolare della precedente espressione si scriverà in un modo più geometrico, in termini del modo zero z_α di P^{-1} . A tal proposito vale la relazione:

$$\lim_{s \rightarrow 0} sP_{\alpha,\beta} \sim z_\alpha z_\beta, \quad (4.30)$$

come si può capire semplificando le espressioni di P utilizzando la definizione di s in termini delle grandezze $A_{i,j}$.

4.3 Studio di $P(\vec{p})$

Utilizziamo i risultati del capitolo precedente, dove abbiamo trovato:

$$A_{i,j}(\vec{p}) = A_{i,j}(0) + f_{i,j} + O(p^4), \quad (4.31)$$

con $f_{i,j}$ che contiene termini quadratici nelle \vec{p} .

Se supponiamo di essere a $\vec{p} = (p_1, p_2)$, mi accorgo che per valori $p_1 \neq p_2$ non riesco a fattorizzare il determinante come è stato fatto nelle precedenti sezioni. Tuttavia considerazioni di covarianza ci portano a pensare che all'ordine più basso gli elementi della teoria debbano dipendere solamente da p^2 (essendo su reticolo all'ordine successivo non si recupera questo fatto), ciò segue dal fatto che $\hat{p}^2 = p^2 + O(p^4)$. Quello che faremo sarà di sviluppare tutti gli elementi della teoria al prim'ordine per $p_1 = p_2 =: t$, generalizzando poi il risultato nel momento in cui otteniamo degli sviluppi in $p^2 = 2t^2$. Se per esempio ci aspettiamo che per una quantità f si abbia $f(p_1, p_2) = g(\hat{p}^2)$, avremo che $f(p, p) = g(2p^2) + O(p^4)$.

Iniziamo con la parte singolare del determinante. Scrivendo:

$$D_1(\vec{p}) = -\frac{d\beta}{dm_0^2} + ap^2 + O(p^4) \quad (4.32)$$

otteniamo

$$ap^2 = \frac{1}{\beta W'^3} \left[B[1]W'f_{0,0} - W'' \left(2f_{0,0}A_{0,2} + A_{0,0}(f_{0,2} + f_{2,0}) + 2A_{1,1}f_{0,0} + 2A_{0,0}f_{1,1} - 4A_{0,1}(f_{0,2} + f_{2,0}) \right) \right]. \quad (4.33)$$

Abbiamo scritto in questo modo questa relazione perchè facilmente implementabili e prolungabili per qualsiasi valori di p .

Se ora ci restringiamo pure in un intorno del punto critico, riscriviamo l' espressione (4.32) come:

$$D_1(\vec{p}) = 3a(m_0 - m_{0,c})^2 + a_0 p^2 + \Lambda(m_0^2, p^2), \quad (4.34)$$

con:

$$\Lambda(x, y) \sim x^3 + k_1 y^2 + k_2 xy + \dots \quad (4.35)$$

dove abbiamo sottinteso tutti gli ordini successivi dello sviluppo. Abbiamo che a è dato dalla (4.2) e $a_0 = 0.783$.

Concentriamoci sulla parte vettoriale del propagatore. È utile capire per che cosa ci occorre lo sviluppo di P . Nel capitolo successivo dovremo calcolare al prim' ordine in p^2 la quantità entro l' integrale:

$$\sum_{\alpha, \beta, \gamma} z_\alpha \int d\vec{p} V_{\alpha, \beta, \gamma}(0, \vec{p}, -\vec{p}) P_{\beta, \gamma}(\vec{p}). \quad (4.36)$$

È chiaro che questa quantità debba dipendere *solamente* da \hat{p}^2 , possiamo quindi applicare di fatto le considerazioni svolte all' inizio di questa sezione, mettiamoci cioè nel caso in cui $p_1 = p_2$. In tal caso possiamo scrivere:

$$P_{\alpha, \beta} =: \frac{1}{-\frac{d\beta}{dm_0^2} + ap^2 + \Sigma(p^2)} \left[\Gamma_{\alpha, \beta} + \Gamma'_{\alpha, \beta} p^2 + O(p^4) \right], \quad (4.37)$$

con

$$\Sigma(x) \sim x^2 \quad (4.38)$$

per $x \rightarrow 0$. Abbiamo indicato con Γ' la parte in p^2 una volta fattorizzato la parte del determinante che abbiamo ben analizzato prima. Ci interessa uno sviluppo in p^2 perchè siamo interessati ad uno sviluppo formale in $\frac{d\beta}{dm_0^2}$ della (4.36). Vorremmo trovare con esattezza i coefficienti di questa serie per i termini $\left(\frac{d\beta}{dm_0^2}\right)^i \log\left(\frac{d\beta}{dm_0^2}\right)$, con $i = 0, 1$.

Il termine di simmetria per $\log\left(\frac{d\beta}{dm_0^2}\right)$ proviene dalla contrazione di $\Gamma_{\alpha, \beta}$ con z_γ e $V_{\alpha, \beta, \gamma}$. Vedremo come questo termine si cancelli per $m_0^2 = m_{0,c}^2$, e più in generale per una famiglia di valori $m_c(p)$, introdotti in seguito.

Il termine di simmetria per $\left(\frac{d\beta}{dm_0^2}\right) \log\left(\frac{d\beta}{dm_0^2}\right)$ proviene analogamente dalla contrazione di $\Gamma'_{\alpha, \beta}$ con V e z . In realtà un termine del genere viene fornito pure dal termine quartico fornito da $\Sigma(x)$. Infatti questo fornisce:

$$\frac{p^4}{\left(\frac{d\beta}{dm_0^2} + p^2\right)^2} = 1 - 2 \frac{d\beta}{dm_0^2} \frac{1}{\frac{d\beta}{dm_0^2} + p^2} + \left[\frac{d\beta}{dm_0^2}\right]^2 \frac{1}{\left(\frac{d\beta}{dm_0^2} + p^2\right)^2}. \quad (4.39)$$

Il secondo termine contribuirebbe al fattore di simmetria su cui ci siamo soffermati, solamente attraverso la contrazione di $\Gamma_{\alpha, \beta}$ con il vertice. Avremo

quindi la medesima cancellazione accennata in precedenza (in realtà a meno di un fattore $\frac{d\beta}{dm_0^2}$, valido quindi per il termine successivo). Il lettore attento si sarà accorto a questo punto che nell'ultimo ragionamento abbiamo assunto di essere ancora a $p_1 = p_2$, ma dal momento che andiamo a cercare un termine dell'ordine p^4 , questa posizione non è più valida. Tuttavia anche in questo caso abbiamo che la parte vettoriale del propagatore sarà un multiplo di Γ , si riproporrà quindi la medesima cancellazione.

Da queste considerazioni apprendiamo che nello sviluppare P posso trascurare di farlo per il suo denominatore.

Capitolo 5

Criticità ad un loop

In questo capitolo cercheremo di estendere le considerazioni fatte all'ordine zero ai valori d'aspettazione dei campi, e al primo ordine per la correlazione energetica.

Il valore d'aspettazione dei campi seguono dalle equazioni del moto del sistema. Queste permettono di parametrizzare tutti gli elementi della teoria, in analogia con quanto avviene all'ordine zero. In particolare scegliendo ancora come definizione:

$$\beta := \frac{I[m_0^2]}{W'(\bar{\rho}_0(m_0^2))}, \quad (5.1)$$

otteniamo:

$$\bar{\Psi}_\alpha(m_0^2) := \langle \Psi_\alpha \rangle. \quad (5.2)$$

Nel seguito porremo:

$$\bar{\Psi}_\alpha(m_0^2) =: \bar{\Psi}_\alpha^0(m_0^2) + \frac{1}{N} \bar{\Psi}_\alpha^1(m_0^2) + O\left(\frac{1}{N^2}\right). \quad (5.3)$$

5.1 Equazioni del moto

Partendo dalla definizione di Z , e usando la proprietà dell'integrazione per parti, otteniamo le equazioni del moto del nostro sistema. Infatti:

$$0 = \int \prod_x d\sigma_x \prod_\alpha d\Psi_\alpha \frac{\delta}{\delta\Psi_\alpha} e^{NA[\sigma, \Psi]}, \quad (5.4)$$

da cui ricaviamo:

$$\begin{aligned} 1 &= \langle \vec{\sigma}_x^2 \rangle, \\ \langle \rho_{x,\mu} \rangle &= 1 + \langle \vec{\sigma}_x \vec{\sigma}_{x+\mu} \rangle, \\ \langle \lambda_{x,\mu} \rangle &= 2 \langle W(\rho_{x,\mu}) \rangle. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Le prime due uguaglianze sono evidenti essendo i vincoli per cui sono stati introdotti i campi ausiliari μ e λ . Dalla seconda segue che necessariamente il valore di aspettazione di ρ non può divergere:

$$0 \leq \langle \rho_{x,\mu} \rangle \leq 2. \quad (5.6)$$

Non ci aspettiamo di recuperare questo risultato *non perturbativo*. Infatti abbiamo trovato che all'ordine zero $\langle \rho \rangle$ si comporta come:

$$\bar{\rho}^0 = a + (\beta - \beta_{0,c})^{\frac{1}{3}}, \quad (5.7)$$

se ora supponiamo che questa relazione all'ordine successivo corregga $\beta_{0,c}$ (in realtà quello che ci interessa è la correzione dell'esponente) troviamo:

$$\begin{aligned} \bar{\rho}^0 + \bar{\rho}^1 &= a' + (\beta - \beta_{0,c} - \frac{\beta_{1,c}}{N})^{\frac{1}{3}} \\ &= a' + (\beta - \beta_{0,c})^{\frac{1}{3}} - \frac{\beta_{1,c}}{3N}(\beta - \beta_{0,c})^{-\frac{2}{3}} + O(\frac{1}{N^2}). \end{aligned} \quad (5.8)$$

La non analiticità dell'espressione in β fa sì che siano presenti delle divergenze ad un dato ordine perturbativo.

5.2 Il riassorbimento delle divergenze

L'ultimo esempio appena scritto, spiega molto bene la nostra strategia. Andremo a calcolare delle quantità ad un loop, utilizzando gli elementi calcolati nel capitolo 3 in funzione dei campi all'ordine zero, parametrizzati dalle equazioni del punto sella ($\bar{\psi}^0(m_0^2)$). Compagno delle divergenze, legate alla singolarità del propagatore, come è stato messo in evidenza nel capitolo 4. Le equazioni del moto ci garantiscono che in qualche modo queste divergenze si devono risommare agli ordini successivi. Quello che facciamo è di proporre un ansatz per le quantità che vogliamo calcolare, sviluppare questo ansatz all'ordine N^{-1} (se stiamo parlando per esempio del valore di aspettazione dell'energia) e per confronto estrapolare le correzioni di interesse. Tuttavia l'ansatz lo otteniamo in funzione di β , mentre il calcolo ci fornisce grandezze dipendenti da m_0^2 . Essendo in un intorno dei parametri critici, possiamo utilizzare la relazione valida all'ordine zero e per $p = p_c$:

$$\beta - \beta_c \sim (m_0^2 - m_{0,c}^2)^3. \quad (5.9)$$

Vedremo poi, per eliminare un'ulteriore divergenza, che la relazione appena scritta non coinvolge i giusti campi che scalano.

Poniamo il seguente ansatz per il valore d'aspettazione dell'energia, estendendo la (5.8):

$$E \sim \left(\beta - \beta_{c,0} - \frac{\beta_{c,1}}{N} \right)^{\frac{1}{3} + \frac{a}{N}} + O\left(\frac{1}{N^2}\right),$$

$$\begin{aligned}
&= (\beta - \beta_{c,0})^{\frac{1}{3}} + \frac{a}{3N} (\beta - \beta_{c,0})^{\frac{1}{3}} \log(\beta - \beta_{c,0}) \\
&\quad - \frac{\beta_{c,1}}{3N} (\beta - \beta_{c,0})^{-\frac{2}{3}} + O\left(\frac{1}{N^2}\right). \tag{5.10}
\end{aligned}$$

Le divergenze $(m_0^2 - m_{0,c}^2)^{-2}$ possono essere riassorbite correggendo la temperatura critica. La quantità che ci interessa proviene dal termine logaritmico. Potrebbero comparire delle divergenze della forma $(m_0^2 - m_{0,c}^2)^{-1}$. Queste sono ottenute correggendo il valore di p_c con un termine dell'ordine N^{-1} , infatti in tal caso abbiamo:

$$\beta - \beta_c = \frac{a}{N} (m_0^2 - m_{0,c}^2) + \frac{b}{N} (m_0^2 - m_{0,c}^2)^2 + c (m_0^2 - m_{0,c}^2)^3 + \dots, \tag{5.11}$$

estraendo la radice cubica otteniamo:

$$(\beta - \beta_c)^{\frac{1}{3}} \sim (m_0^2 - m_{0,c}^2) + \frac{a}{3Nc} \frac{1}{(m_0^2 - m_{0,c}^2)} + \frac{b}{3Nc} + O\left(\frac{1}{N^2}\right), \tag{5.12}$$

da cui si vede che compare il fattore divergente che ci interessava. Dal momento che siamo interessati alla correzione dell'esponente critico, d'ora in avanti ci prenderemo cura soltanto dei contributi logaritmici.

Per ottenere queste divergenze è fondamentale il comportamento non analitico di β rispetto m .

Dall'ultima espressione si evince che in realtà una relazione naturale tra β e m_0^2 deve coinvolgere pure p (infatti $a = \frac{d\beta}{dp}$), questo porterà a scrivere una relazione di scala in un intorno della criticità. Utilizzando questa relazione elimineremo una divergenza non inquadabile con il nostro ansatz. Sostanzialmente i veri campi che scalano sono $\beta - \beta_c(p)$ e $m_0^2 - m_c(p)^2$, con $m_c(p)$ definito meglio in seguito. Questo non inficia quanto detto fino ad ora, dal momento che siamo già all'ordine N^{-1} per cui ci basta scrivere una relazione all'ordine zero; tuttavia ho un vincolo in più che mi fornisce la giusta condizione.

5.3 Valore di aspettazione di Ψ_α

5.3.1 Equazioni del moto all'ordine N^{-1}

All'ordine zero abbiamo parametrizzato la teoria imponendo la stazionarietà dell'azione:

$$\frac{\delta S[\bar{\Psi}^0]}{\delta \Psi_\alpha} = 0. \tag{5.13}$$

D'altra parte identificando $S[\Psi] = \Gamma^{(0)}[\Psi]$ (1.52) estendiamo la precedente (5.13) all'ordine successivo:

$$\frac{\delta \left(\Gamma^{(0)}[\bar{\Psi}] + N^{-1} \Gamma^{(1)}[\bar{\Psi}] \right)}{\delta \Psi_\alpha} = 0. \tag{5.14}$$

Riconosciamo che queste ci dicono che:

$$\bar{\Psi} = \langle \Psi \rangle, \quad (5.15)$$

e quindi sostanzialmente stiamo riscrivendo le equazioni del moto (5.5). Utilizzando (5.3) riscriviamo la (5.14) come:

$$\begin{aligned} \frac{\delta \left(\Gamma^{(0)}[\bar{\Psi}^0 + \frac{1}{N}\bar{\Psi}^1] + N^{-1}\Gamma^{(1)}[\bar{\Psi}^0] \right)}{\delta \Psi_\alpha} + O\left(\frac{1}{N^2}\right) &= 0 \\ \sum_\beta \frac{\delta^2 S[\bar{\Psi}^0]}{\delta \Psi_\alpha \delta \Psi_\beta} \bar{\Psi}_\beta^1 + N^{-1} \frac{\delta \Gamma^{(1)}[\bar{\Psi}^0]}{\delta \Psi_\alpha} + O\left(\frac{1}{N^2}\right) &= 0, \end{aligned} \quad (5.16)$$

equazione che fornisce $\bar{\Psi}^1$.

Riprendiamo la forma di (1.52) Γ :

$$\Gamma[\Psi] = S[\Psi] + \frac{1}{2N} \text{tr} \left[\log \frac{\delta^2 S[\Psi]}{\delta \Psi \delta \Psi} - \log \frac{\delta^2 S[0]}{\delta \Psi \delta \Psi} \right] + O\left(\frac{1}{N^2}\right), \quad (5.17)$$

troviamo, utilizzando le espressioni ottenute nei precedenti capitoli:

$$\begin{aligned} \frac{\delta \Gamma^{(1)}[\bar{\Psi}^0]}{\delta \Psi_\alpha} &= \frac{1}{2} \sum_{\beta, \gamma} \frac{\delta^3 S[\bar{\Psi}^0]}{\delta \Psi_\alpha \delta \Psi_\beta \delta \Psi_\gamma} \frac{\delta^{-2} S[\bar{\Psi}^0]}{\delta \Psi_\beta \delta \Psi_\gamma} \\ &=: -\frac{1}{2} \sum_{\beta, \gamma} V[\Psi_\alpha, \Psi_\beta, \Psi_\gamma] P_{\beta, \gamma}, \end{aligned} \quad (5.18)$$

con P e V propagatore e vertici della teoria. Riscriviamo la precedente espressione astratta nello spazio dei momenti, definendo le grandezze h_α :

$$h_\alpha = \sum_{\beta, \gamma} \int d\vec{p} V_{\alpha, \beta, \gamma}(0, \vec{p}, -\vec{p}) P_{\beta, \gamma}(\vec{p}). \quad (5.19)$$

Tutto ciò fornisce il risultato:

$$\bar{\Psi}_\alpha^1 = \frac{1}{2} P_{\alpha, \beta}(0) h_\beta, \quad (5.20)$$

correzione al valore di aspettazione dei campi all'ordine desiderato data la definizione assunta di β .

5.4 Correlazione energetica

Vogliamo studiare la correlazione energetica. A tal proposito introduciamo un termine di corrente nell'azione iniziale. Calcoliamo :

$$Z[J] = \int \prod_x d\vec{\sigma}_x e^{-\sum_{x, \mu} \beta W(1 + \vec{\sigma}_x \vec{\sigma}_{x+\mu}) + J_{x, \mu}(1 + \vec{\sigma}_x \vec{\sigma}_{x+\mu})}. \quad (5.21)$$

Di fatto stiamo modificando la funzione W con un termine aggiuntivo dipendente da J :

$$W^I(J_{x,\mu}, 1 + \vec{\sigma}_x \vec{\sigma}_{x+\mu}) = W(1 + \vec{\sigma}_x \vec{\sigma}_{x+\mu}) + J_{x,\mu}(1 + \vec{\sigma}_x \vec{\sigma}_{x+\mu}). \quad (5.22)$$

Se procediamo in modo analogo alla linearizzazione dell'azione, mediante l'introduzione degli ausiliari, troveremo un termine di corrente per i campi $\rho_{x,\mu}$. Introduciamo allora un termine di corrente nell'azione linearizzata:

$$Z[J] = \int d\Psi e^{N[S[\Psi] + J\Psi]}. \quad (5.23)$$

Le soluzioni classiche $\bar{\Psi}^0$ ora hanno una dipendenza da J , infatti:

$$\frac{\delta S[\bar{\Psi}_J^0]}{\delta \Psi_\alpha} = -J_\alpha. \quad (5.24)$$

In altre referenze, [8] la precedente compare a meno di un segno, questo è dovuto alla definizione di Z preso con S o $-S$, questo non ci crea nessun problema per il fatto che il propagatore deve essere definito positivo, quindi nell'uno e nell'altro caso sarà rispettivamente $-\delta^2 S$ e $\delta^2 S$.

Studiamo l'equazione del punto sella (5.24) nello spazio delle configurazioni, questo ci permette di ottenere delle relazioni per la derivata dei campi rispetto J quando il termine di sorgente esterno è nullo. Abbiamo:

$$\frac{\delta S[\bar{\Psi}_J^0]}{\delta \Psi_\alpha(x)} = -J_\alpha(x). \quad (5.25)$$

Rispetto la notazione originale assunta per i campi nello spazio delle configurazioni ($\hat{\Psi}_\alpha(x)$), ci siamo dimenticati del cappelletto per alleggerire la notazione. Quello che facciamo ora, è sviluppare la (5.25) al primo e al secondo ordine in J , per ottenere delle relazioni che ci diano $\frac{\delta \bar{\Psi}_\alpha}{\delta J}$ per $J = 0$. Scrivendo:

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}_J^0(x) &= \bar{\Psi}_0^0(x) + \sum_{\beta,y} \frac{\delta \bar{\Psi}_0^0(x)}{\delta J_\beta(y)} J_\beta(y) + \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta,y,z} \frac{\delta^2 \bar{\Psi}_0^0(x)}{\delta J_\alpha(y) \delta J_\beta(z)} J_\alpha(y) J_\beta(z) \\ &+ O(J^3), \end{aligned} \quad (5.26)$$

e introducendo questo sviluppo nella (5.25), otteniamo:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{\beta,y} \frac{\delta^2 S[\bar{\Psi}_0^0]}{\delta \Psi_\alpha(x) \delta \Psi_\beta(y)} \left(\sum_{\gamma,z} \frac{\delta \bar{\Psi}_{0,\beta}^0(y)}{\delta J_\gamma(z)} J_\gamma(z) + \frac{1}{2} \sum_{\gamma,z,\lambda,t} \frac{\delta^2 \bar{\Psi}_{0,\beta}^0(y)}{\delta J_\gamma(z) \delta J_\lambda(t)} J_\gamma(z) J_\lambda(t) \right) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{\delta,\theta,t,q} \sum_{\beta,\gamma,y,z} \frac{\delta^3 S[\bar{\Psi}_0^0]}{\delta \Psi_\alpha(x) \delta \Psi_\beta(y) \delta \Psi_\gamma(z)} \frac{\delta \bar{\Psi}_{0,\beta}^0(y)}{\delta J_\delta(t)} \frac{\delta \bar{\Psi}_{0,\gamma}^0(z)}{\delta J_\theta(q)} J_\delta(t) J_\theta(q) \\ &+ J_\alpha(x) + O(J^3). \end{aligned} \quad (5.27)$$

Al prim' ordine in J leggiamo:

$$\sum_{\beta,y} P_{\alpha,\beta}(x-y) \frac{\delta \bar{\Psi}_{0,\beta}^0(y)}{\delta J_\gamma(z)} = \delta_{\alpha,\gamma} \delta_{y,z}, \quad (5.28)$$

da cui:

$$\frac{\delta \bar{\Psi}_{0,\alpha}^0(x)}{\delta J_\beta(y)} = P_{\alpha,\beta}(x-y). \quad (5.29)$$

(È questa la formula che concorda con le referenze sopra citate). Segue la proprietà interessante che dice che il primo termine è simmetrico sotto scambio di indici α, β , e/o x, y :

$$\frac{\delta \bar{\Psi}_{0,\alpha}^0(x)}{\delta J_\beta(y)} = \frac{\delta \bar{\Psi}_{0,\beta}^0(x)}{\delta J_\alpha(y)} = \frac{\delta \bar{\Psi}_{0,\alpha}^0(y)}{\delta J_\beta(x)}. \quad (5.30)$$

Al secondo ordine in J leggiamo invece (utilizzando il risultato appena ottenuto sulle derivate prime):

$$\frac{\delta^2 \bar{\Psi}_{0,\alpha}^0(x)}{\delta J_\beta(y) \delta J_\gamma(z)} = \sum_{\delta,\theta,\eta} \sum_{t,p,q} \frac{\delta^3 S[\bar{\Psi}_0^0]}{\delta \Phi_\delta(t) \delta \Phi_\theta(p) \delta \Phi_\eta(q)} P_{\delta,\alpha}(x-t) P_{\theta,\beta}(y-p) P_{\eta,\gamma}(z-q). \quad (5.31)$$

Anche in questo caso abbiamo che possiamo permutare in modo arbitrario sia gli indici spaziali che quelli interni ed abbiamo lo stesso risultato.

Con questi elementi procediamo nel calcolo della funzione a due punti all' ordine N^{-2} . Abbiamo trovato:

$$\begin{aligned} W[J] &= W_0[J] + \frac{1}{N} W_1[J] \\ W_1[J] &= -\frac{1}{2} \left[\text{tr} \log \frac{-\delta^2 S[\bar{\Psi}_J^0]}{\delta \Psi \delta \Psi} - \text{tr} \log \frac{-\delta^2 S[\bar{\Psi}_0^0]}{\delta \Psi \delta \Psi} \right] \end{aligned} \quad (5.32)$$

dove l'ultimo termine (che a noi non interessa perchè indipendente da J) è stato introdotto per garantire che $Z[0] = 1$ all'ordine $\frac{1}{N}$. Vogliamo leggere la correzione della funzione a due punti, deriviamo l'espressione trovata due volte rispetto J . Otteniamo per la derivata prima:

$$\frac{\delta W_1[J]}{\delta J_\alpha(x)} = -\frac{1}{2} \sum_{\beta,y} \frac{\delta^2 S[\bar{\Psi}_J^0]^{-1}}{\delta \Psi \delta \Psi} \frac{\delta^3 S[\bar{\Psi}_J^0]}{\delta \Psi \delta \Psi \delta \Psi_\beta(y)} \frac{\delta \bar{\Psi}_{J,\beta}^0(y)}{\delta J_\alpha(x)}. \quad (5.33)$$

Per la derivata seconda:

$$\frac{\delta^2 W_1[J]}{\delta J_\alpha(x) \delta J_\beta(y)} = \sum_{\gamma,\eta,z,t} \frac{1}{2} \quad (5.34)$$

$$\left[\frac{\delta \bar{\Psi}_{J,\eta}^0(z)}{\delta J_\alpha(x)} \frac{\delta^3 S[\bar{\Psi}_J^0]}{\delta \Psi_\eta(z) \delta \Psi \delta \Psi} \frac{\delta^2 S[\bar{\Psi}_J^0]^{-1}}{\delta \Psi \delta \Psi} \frac{\delta^2 S[\bar{\Psi}_J^0]^{-1}}{\delta \Psi \delta \Psi} \frac{\delta^3 S[\bar{\Psi}_J^0]}{\delta \Psi \delta \Psi \delta \Psi_\delta(t)} \frac{\delta \bar{\Psi}_{J,\delta}^0(t)}{\delta J_\beta(y)} \right. \\ \left. - \frac{\delta \bar{\Psi}_{J,\eta}^0(z)}{\delta J_\beta(y)} \frac{\delta^4 S[\bar{\Psi}_J^0]}{\delta \Psi_\eta(z) \delta \Psi \delta \Psi \delta \Psi_\gamma(t)} \frac{\delta^2 S[\bar{\Psi}_J^0]^{-1}}{\delta \Psi \delta \Psi} \frac{\delta \bar{\Psi}_{J,\delta}^0(t)}{\delta J_\beta(y)} \right] \\ \left[\frac{\delta^3 S[\bar{\Psi}_J^0]}{\delta \Psi \delta \Psi \delta \Psi} \frac{\delta^2 S[\bar{\Psi}_J^0]^{-1}}{\delta \Psi \delta \Psi} \frac{\delta^2 S[\bar{\Psi}_J^0]^{-1}}{\delta \Psi \delta \Psi} \frac{\delta \bar{\Psi}_{J,\eta}^0(z)}{\delta J_\alpha(x)} \frac{\delta^3 S[\bar{\Psi}_J^0]}{\delta \Psi_\eta(z) \delta \Psi \delta \Psi_\delta(t)} \frac{\delta \bar{\Psi}_{J,\delta}^0(t)}{\delta J_\beta(y)} \right]$$

Ponendoci a $J = 0$ riotteniamo nella prima equazione la correzione al valore di aspettazione dei campi, mentre nella seconda la correzione alla funzione a due punti. Utilizzando le relazioni ottenute in questa sezione troviamo:

$$\langle \Psi_\alpha(x) \rangle = \frac{1}{N} \frac{\delta W[0]}{\delta J_\alpha(x)} = \quad (5.35) \\ \bar{\Psi}_\alpha^0 + \frac{1}{2N} \sum_{t,y,z} \sum_{\beta,\gamma,\eta} P_{\alpha,\beta}(x-t) \frac{\delta^3 S[\bar{\Psi}_0^0]}{\delta \Psi_\beta(t) \delta \Psi_\gamma(y) \delta \Psi_\eta(z)} P_{\gamma,\eta}(z-y) \\ = \bar{\Psi}_\alpha^0 + \frac{1}{2N} \sum_{\beta} P_{\alpha,\beta}(0) h_\beta.$$

Abbiamo riottenuto la (5.20). Trattandosi di grandezze costanti (invarianza per traslazione), nello spazio dei momenti otteniamo $\langle \Psi_\alpha(\vec{p}) \rangle = \delta(\vec{p}) \langle \Psi_\alpha(x) \rangle$.

Per la funzione a due punti abbiamo che:

$$\langle \Psi_\alpha(x); \Psi_\beta(y) \rangle = \frac{1}{N^2} \frac{\delta^2 W[0]}{\delta J_\alpha(x) \delta J_\beta(y)} = \frac{1}{N} P_{\alpha,\beta}(x-y) + \frac{1}{2N^2} \sum_{i,j} \sum_{x_i,\alpha_j} \\ \left[P_{\alpha,\alpha_a}(x-x_a) \frac{\delta^3 S[\bar{\Psi}_0^0]}{\delta \Psi_{\alpha_a}(x_a) \delta \Psi_{\alpha_b}(x_b) \delta \Psi_{\alpha_c}(x_c)} P_{\alpha_b,\alpha_d}(x_b-x_d) \right. \\ P_{\alpha_c,\alpha_e}(x_c-x_e) \frac{\delta^3 S[\bar{\Psi}_0^0]}{\delta \Psi_{\alpha_d}(x_d) \delta \Psi_{\alpha_e}(x_e) \delta \Psi_{\alpha_f}(x_f)} P_{\alpha_f,\beta}(x_f-y) \\ + P_{\alpha_c,\alpha_a}(x_c-x_a) \frac{\delta^3 S[\bar{\Psi}_0^0]}{\delta \Psi_{\alpha_a}(x_a) \delta \Psi_{\alpha_b}(x_b) \delta \Psi_{\alpha_c}(x_c)} P_{\alpha_b,\alpha_d}(x_b-x_d) \\ P_{\beta,\alpha_e}(y-x_e) \frac{\delta^3 S[\bar{\Psi}_0^0]}{\delta \Psi_{\alpha_d}(x_d) \delta \Psi_{\alpha_e}(x_e) \delta \Psi_{\alpha_f}(x_f)} P_{\alpha_f,\beta}(x_f-y) \\ \left. P_{\alpha_a,\alpha_b}(x_a-x_b) \frac{\delta^4 S[\bar{\Psi}_0^0]}{\delta \Psi_{\alpha_a}(x_a) \delta \Psi_{\alpha_b}(x_b) \delta \Psi_{\alpha_c}(x_c) \delta \Psi_{\alpha_d}(x_d)} P_{\alpha_c,\alpha}(x-x_c) P_{\alpha_d,\beta}(y-x_d) \right]. \quad (5.36)$$

Nello spazio dei momenti riscriviamo questa quantità nel seguente modo:

$$G_{\alpha,\beta}^{(2)}(\vec{p}) =: \frac{1}{N} P_{\alpha,\beta}(\vec{p}) + \frac{1}{2N^2} \left(G_{\alpha,\beta}^1(\vec{p}) + G_{\alpha,\beta}^2(\vec{p}) + G_{\alpha,\beta}^3(\vec{p}) \right), \quad (5.37)$$

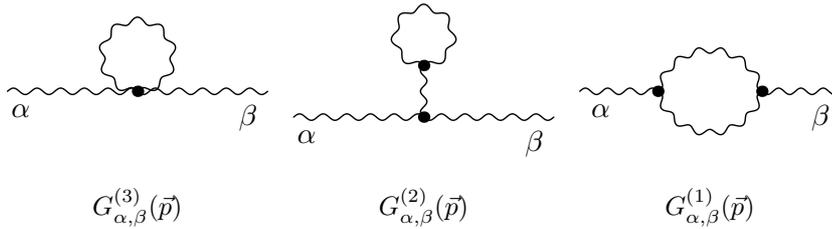
con:

$$G_{\alpha,\beta}^1(\vec{p}) := \sum_{\alpha_i} P_{\alpha,\alpha_a}(\vec{p}) \left[\int d\vec{q} V_{\alpha_a,\alpha_b,\alpha_c}(\vec{p}, -\vec{q}, \vec{q} - \vec{p}) P_{\alpha_b,\alpha_e}(\vec{q}) \right. \\ \left. P_{\alpha_c,\alpha_f}(\vec{p} - \vec{q}) V_{\alpha_d,\alpha_e,\alpha_f}(-\vec{p}, +\vec{q}, -\vec{q} + \vec{p}) \right] P_{\alpha_d,\beta}(\vec{p}) \quad (5.38)$$

$$G_{\alpha,\beta}^2(\vec{p}) := \sum_{\alpha_i} P_{\alpha,\alpha_a}(\vec{p}) \left[\int d\vec{q} V_{\alpha_a,\alpha_b,\alpha_c}(0, -\vec{q}, \vec{q}) P_{\alpha_b,\alpha_c}(\vec{q}) \right. \\ \left. P_{\alpha_e,\alpha_f}(\vec{p} - \vec{q}) V_{\alpha_b,\alpha_e,\alpha_f}(-\vec{p}, +\vec{p}, 0) P_{\alpha_d,\beta}(\vec{p}) \right] \\ = \sum_{\gamma,\delta,\theta} P_{\alpha,\gamma}(\vec{p}) V_{\gamma,\theta,\delta}(\vec{p}, 0, -\vec{p}) \bar{\Psi}_\theta^1 P_{\delta,\beta}(\vec{p}) \quad (5.39)$$

$$G_{\alpha,\beta}^3(\vec{p}) = \sum_{\alpha_i} P_{\alpha,\alpha_a}(\vec{p}) \left[\int d\vec{q} V_{\alpha_a,\alpha_b,\alpha_c,\alpha_d}(\vec{p}, \vec{q}, -\vec{q}, -\vec{p}) \right. \\ \left. P_{\alpha_b,\alpha_c}(\vec{q}) \right] P_{\alpha_d,\beta}(\vec{p}) \quad (5.40)$$

Graficamente rappresentiamo questi tre contributi (teniamo conto del fatto che i vertici sono non locali, esistono infatti i campi σ che corrono entro questi):



Abbiamo ottenuto il valore di aspettazione dei campi in due modi, utilizzando il funzionale generatore $W[J]$, oppure imponendo la stazionarietà del potenziale termodinamico. A partire da questo potremmo pure ottenere la funzione a due punti, con il medesimo risultato:

$$\langle \Psi_\alpha; \Psi_\beta \rangle(\vec{p}) = \frac{1}{N^2} \frac{\delta^2 \Gamma[\bar{\Psi}]^{-1}}{\delta \Psi_\alpha(\vec{p}) \delta \Psi_\beta(-\vec{p})} = \frac{1}{N^2} \frac{\delta^2 \Gamma[\bar{\Psi}^0 + \frac{1}{N} \bar{\Psi}^1]^{-1}}{\delta \Psi_\alpha(\vec{p}) \delta \Psi_\beta(-\vec{p})} + O\left(\frac{1}{N^3}\right). \quad (5.41)$$

La correzione ad albero dovuta alla correzione $\frac{1}{N}$ ai valori d'aspettazione dei campi è responsabile del comparire nella funzione a due punti del grafico non *one particle irreducible*, ovvero di $G^{(2)}$.

5.5 Singolarità di h_α

Scriviamo i comportamenti singolari di h_α , a partire dall'azione non integrata (da questo punto di vista h sono oggetti a due loop), questo approccio permette di calcolare correzioni radiative dei campi σ . Dall'azione di partenza (3.8) scopriamo che esistono due possibili vertici in cui incide un campo σ e due ausiliari dello stesso tipo (μ o λ). Introdotti:

$$\begin{aligned}\epsilon_0(\vec{p}) &= \beta, \\ \epsilon_1(\vec{p}) &= -\beta \cos p_1, \\ \epsilon_2(\vec{p}) &= -\beta \cos p_2,\end{aligned}\tag{5.42}$$

troviamo le regole di Feynman della teoria.

$$\begin{aligned}\frac{\delta^3 S}{\delta\sigma(\vec{p})\delta\mu(\vec{q}_1)\delta\mu(\vec{q}_2)} &= \delta(\vec{p} + \vec{q}_1 + \vec{q}_2)\epsilon_0(\vec{p} + \frac{\vec{q}_1 + \vec{q}_2}{2}) \\ \frac{\delta^3 S}{\delta\sigma(\vec{p})\delta\lambda_\mu(\vec{q}_1)\delta\lambda_\nu(\vec{q}_2)} &= \delta_{\mu,\nu}\delta(\vec{p} + \vec{q}_1 + \vec{q}_2)\epsilon_\mu(\vec{p} + \frac{\vec{q}_1 + \vec{q}_2}{2}).\end{aligned}\tag{5.43}$$

Il propagatore dei campi σ :

$$\Delta(\vec{q}, m_0^2) = \frac{1}{\beta W'} \frac{1}{\vec{p}^2 + m_0^2}.\tag{5.44}$$

Definiamo:

$$\Omega(\vec{p}) = \sum_{A,B} \int d\vec{q} \epsilon_A(\vec{p} + \frac{\vec{q}}{2}) \epsilon_B(\vec{p} + \frac{\vec{q}}{2}) \Delta(\vec{q} + \vec{p}, m_0^2) P_{A,B}(\vec{q}),\tag{5.45}$$

questo costituisce un termine per la self-energy dei campi σ . Studiamo il comportamento singolare, dovuto alla presenza del propagatore dei campi ausiliari. Abbiamo che la criticità si manifesta a momento nullo e per piccoli valori di M ($M \rightarrow 0$).

Supponiamo di sviluppare formalmente il propagatore $P_{\alpha,\beta}(p, p)$, in serie di $-\frac{d\beta}{dm_0^2} + ap^2 + \Sigma(p^2)$, questo è uno sviluppo molto utile perchè permette di isolare subito la parte che per valori dei parametri critici forniscono le singolarità, quindi questo sviluppo formale acquista significato dal momento che mando $m_0^2 \rightarrow m_{0,c}^2$ e $p \rightarrow p_c$. A partire dalle formule del capitolo precedente, troviamo:

$$P_{\alpha,\beta}(p, p) = \frac{\Gamma_{\alpha,\beta}(p)}{-\frac{d\beta}{dm_0^2} + ap^2 + \Sigma(p^2)} + R(p),\tag{5.46}$$

dove abbiamo indicato con $R(p)$ una funzione regolare per qualsiasi valore di m_0^2 . Notiamo che per la conoscenza *esatta* di tutte le divergenze della magnetizzazione servirebbe pure questa parte regolare, tuttavia considerazioni delle sezioni precedenti ci hanno portato a dire che dobbiamo studiare soltanto le divergenze logaritmiche. Troviamo per $\Gamma(\vec{p})$, la seguente espressione matriciale:

$$\frac{1}{W'\beta} \begin{pmatrix} \frac{8A_{0,1}(p)^2W''}{A_{0,0}(p)} & 4A_{0,1}(p)W'' & 4A_{0,1}(p)W'' & 2A_{0,1}(p) & 2A_{0,1}(p) \\ 4A_{0,1}(p)W'' & 2A_{0,0}(p)W'' & 2A_{0,0}(p)W'' & A_{0,0}(p) & A_{0,0}(p) \\ 4A_{0,1}(p)W'' & 2A_{0,0}(p)W'' & 2A_{0,0}(p)W'' & A_{0,0}(p) & A_{0,0}(p) \\ 2A_{0,1}(p) & A_{0,0}(p) & A_{0,0}(p) & \frac{A_{0,0}(p)}{2W''} & \frac{A_{0,0}(p)}{2W''} \\ 2A_{0,1}(p) & A_{0,0}(p) & A_{0,0}(p) & \frac{A_{0,0}(p)}{2W''} & \frac{A_{0,0}(p)}{2W''} \end{pmatrix}.$$

Si nota la formula particolarmente semplice di questa matrice in cui ciascuna riga è multipla di un'altra, (analogamente per le colonne). Questa ha però una struttura geometrica più profonda, da cui segue la precedente. Infatti abbiamo detto che per valori critici P^{-1} presenta determinante nullo, possiede quindi un modo zero z_α . Definito:

$$\mathbf{z}(\mathbf{p}) = \left(\frac{2A_{0,1}(p)}{A_{0,0}(p)}, 1, 1, \frac{1}{2W''}, \frac{1}{2W''} \right),$$

troviamo:

$$\Gamma_{\alpha,\beta} = \frac{2A_{0,0}(p)}{\beta W'} W'' z_\alpha(p) z_\beta(p). \quad (5.47)$$

Γ proietta lungo la direzione z , che in un certo senso nel limite infrarosso, e vicino alla criticità, diventa la sola rilevante.

Abbiamo che posto:

$$\bar{z} := z(m_{0,c}, p = 0), \quad (5.48)$$

allora:

$$\sum_{\beta} P_{\alpha,\beta}^{-1}(0, m_{0,c}) \bar{z}_\beta = 0. \quad (5.49)$$

Generalizzeremo in seguito questa relazione.

Introducendo lo sviluppo precedente nella definizione di Ω estraiamo il primo termine del nostro sviluppo formale in $\frac{d\beta}{dm_0^2}$.

$$\begin{aligned} \Omega(\vec{q}) &= \sum_{A,B} \Gamma_{A,B} \epsilon_A(\vec{q}) \epsilon_B(\vec{q}) \Delta(\vec{q}, m_0^2) \int d\vec{p} \frac{1}{s + a\vec{p}^2} \\ &= \frac{2A_{0,0}W''}{a\pi W'\beta} \left(\sum_{A=0}^2 \epsilon_A(\vec{q}) z_A \right)^2 \Delta(\vec{q}, m_0^2) \log s + f(\vec{q}); \end{aligned} \quad (5.50)$$

Andando a considerare nel termine precedente la parte più divergente si ottiene il risultato sorprendentemente semplice:

$$\Omega(\vec{q}) = \frac{W'' \log M^2 \gamma(q)}{W' B[2] a \pi} \left[B[1] - B[2]^2 \gamma(q)^{-1} \right]^2, \quad (5.51)$$

semplice nel senso che riesco a fattorizzare in modo naturale la dipendenza da \vec{q} . Segue per esempio che:

$$\begin{aligned} \Omega(\vec{q}) &= \frac{2\beta W'' \log M^2}{a\pi W' B[2]} \left[\left(-\frac{B[1]^2}{2m_0^2} + B[1]B[2] - \frac{B[2]^2}{2} m_0^2 \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{B[1]^2}{2m_0^4} - \frac{B[2]^2}{2} \right) \vec{q}^2 + O(\vec{q}^4) \right]. \end{aligned} \quad (5.52)$$

Riscriviamo le quantità h nel seguente modo, più esplicito:

$$\begin{aligned} h^{(\mu)} &= \int d\vec{q} \epsilon_0(\vec{q}) \Delta(\vec{q}, m_0^2)^2 \Omega(\vec{q}), \\ h^{(\lambda)} &= \int d\vec{q} \epsilon_1(\vec{q}) \Delta(\vec{q}, m_0^2)^2 \Omega(\vec{q}), \\ h^{(\rho)} &= V_{\rho, \rho, \rho} \int d\vec{q} P_{4,4}(\vec{q}); \end{aligned} \quad (5.53)$$

che riassumiamo nella notazione compatta:

$$\mathbf{h} = \left(h^{(\mu)}, h^{(\lambda)}, h^{(\lambda)}, h^{(\rho)}, h^{(\rho)} \right).$$

Scriviamo i comportamenti singolari (fattori di simmetria per $\log\left(-\frac{d\beta}{dm_0^2}\right)$) dei precedenti otteniamo:

$$\begin{aligned} h_s^{(\mu)} &\sim \frac{W''}{2W'^3} \left(\frac{B[1]^2 B[3]}{B[2]} - B[1]B[2] \right), \\ h_s^{(\lambda)} &\sim \frac{W''}{2W'^3} \left(-\frac{B[1]^2 B[3]}{B[2]} + B[1]B[2] \right. \\ &\quad \left. + \frac{B[3,1]B[1]^2}{2B[2]} - B[1]B[2,1] + \frac{B[2]B[1,1]}{2} \right), \\ h_s^{(\rho)} &\sim -\frac{B[1]B[2]W'''}{2W'W''}; \end{aligned} \quad (5.54)$$

che riassumiamo a loro volta in una struttura compatta $h_{\alpha,s}$. Questi termini potevano essere ottenuti subito scrivendo la definizione di h_α in termini dei vertici effettivi trovati nel capitolo 3 a momento nullo. In seguito ricaveremo queste espressioni in un modo molto semplice e pulito.

5.5.1 Un esempio di cancellazione

Il termine nel valore di aspettazione dei campi divergente come $M^{-2} \log M^2$ ha un fattore di simmetria della forma:

$$\begin{aligned} \langle \Psi_\alpha^1 \rangle &\sim HM^{-2} \log M^2 + O(\log M^2), \\ H &= 2A_{0,0} W'' \sum_\beta z_\alpha z_\beta h_{\beta,s}. \end{aligned} \quad (5.55)$$

possiamo vedere che siamo in presenza di una cancellazione se z si presenta ortogonale a h_s , inoltre basta che questo avvenga per un campo in particolare perchè si verifichi anche per tutti gli altri. Un conto algebrico mostra che:

$$H = B[1]^2 F [2m_0^2(4 + m_0^2)(8 + m_0^2)W'^2 ((8 + m_0^2)B[1] - 1) (B[1]^2 - B[2])]^{-1} \quad (5.56)$$

$$F = \quad (5.57)$$

$$\begin{aligned} &(32 + 12m_0^2 + (m_0^2)^2) B[1]^4 - 3m_0^2 (32 + 12m_0^2 + (m_0^2)^2) B[1]B[2]^2 \\ &+ m_0^2 (4 + m_0^2) (8 + m_0^2)^2 B[2]^3 - B[1]^3 (4 + m_0^2 + 256B[2] + 192m_0^2 B[2] \\ &+ 36(m_0^2)^2 B[2] + 2(m_0^2)^3 B[2]) + B[1]^2 B[2] (32 + 20(m_0^2)^3 B[2] \\ &+ (m_0^2)^4 B[2] + 8m_0^2 (3 + 32B[2]) + (m_0^2)^2 (3 + 128B[2])). \end{aligned}$$

Nelle espressioni precedenti siamo riusciti a fattorizzare completamente la dipendenza da W sfruttando la forma presa per questa funzione, e utilizzando la prima condizione di criticità. Infatti dalla gap-equation (4.1) scriviamo questa condizione come:

$$\frac{d\beta}{dm_0^2} = \frac{1}{4} \left(W''(B[1]^2 - B[2]) + 4W' B[1]B[2] \right) = 0; \quad (5.58)$$

e prendendo

$$W(x) = \frac{2}{p} \left(\frac{x}{2} \right)^p - \frac{2^{1-p}}{p}, \quad (5.59)$$

possiamo scrivere le due uguaglianze valide al punto critico:

$$\begin{aligned} W'' &= -\frac{4W' B[1]B[2]}{B[1]^2 - B[2]}, \\ W''' &= -\frac{W''}{\bar{\rho}^0} \left(\bar{\rho}^0 \frac{W''}{W'} - 1 \right), \end{aligned} \quad (5.60)$$

con $\bar{\rho}^0$ dato da (5.25). È chiaro che se vogliamo ottenere una relazione che ci dica che $F = 0$, la dobbiamo ottenere dalla seconda condizione di criticità, quella coinvolgente la derivata seconda della gap-equation. Infatti se scriviamo $\frac{d^2\beta}{(dm_0^2)^2}$, e ci mettiamo al punto critico, per cui possiamo utilizzare

le relazioni appena ottenute troviamo:

$$\frac{d^2\beta}{(dm_0^2)^2} = \quad (5.61)$$

$$[m_0^2(4 + m_0^2)(8 + m_0^2)((8 + m_0^2)B[1] - 1)(B[1]^2 - B[2])]^{-1}W'B[1]F = 0$$

che di fatto pone $H = 0$. Notiamo che non abbiamo ottenuto soltanto l'uguaglianza di un fattore ma abbiamo trovato due espressioni identiche (a meno di un W'), questo ci fa pensare che il fattore di simmetria per questa divergenza sia proprio $\frac{d^2\beta}{(dm_0^2)^2}$.

Con non poca fatica abbiamo trovato la cancellazione di una divergenza; ora vogliamo cercare di riscrivere questo in maniera più sistematica, capiremo così perchè è stata utilizzata la condizione sulla derivata seconda per ottenere la cancellazione.

5.6 Relazioni di scala

Abbiamo più volte accennato al fatto che la relazione:

$$\beta - \beta_c \sim (m_0^2 - m_{0,c}^2)^3, \quad (5.62)$$

non è una giusta relazione di scala. La teoria è in realtà parametrizzata da β , m_0^2 e p , legati da un equazione di stato $\beta(m_0^2, p)$; lo studio di questa ci ha riservato una sorpresa.

Definiamo $m_c(p)$ per $p > p_c$ di modo che:

$$\frac{\partial^2\beta(m_c^2(p), p)}{(\partial m_0^2)^2} := 0. \quad (5.63)$$

Sviluppiamo allora la *gap-equation*:

$$\begin{aligned} \beta - \beta_c(p) &= A(p - p_c)(m_0^2 - m_c^2(p)) + B(m_0^2 - m_c^2(p))^3 + \dots \\ &\sim (m_0^2 - m_c^2(p))^3 F\left(\frac{p - p_c}{(m_0^2 - m_c^2(p))^2}\right) \\ F(x) &\sim 1 + \frac{A}{B}x + \dots, \end{aligned} \quad (5.64)$$

per x piccolo. Per x grande F non si presenta regolare; in particolare non tende ad un valore finito. Si evince che i campi che scalano sono i seguenti:

$$\begin{aligned} u_t &= p - p_c \\ u_h &= \beta - \beta_c(p) \\ u_m &= m_0^2 - m_c^2(p), \end{aligned} \quad (5.65)$$

allora riscriviamo la precedente relazione di scala come:

$$u_h = u_m^3 F\left(\frac{u_t}{u_m^2}\right), \quad (5.66)$$

che è la relazione di un magnete nella teoria del campo medio. Dalla (5.65) si vede che i campi che scalano non sono i nostri parametri introdotti (eccezion fatta per t) ma delle loro combinazioni. Abbiamo a che fare con un *mixing* operatoriale. Per esempio sviluppando u_m al prim' ordine (definendo $m = m_0^2 - m_{0,c}^2$), troviamo:

$$\begin{aligned} u_m &= m_0^2 - m_{0,c}^2 - \frac{\partial m_c^2(0)}{\partial p} (p - p_c) + \dots, \\ &=: m + j_1 p \end{aligned} \quad (5.67)$$

dove sviluppando la (5.63) troviamo il coefficiente di mixing:

$$j_1 = \frac{\partial^3 \beta(m_{0,c}, p_c)}{(\partial m_0^2)^2 \partial p} \left[\frac{\partial^3 \beta(m_{0,c}, p_c)}{(\partial m_0^2)^3} \right]^{-1} \quad (5.68)$$

finito.

In conclusione abbiamo imparato che dobbiamo muoverci come un campo che scala, per esempio $m_c(p)$ (stiamo quindi sviluppando in p), per poi leggere nella (5.64):

$$p - p_c \sim (\beta - \beta_c(p))^{\frac{2}{3}}. \quad (5.69)$$

È interessante che recentemente Y. C. Kim, M. E. Fisher e G. Orkoulas [19], studiando il comportamento termodinamico di un fluido in equilibrio vapore-liquido, utilizzano quella che definiscono una teoria che scala generalizzata (*a general complete scaling theory*) in cui introducono termini di mixing già al prim' ordine (sviluppo lineare dei campi). Così facendo riescono a spiegare una particolare anomalia (anomalia di Yang-Yang). Questo è del tutto analogo a quanto abbiamo fatto, dove abbiamo introdotto un termine p (pressione per Kim e al.) nei due campi β e m_0^2 già all' ordine lineare. È curioso che pure loro utilizzano il mixing per ottenere dei risultati non spiegabili con la teoria di Ising, in particolare la divergenza del potenziale chimico lungo la linea di coesistenza liquido-vapore.

5.7 Un ulteriore cancellazione

In questa sezione vogliamo ricavare delle relazioni aggiuntive, che utilizzeremo in seguito. Terremo in conto il fatto che abbiamo a che fare con una teoria efficace, in cui i vertici sono ottenuti direttamente dall' inverso del propagatore per derivazione.

5.7.1 Propagatore e vertici a momento nullo

Teniamo conto del fatto che:

$$\frac{d\beta}{dm_0^2} = -\frac{1}{4W'^2 B[1]} \left[4W' B[1] B[2] + W'' B[1]^2 - W'' B[2] \right]. \quad (5.70)$$

Abbiamo visto che \bar{z} è un modo zero per \bar{P}^{-1} , questo può essere generalizzato. Tutti gli elementi della teoria sono stati ottenuti in funzione di certi campi $\bar{\Psi}^0$, che in un secondo tempo sono stati parametrizzati grazie alle equazioni del punto sella. Conviene introdurre una definizione per $z(\bar{\Psi}^0)$ tale per cui $z(\bar{\Psi}^0(m_0^2)) = z(m_0^2)$, precedentemente introdotto (5.5) (siamo a momento nullo). In analogia con quanto introdotto nel capitolo 3, poniamo:

$$B_{i,j}(\bar{\Psi}^0) = \int d\vec{p} \frac{(\cos p_1)^i (\cos p_2)^j}{\bar{\mu}^0 - \sum_{\mu} \bar{\lambda}_{\mu}^0 \cos p_{\mu}}. \quad (5.71)$$

Vale:

$$B_{i,j}(\bar{\Psi}^0(m_0^2)) = \frac{1}{(W'(\bar{p}^0))^2} A_{i,j}(0) \quad (5.72)$$

Considereremo z della forma:

$$\mathbf{z} = \left(\frac{B_{0,1} + B_{1,0}}{B_{0,0}}, \quad 1, \quad 1, \quad \frac{1}{2W''(\bar{p}_1^0)}, \quad \frac{1}{2W''(\bar{p}_2^0)} \right).$$

Pensiamo P^{-1} della forma $P^{-1}(\bar{\Psi}^0(m_0^2))(\vec{p})$. L'aver messo in evidenza i campi Ψ ci aiuta nell'architettare la struttura della teoria.

Visto quanto imposto troviamo (a momento nullo):

$$\sum_{\beta} P^{-1}(\bar{\psi}^0)_{\alpha,\beta} z_{\beta} = c_{\alpha} f_{\alpha}(\bar{\Psi}^0). \quad (5.73)$$

con

$$\mathbf{c} = (0, \quad 1, \quad 1, \quad 0, \quad 0)$$

e

$$\begin{aligned} f(\bar{\Psi}^0) &:= f_1(\bar{\Psi}^0) + f_2(\bar{\Psi}^0) = \frac{(B_{0,1} + B_{1,0})^2}{2B_{0,0}} + \frac{1}{2} B_{0,0} (B_{0,1} + B_{1,0}) \\ &\quad - \frac{\beta B_{0,0}}{2} \left(\frac{1}{2W''(\bar{p}_1^0)} + \frac{1}{2W''(\bar{p}_2^0)} \right) \\ f(\bar{\Psi}^0(m_0^2)) &= 2f_i(\bar{\Psi}^0(m_0^2)) = -\frac{B[1]}{2W'' B[2]} \frac{d\beta}{dm_0^2} \end{aligned} \quad (5.74)$$

Utilizzeremo questa regola per contrarre il propagatore con un vertice a tre gambe. A proposito di vertici si verifica facilmente la seguente uguaglianza:

$$V_{\alpha,\beta,\gamma}(0, \vec{p} - \vec{p}) = -\frac{\partial P^{-1} \left(\overline{\Psi}^0 \right)_{\beta,\alpha}(\vec{p})}{\partial \overline{\Psi}_\alpha^0}. \quad (5.75)$$

Questo, vista la definizione di V identifica in un certo senso la derivata funzionale a momento nullo (valutata sui campi stazionari), con la derivazione algebrica degli stessi.

5.7.2 Una regola di derivazione

Data la definizione di $\overline{\mu}^0(m_0^2)$:

$$\overline{\mu}^0 = W'(\overline{\rho}^0) (m_0^2 + 4), \quad (5.76)$$

troviamo:

$$\begin{aligned} \left[2W'' \frac{d\rho_0}{dm_0^2} \right]^{-1} \frac{d\mu_0}{dm_0^2} &= \frac{m_0^2}{2} + 2 + \frac{2W'B[1]^2}{W''(B[1]^2 - B[2])} \\ &= \frac{m_0^2}{2} + 2 - \frac{B[1]}{2B[2]} \frac{1}{1 + \frac{W'}{B[2]} \frac{d\beta}{dm_0^2}} \\ &= \frac{2A_{0,1}}{A_{0,0}} - \frac{B[1]}{2B[2]} \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{W'}{B[2]} \left(-\frac{d\beta}{dm_0^2} \right) \right]^i. \end{aligned} \quad (5.77)$$

Utilizzando questa espressione e la regola della derivazione a catena per una generica quantità $q(m_0^2) := f(\overline{\Psi}^0(m_0^2))$, troviamo le seguenti relazioni:

$$\frac{d}{dm_0^2} = 2W'' \frac{d\rho_0}{dm_0^2} \left[z_\alpha \frac{\partial}{\partial \overline{\Psi}_\alpha^0} - \frac{B[1]}{2B[2]} \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{W'}{B[2]} \left(-\frac{d\beta}{dm_0^2} \right) \right]^i \frac{\partial}{\partial \mu_0} \right] \quad (5.78)$$

$$z_\alpha \frac{\partial}{\partial \overline{\Psi}_\alpha^0} = \left[2W'' \frac{d\rho_0}{dm_0^2} \right]^{-1} \frac{d}{dm_0^2} + \frac{B[1]}{2B[2]} \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{W'}{B[2]} \left(-\frac{d\beta}{dm_0^2} \right) \right]^i \frac{\partial}{\partial \mu_0} \quad (5.79)$$

5.7.3 Cancellazione

Sviluppriamo h a meno di una parte finita, che abbiamo visto essere riassorbita facilmente in una ridefinizione di β_c e di p_c .

$$\begin{aligned} h_\alpha &= F \sum_{\beta,\gamma} V_{\alpha,\beta,\gamma}(0,0,0) z_\beta z_\gamma \log \left[\frac{d\beta}{dm_0^2} \right] + g_\alpha \left[\frac{d\beta}{dm_0^2} \right] \log \left[\frac{d\beta}{dm_0^2} \right] \\ &\quad + O\left(\left[\frac{d\beta}{dm_0^2} \right]^2 \right) \log \left[\frac{d\beta}{dm_0^2} \right] \end{aligned} \quad (5.80)$$

non ci occupiamo per il momento di g_α . Consideriamo per ora solo il primo termine della precedente (contratto con uno z). Esplicitamente:

$$\begin{aligned}
\sum_{\beta,\gamma} V_{\alpha,\beta,\gamma}(0,0,0)z_\beta z_\gamma &= -\sum_{\beta,\gamma} \frac{\partial}{\partial \bar{\Psi}_\alpha^0} P_{\beta,\gamma}^{-1}(0)z_\beta z_\gamma \\
&= -\sum_{\gamma} c_\gamma z_\gamma \frac{\partial}{\partial \bar{\Psi}_\alpha^0} f_\gamma(\bar{\Psi}^0) + c_\gamma f_\gamma(\bar{\Psi}^0) \frac{\partial}{\partial \bar{\Psi}_\alpha^0} z_\gamma \\
&= -\frac{\partial}{\partial \bar{\Psi}_\alpha^0} f(\bar{\Psi}^0). \tag{5.81}
\end{aligned}$$

Queste espressioni devono essere valutate in $\bar{\Psi}^0(m_0^2)$. Dalla precedente siamo poi in grado di recuperare i valori trovati nella sezione precedenti e indicati con $h_{\alpha,s}$ (5.54), i risultati trovati concordano, si ha cioè:

$$-\frac{\partial}{\partial \bar{\Psi}_\alpha^0} f(\bar{\Psi}^0) \Big|_{\bar{\Psi}^0(m_0^2)} = h_{s,\alpha} \tag{5.82}$$

Riscriviamo allora:

$$\begin{aligned}
h_\alpha &= -\frac{\partial f(\bar{\Psi}^0)}{\partial \bar{\Psi}_\alpha^0} \log \left[\frac{d\beta}{dm_0^2} \right] + g_\alpha \left[\frac{d\beta}{dm_0^2} \right] \log \left[\frac{d\beta}{dm_0^2} \right] \\
&\quad + O\left(\left[\frac{d\beta}{dm_0^2} \right]^2 \right) \log \left[\frac{d\beta}{dm_0^2} \right] \tag{5.83}
\end{aligned}$$

Usando la (5.79) e la (5.73):

$$z_\alpha h_\alpha = B[1] \left[4W'' A_{0,0} \frac{d\rho^0}{dm_0^2} \right]^{-1} \frac{d^2\beta}{(dm_0^2)^2} \log \left[\frac{d\beta}{dm_0^2} \right] + O\left(\left[\frac{d\beta}{dm_0^2} \right] \log \left[\frac{d\beta}{dm_0^2} \right] \right). \tag{5.84}$$

Se ora mi pongo in $m_c(p)$ trovo che il primo termine in questa espressione è identicamente nullo.

Così facendo ci troviamo a che fare soltanto con divergenze logaritmiche nude. Questo porterà comunque a modificare il nostro ansatz, dal momento che dovremmo ammettere un termine leading, il cui comportamento critico non può essere determinato a questo ordine, ma che a priori per N basso potrebbe diventare rilevante.

5.8 Calcolo delle divergenze logaritmiche

Le considerazioni svolte nelle sezioni precedenti ci hanno portato ad eliminare tutte le divergenze che non sono logaritmiche; in questa sezione ci proponiamo di calcolare esattamente queste quantità, utilizzando le formule trovate in precedenza. Nelle uguaglianze che scriveremo supporremo sempre

di aver già corretto i parametri critici e di essere ad $m_c(p)$, semplicemente per non portarci appresso queste divergenze che abbiamo giustificato.

Dobbiamo calcolare:

$$2\bar{\Psi}_a^1 = \sum_{\beta,\gamma,\delta} P_{a,\beta}(0) \int d\vec{p} V_{\beta,\gamma,\delta}(0, \vec{p}, -\vec{p}) P_{\gamma,\delta}(\vec{p}). \quad (5.85)$$

Possiamo scrivere:

$$P_{\alpha,\beta}(0) = F \frac{z_\alpha z_\beta}{-\frac{d\beta}{dm_0^2}} + D_{\alpha,\beta} + O\left(\frac{d\beta}{dm_0^2}\right), \quad (5.86)$$

Abbiamo:

$$F = \frac{2W'' A_{0,0}}{W' \beta}, \quad (5.87)$$

con:

$$\mathbf{D} = W'^2 \begin{pmatrix} -\frac{2}{A_{0,0}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -l & l & -\frac{1}{2W''}l & \frac{1}{2W''}l \\ 0 & l & -l & \frac{1}{2W''}l & -\frac{1}{2W''}l \\ 0 & -\frac{1}{2W''}l & \frac{1}{2W''}l & -\frac{A_{0,2}-A_{1,1}}{2W'^2 W''}l & \frac{1}{4W''^2}l \\ 0 & \frac{1}{2W''}l & -\frac{1}{2W''}l & \frac{1}{4W''^2}l & -\frac{A_{0,2}-A_{1,1}}{2W'^2 W''}l \end{pmatrix},$$

e

$$l = \frac{A_{0,0}}{2A_{0,1}^2 - 2A_{0,0}A_{1,1}}. \quad (5.88)$$

Sostituendo queste espressioni in (5.85) troviamo:

$$2\bar{\Psi}_a^1 = F \sum_{\beta,\gamma,\delta} \frac{z_a}{-\frac{d\beta}{dm_0^2}} \int d\vec{p} (z_\beta V_{\beta,\gamma,\delta}(0, -\vec{p}, \vec{p}) P_{\gamma,\delta}(\vec{p})) + D_{\alpha,\beta} \int d\vec{p} V_{\beta,\gamma,\delta}(0, \vec{p}, -\vec{p}) P_{\gamma,\delta}(\vec{p}) + O\left(\frac{d\beta}{dm_0^2}\right). \quad (5.89)$$

La prima espressione tra parentesi entro integrale, palesemente dipende solamente da \hat{p}^2 . Lo stesso discorso vale per il termine nel secondo integrale, dal momento che il campo Ψ_β incide a momento nullo, non porta un contributo vettoriale a \vec{p} . Se devo quindi sviluppare il numeratore all'ordine p^2 (abbiamo visto che lo sviluppo del denominatore è ininfluente), posso restringermi per valori di $\vec{p} = (p, p)$, senza nulla perdere nel risultato generale al prim' ordine in p^2 . Ma per questi valori di p possiamo scrivere una formula semplificata per il propagatore:

$$P_{\alpha,\beta}(p, p) = \frac{2W'' A_{0,0}(p, p)}{W' \beta} \frac{z_\alpha(p) z_\beta(p)}{-\frac{d\beta}{dm_0^2} + ap^2 + \Sigma(p^2)} + R_{\alpha,\beta}(\vec{p}), \quad (5.90)$$

dove $R_{\alpha,\beta}$ può essere scritta facilmente in una serie formale di $-\frac{d\beta}{dm_0^2} + ap^2 + \Sigma(p^2)$, per i nostri scopi ci basta sapere che non fornisce contributi logaritmici. Sostituiamo quest' espressione nella prima parte della (5.89), mentre per la seconda parte basta prendere l' ordine zero otteniamo i termini in $\log\left(\frac{d\beta}{dm_0^2}\right)$:

$$\begin{aligned} 2\bar{\Psi}_a^1 &= \sum_{\beta,\gamma,\delta} \frac{F^2}{4\pi a} \frac{z_\alpha z_\beta V_{\beta,\gamma,\delta}}{-\frac{d\beta}{dm_0^2}} z_\gamma z_\delta \log\left(-\frac{d\beta}{dm_0^2}\right) \\ &\quad - \sum_{\beta,\gamma,\delta} \frac{F^2}{4\pi a^2} z_\alpha z_\beta \log\left(-\frac{d\beta}{dm_0^2}\right) \left[V'_{\beta,\gamma,\delta} z_\gamma z_\delta + 2V_{\beta,\gamma,\delta} z_\gamma z'_\delta \right] \\ &\quad + \sum_{\beta,\gamma,\delta} \frac{F}{4\pi a} D_{\alpha,\beta} V_{\beta,\gamma,\delta} z_\gamma z_\delta \log\left(-\frac{d\beta}{dm_0^2}\right). \end{aligned} \quad (5.91)$$

Abbiamo usato che:

$$\begin{aligned} \int d\vec{p} \frac{1}{s+ap^2} &= \frac{1}{4\pi a} \log s + \dots, \\ \int d\vec{p} \frac{p^2}{s+ap^2} &= -\frac{s}{4\pi a^2} \log s + \dots \end{aligned} \quad (5.92)$$

Abbiamo indicato:

$$\begin{aligned} V'_{\beta,\gamma,\delta} &= \left. \frac{\delta V_{\beta,\gamma,\delta}(0, -\vec{p}, \vec{p})}{\delta p^2} \right|_{p^2=0} \\ z'_\alpha &= \frac{\delta z_\alpha(0)}{\delta p^2}, \end{aligned} \quad (5.93)$$

dove queste quantità devono essere valutate in $\vec{p} = (p, p)$. Non abbiamo sviluppato $A_{0,0}(\vec{p})$, nella seconda riga perchè in tal caso si avrebbe una cancellazione.

Calcoliamo, utilizzando la formula per la derivazione trovata:

$$\begin{aligned} &\left[-\frac{d\beta}{dm_0^2}\right]^{-1} \sum_{\alpha,\beta,\gamma} z_\alpha V_{\alpha,\beta,\gamma} z_\beta z_\gamma \quad (5.94) \\ &= \left[2W'' \frac{d\bar{\rho}^0}{dm_0^2}\right]^{-1} \left[-\frac{d}{dm_0^2} \frac{B[1]}{2W'' A_{0,0}} - \frac{B[1]W'}{2B[2]^2} \frac{\partial f}{\partial \mu^0} + O\left(\frac{d\beta}{dm_0^2}\right)\right] \\ &= \left[2W'' \frac{d\bar{\rho}^0}{dm_0^2}\right]^{-1} \left[-\frac{d}{dm_0^2} \frac{B[1]}{2W'' A_{0,0}} + \frac{B[1]W'}{2B[2]^2} h_{s,\mu} + O\left(\frac{d\beta}{dm_0^2}\right)\right] \end{aligned} \quad (5.95)$$

inoltre:

$$\sum_{\beta} D_{4,\beta} h_{s,\beta} = -\frac{1}{2W''\beta} h_{s,\beta}. \quad (5.96)$$

Utilizzando queste due ultime espressioni riesco a scrivere $\bar{\rho}^1$. Si ottiene un'espressione molto lunga; maneggiandola con MATHEMATICA riusciamo a scrivere:

$$\bar{\rho}^1 = k \log(m_0^2 - m_{0,c}^2) + f_c(m_0^2 - m_{0,c}^2) \log(m_0^2 - m_{0,c}^2) + \dots, \quad (5.97)$$

con:

$$\begin{aligned} f_c &= -1.06862 \\ k &= 0.240441 \end{aligned} \quad (5.98)$$

5.9 Correzione all' esponente critico del calore specifico

I risultati della sezione precedente ci hanno portato a scrivere:

$$\bar{\Psi}_4^1 = k \log(m_0^2 - m_{0,c}^2) + f_c(m_0^2 - m_{0,c}^2) \log(m_0^2 - m_{0,c}^2). \quad (5.99)$$

Introdotta:

$$\Lambda_c = \frac{d\bar{\rho}^0(m_{0,c}^2)}{dm_0^2} = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{B[2]}{B[1]^2} \right), \quad (5.100)$$

scriviamo il valore d' aspettazione dell' energia al prim' ordine come:

$$E = c + \Lambda_c(m_0^2 - m_{0,c}^2) + \frac{f_c}{N}(m_0^2 - m_{0,c}^2) \log(m_0^2 - m_{0,c}^2) + \frac{k}{N} \log(m_0^2 - m_{0,c}^2) + \dots \quad (5.101)$$

Facciamo quindi il seguente ansatz (rispetto quello di partenza ci dimentichiamo delle correzioni ai coefficienti critici, che abbiamo già discusso, ma introduciamo un nuovo termine):

$$E = E_0 + \frac{E_1}{N} + a(\beta - \beta_c)^{\frac{1}{3} + \frac{a}{N}} + b(\beta - \beta_c)^{\frac{1}{N}} + \dots, \quad (5.102)$$

dove per confronto con l' espressione precedente troviamo:

$$\begin{aligned} a &= \frac{f_c}{\Lambda_c} = 1.9606 \\ k &= bl. \end{aligned} \quad (5.103)$$

La prima osservazione è che compare un nuovo ramo critico, di cui tuttavia a quest' ordine non riusciamo a determinarne l' esponente critico. Sicuramente nello stretto limite $N \rightarrow \infty$ quello predominante è quello presente già all' ordine zero, tuttavia non possiamo garantire che questo sia vero per ogni N , in particolare per $N = 3$ (nel caso si voglia confrontare con il risultato di Blöte e al.). Non ci urta particolarmente questo fatto dal momento che anche se questo ramo diventasse predominante per $N = 3$

avremmo comunque a che fare con una famiglia a un parametro di punti fissi.

La seconda osservazione è che la forma proposta per l'energia rende incompatibili i due limiti ($\beta \rightarrow \beta_c$ e $N \rightarrow \infty$), infatti:

$$0 = \lim_{\beta \rightarrow \beta_c} (\beta - \beta_c)^{\frac{1}{N}} \neq \lim_{N \rightarrow \infty} (\beta - \beta_c)^{\frac{1}{N}} = 1. \quad (5.104)$$

Tuttavia ciò non basta a rendere il punto $N = \infty$ un punto singolare, per il fatto che come abbiamo appena ricordato, per grandi N il ramo critico è una continuazione di quello presente all'ordine zero.

In analogia con quanto accade all'ordine zero abbiamo che anche i campi ausiliari (campi non fisici) hanno lo stesso comportamento. Tuttavia all'ordine N^{-1} abbiamo che soltanto i campi ρ al punto critico descrivono la criticità del calore specifico come spiegato nella prossima sezione.

5.10 Correlazione energetica

Ripercorriamo quanto fatto all'ordine zero, dove dopo aver trovato una transizione di fase dovuta ad una divergenza del calore specifico si è cercato un parametro d'ordine locale (un campo) per descrivere questa transizione di fase. Visto il teorema di Mermin Wagner e Coleman sarebbe auspicabile che il parametro locale fosse uno scalare, ed infatti l'energia, si è dimostrata significativa per questo scopo. Tuttavia questa transizione di fase [20] sembrerebbe non essere accompagnata da alcuna rottura di simmetria; supponendo infatti di descrivere la criticità con l'energia, come stiamo tentando di fare, abbiamo che il parametro locale $\vec{\sigma}\vec{\sigma}$ è insensibile alle simmetrie in gioco $O(N)$ e Z_2 .

All'ordine zero abbiamo trovato [4]:

$$\langle \rho(0); \rho(0) \rangle \sim (\beta - \beta_c)^{-\frac{2}{3}}. \quad (5.105)$$

Come era auspicabile le medesime considerazioni si ripropongono anche all'ordine N^{-1} . Per la correlazione energetica abbiamo ottenuto la somma di tre grafici possibili, che abbiamo indicato con $G_{\alpha,\beta}(\vec{p})$. Abbiamo l'uguaglianza:

$$G_{\alpha,\beta}(0) = \sum_{\gamma} P_{\alpha,\gamma}(0) \frac{\partial}{\partial \bar{\Psi}_\gamma^0} \bar{\Psi}_\beta^1. \quad (5.106)$$

D'altra parte abbiamo trovato (concentrandoci sul ramo critico che riusciamo a determinare):

$$\bar{\Psi}_4^1 = f_c (m_0^2 - m_{0,c}^2) \log (m_0^2 - m_{0,c}^2); \quad (5.107)$$

utilizzando quindi i risultati ottenuti sullo sviluppo del propagatore troviamo all' ordine N^{-2} :

$$\begin{aligned} \langle \rho_\alpha; \rho_\beta \rangle = & \quad (5.108) \\ & \frac{1}{N} \frac{F}{-2W'' \frac{d\beta}{dm_0^2}} \left(\frac{1}{2W''} + \frac{1}{N} \sum_\gamma z_\gamma \frac{\partial}{\partial \Psi_\gamma^0} f_c(m_0^2 - m_{0,c}^2) \log(m_0^2 - m_{0,c}^2) \right) \\ & + \dots \end{aligned}$$

dove con i puntini intendiamo e termini dell' ordine N^{-3} , e correzioni $-\frac{d\beta}{dm_0^2}$, che non ci interessano. Utilizzando formule ormai ben note, valutiamo nella precedente espressione il termine logaritmico nel risultato che è della forma:

$$\begin{aligned} \langle \rho_\alpha; \rho_\beta \rangle &= \frac{1}{N} \frac{F}{-4W''^2 \frac{d\beta}{dm_0^2}} \left(1 + \frac{1}{N} \frac{f_c}{\Lambda_c} \log(m_0^2 - m_{0,c}^2) \right) + \dots \\ &\sim \frac{1}{-\frac{d\beta}{dm_0^2} \left(1 - \frac{f_c}{N\Lambda_c} \log(m_0^2 - m_{0,c}^2) \right)} \\ &\sim (\beta - \beta_c)^{-\frac{2}{3} + \frac{\alpha}{N}}. \end{aligned} \quad (5.109)$$

Dall' ultima espressione leggiamo quanto preannunciato: anche all' ordine N^{-1} l'energia sembra essere un buon campo per descrivere il sistema in condizioni critiche.

Un ragionamento analogo permette di concludere che pure la correzione alla temperatura critica sarà la medesima $\beta_{1,c}$. Utilizzando infatti la (5.106) la correzione alla temperatura critica la si ottiene derivando la parte singolare $(m_0^2 - m_{0,c}^2)^{-2}$, che fornirà una divergenza del tipo $(\beta - \beta_c)^{-\frac{5}{3}}$, che riottengo se sviluppo $\left(\beta - \beta_c - \frac{\beta_{1,c}}{N} \right)^{-\frac{2}{3}}$. Si verifica inoltre facilmente (con passaggi identici a quelli appena svolti per la correzione all' esponente critico), che i fattori di simmetria si ricombinano, di modo che le due correzioni siano identiche. Il ragionamento si ripropone identico anche per la correzione di p_c . Per il primo ramo critico otteniamo quindi l' importante risultato che la suscettività dell' energia ripropone la stessa natura critica, con uguale correzione dell' esponente critico e dei parametri in gioco, temperatura β e non linearità p .

Il secondo ramo critico si mantiene indeterminato anche in questo caso. Infatti:

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} (m_0^2 - m_{0,c}^2)^{-2} \frac{d}{dm_0^2} \log(m_0^2 - m_{0,c}^2) &= \frac{1}{N} (\beta - \beta_c)^{-1} \\ &= \frac{1}{N} (\beta - \beta_c)^{-1 + \frac{\nu'}{N}} \\ &+ O\left(\frac{1}{N^2}\right). \end{aligned} \quad (5.110)$$

Quindi non sappiamo se vale quanto trovato per il primo ramo critico, in particolare se $l = l'$.

Se ripetessimo il calcolo fatto per la funzione a due punti di altri campi ausiliari, non avremmo la medesima correzione all'esponente critico; i campi ρ diventano da questo punto di vista particolarmente significativi.

5.11 Conclusioni

Abbiamo sviluppato al prim'ordine in N^{-1} un sistema statistico di spin in due dimensioni con interazione a primi vicini, pesata da una funzione non lineare parametrizzata da p .

Dimostrazioni analitiche [20], provano l'esistenza di transizioni di fase del prim'ordine per grandi p e in dimensioni maggiori di due. Lo stesso risultato era stato annunciato in [14], dove attraverso una simulazione in due dimensioni è stata messa in evidenza anche una transizione continua con un coefficiente critico di Ising. Con la tecnica del punto sella in [4], viene messa in evidenza l'esistenza di una transizione di fase di prima specie che si spegne in una transizione continua con un comportamento da campo medio.

Ci siamo quindi concentrati sulla natura della transizione continua, spingendoci all'ordine $\frac{1}{N}$ dell'analisi svolta in [4]. Il calcolo porta delle divergenze legate alla non analiticità delle funzioni termodinamiche al punto critico. Proponendo un ansatz per il comportamento dell'energia, queste sono state parzialmente riassorbite, mettendo in evidenza la continuazione del ramo critico presente per $N = \infty$ (che dimostriamo quindi non essere un punto singolare). Per eliminare le divergenze restanti da una parte è stato rilevato un altro ramo critico, di cui però a quest'ordine non si riesce a determinarne il comportamento critico. Infine siamo riusciti ad eliminare l'unica divergenza non inquadabile con il nostro ansatz, sviluppando la teoria lungo una particolare traiettoria nello spazio dei parametri. Questa poi si è rilevata importante in quanto descrive la traiettoria di un campo che scala, ovvero la traiettoria giusta da prendere se vogliamo utilizzare relazioni di scala come abbiamo fatto.

Indipendentemente dal comportamento critico del secondo ramo critico (anche questo sicuramente dipendente da N), per piccoli N pensiamo che i risultati ottenuti suggeriscano il fatto che siamo in presenza ad una famiglia di punti fissi parametrizzata da N .

Appendice A

Sistema in dimensioni basse

Proviamo a riscrivere il nostro sistema statistico nel caso in cui abbiamo a che fare con due soli siti. Come predetto esplicitamente da molte referenze (per esempio [3]) dovremmo trovare una transizione di fase anche per questo sistema. Questo mette in risalto la patologia che può nascere dal limite per grandi N , dovuta al fatto che questo limite introduce infiniti gradi di libertà.

Non è la prima volta che si trovano transizioni di fase in dimensioni così basse [9].

Una analisi più accurata estenderebbe l'analisi al sistema monodimensionale; nel ramo di criticità della correlazione *spin-spin* (cioè per $\beta^{-1} \rightarrow 0$), questo è già stato fatto mediante le *armoniche – ipersferiche*, in [6]; da questa referenza si evince che il nostro modello nel ramo critico *spin-spin* appartiene alla classe di universalità che viene chiamata di tipo *I*. A questa, che altro non è che la classe di universalità del modello $O(N)$, appartengono tutte le interazioni W (h nella referenza) tale per cui:

$$\begin{aligned} \text{Max}_{[0 \leq x \leq 2]} W(x) &= W(1), \\ W'(1) &> 0. \end{aligned} \tag{A.1}$$

Introduciamo il funzionale Z :

$$\begin{aligned} Z &= \int \prod_{i=1,2} d\sigma_i \delta(1 - \sigma_i^2) e^{-\beta N W(1 + \sigma_1 \sigma_2)} \\ &= S_N \int d\sigma \delta(1 - \sigma^2) e^{-\beta N W(1 + \sigma_0)}; \end{aligned} \tag{A.2}$$

dove abbiamo indicato con S_N l'usuale volume:

$$S_N = \frac{2\pi^{N/2}}{\Gamma(N/2)}, \tag{A.3}$$

e abbiamo isolato una componente dei campi σ (σ_0).

Ripercorrendo i procedimenti di linearizzazione dell' azione, mediante l' introduzione dei campi ausiliari, arriviamo alla seguente:

$$Z = \int \prod_{i=1,2} d\sigma_i \delta(1 - \sigma_i^2) \int d\rho \int_{-i\infty+c}^{i\infty+c} d\lambda e^{\lambda\beta(1+\bar{\sigma}_1\bar{\sigma}_2-\rho)+W(\rho)}. \quad (\text{A.4})$$

Scrivendo le normalizzazioni dei campi ci si riporta alla solita forma per la nostra azione:

$$A = \frac{\beta}{2} [\lambda(1 + \bar{\sigma}_1\bar{\sigma}_2 - \rho) + 2W(\rho) - \mu_1(\bar{\sigma}_1^2 - 1) - \mu_2(\bar{\sigma}_2^2 - 1)]. \quad (\text{A.5})$$

Da questa si estrae la parte quadratica nei campi $\bar{\sigma}$, e si esegue l' integrazione gaussiana. A tal proposito si deve scegliere la costante c , nel cammino di integrazione delle λ , di modo che la forma quadratica sia definita negativa per ciascun μ_1 e μ_2 fissato se si intende eseguire l' integrazione in λ e poi in ρ , oppure viceversa. Sostanzialmente però possiamo pensare di integrare i campi σ in un intorno in cui valgano le condizioni sopra scritte e poi prolungare analiticamente a tutto il piano. Tutte queste considerazioni, che non abbiamo svolto per il sistema bidimensionale, sono affrontate in dettaglio per esempio in [7], dove però non vengono dati risultati se non congetturare l'unicità del punto sella. Detto questo possiamo integrare i σ , ottenendo la seguente azione efficace:

$$A' = \frac{\beta}{2} [\lambda(1 - \rho) + 2W(\rho) + \mu_1 + \mu_2] - \frac{1}{2} \log \left(\mu_1\mu_2 - \frac{\lambda^2}{4} \right). \quad (\text{A.6})$$

Ora si studiano i punti stazionari di questa azione.

A.1 Equazioni del punto sella

Procedendo nel modo solito (senza sperare tuttavia di definire parametri come m_0^2 , che in questo caso non hanno senso di esistere), imponiamo la stazionarietà della nostra azione al punto sella, otteniamo le seguenti equazioni, dove per comodità i campi al punto sella vengono scritti utilizzando gli stessi campi). Riassumendo per un attimo i campi con ϕ , abbiamo:

$$0 = \int \frac{\delta}{\delta\phi_\alpha} e^{NA'} = \int e^{NA'} \frac{\delta}{\delta\phi_\alpha} NA'. \quad (\text{A.7})$$

Otteniamo delle equazioni per ciascun N , e nel limite in cui va all' infinito, abbiamo le equazioni del punto sella:

$$\frac{\delta}{\delta\phi_\alpha} A' = 0 \quad (\text{A.8})$$

che scritte esplicitamente:

$$\begin{aligned}\beta &= \frac{\mu}{\mu^2 - \gamma^2}, \\ \gamma &= W'(\rho), \\ \beta(1 - \rho) &= -\frac{\gamma}{\mu^2 - \gamma^2},\end{aligned}\tag{A.9}$$

dove abbiamo posto $\gamma = \frac{\lambda}{2}$. Procediamo nello studio di questo sistema lineare.

A.1.1 Studio delle equazioni del punto sella

Il nostro modello pone:

$$W_p(x) = \frac{2}{p} \left(\frac{x}{2}\right)^p - \frac{2^{1-p}}{p}.\tag{A.10}$$

Supponendo $\beta \neq 0$ e $\rho \neq 1$ otteniamo:

$$\beta = \frac{\rho - 1}{W'(\rho)(2\rho - \rho^2)}.\tag{A.11}$$

A differenza del caso bidimensionale abbiamo che riusciamo a parametrizzare la nostra teoria con un campo ausiliario (mentre prima utilizzavamo m_0), in funzione del quale otteniamo anche gli altri campi:

$$\begin{aligned}\gamma &= W'(\rho), \\ \mu &= \frac{W'(\rho)}{\rho - 1}.\end{aligned}\tag{A.12}$$

Queste equazioni vengono completate scrivendo l' energia libera all' ordine zero:

$$F(\rho) = -\frac{\beta}{2} [\lambda(\rho)(1 - \rho) + 2W(\rho) + 2\mu(\rho)] - \frac{1}{2} \log \left(\mu(\rho)^2 - \frac{\lambda(\rho)^2}{4} \right).\tag{A.13}$$

Nell' intervallo fisico ($1 < \rho < 2$) andiamo a studiare la monotonia della funzione $\beta(\rho)$; otteniamo:

$$\frac{d\beta}{d\rho} = \frac{\rho^{p-1}}{[\rho^p(\rho - 2)]^2} [p\rho^2 + (1 - 3p)\rho + 2p].\tag{A.14}$$

Questa funzione ammette zeri per:

$$p > p_c = 3 + 2\sqrt{2},\tag{A.15}$$

circa 5.828, e per:

$$p < 3 - \sqrt{2},\tag{A.16}$$

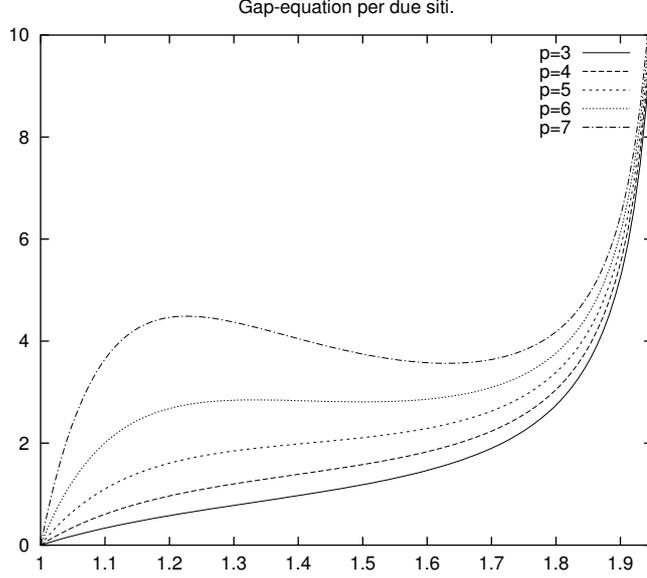


Figura A.1: $\beta(\rho)$. Si propone la struttura massimo minimo già trovata (fig. 4.1)

circa 0.171. L'intervallo che ci interessa è il primo, infatti per questo intervallo di valori abbiamo che i due estremanti $\rho_{1,2}$, appartengono all'intervallo fisico $1 < \rho < 2$. Entro questo intervallo troviamo:

$$\begin{aligned}\rho_{1,2} &= \frac{3p - 1 \pm \sqrt{\Delta}}{2p} \\ \Delta &= p^2 - 6p + 1,\end{aligned}\tag{A.17}$$

con

$$\rho_{1,2}(p_c) = 1.414 \dots\tag{A.18}$$

A.2 Soluzione esatta monodimensionale per $N=3$

Nel lavoro di Blöte e al. [14], per testare il programma di simulazione usato, si fa un'approssimazione per alte temperature. Viene data la seguente formula ($N = 3$):

$$\int d\vec{s} e^{2K \left(\frac{1+s\vec{r}}{2} \right)^p} = 4\pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2K)^n}{(1+pn)n!},\tag{A.19}$$

utilizzando questa possiamo scrivere l' energia libera per il sistema monodimensionale:

$$\begin{aligned}
Z[d = 1, N = 3] &= (4\pi)^N \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2K)^n}{(1 + pn)n!} \right]^N, \\
F[d = 1, N = 3] &= -\log(4\pi) - \log \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2K)^n}{(1 + pn)n!} \right]. \quad (\text{A.20})
\end{aligned}$$

È abbastanza immediato verificare che F è analitica per qualsiasi valore di p . D' altra parte abbiamo la presenza di una transizione di fase nello stretto limite $N \rightarrow \infty$, (abbiamo infatti ricavato le equazioni del punto sella per ogni d) . Alla luce di ciò troviamo allora che la transizione per grandi N in una dimensione è semplicemente una patologia del limite preso in considerazione. Ci aspettiamo che ciò resti vero per ogni N , ma non in due dimensioni, dove il comparire di divergenze logaritmiche, fa sì che il punto $N = \infty$ cessi di essere un punto singolare.

Appendice B

Integrali di loop

Sono stati spesso utilizzati nel corso di questo lavoro i seguenti integrali: [13]:

$$B[n, a, b] = \int d\vec{p} \frac{\hat{p}_1^{2a} \hat{p}_2^{2b}}{(\hat{p}^2 + h)^n}, \quad (\text{B.1})$$

questi potrebbero essere visti come termini costituenti un generico grafo ad un loop con momenti esterni nulli. Gli indici a e b sono simmetrici, vale cioè:

$$B[n, a, b] = B[n, b, a]. \quad (\text{B.2})$$

Ci proponiamo di ricavare delle regole di riduzione, alcune sono evidenti e facili, un'ultima è stata presa dalla referenza sopra indicata e si presenta più complicata; questa ha la caratteristica di valere soltanto in due dimensioni, mentre le precedenti sono del tutto generali.

Queste regole di riduzioni sono algebriche, facilmente implementabili quindi su di un calcolatore, utilizzando un software che maneggi linguaggio simbolico come MATHEMATICA.

Sempre seguendo [13], conviene introdurre la seguente definizione generalizzata della (B.1):

$$B_\zeta[n, a, b] = \int d\vec{p} \frac{\hat{p}_1^{2a} \hat{p}_2^{2b}}{(\hat{p}^2 + h)^{(n+\zeta)}, \quad (\text{B.3})$$

questa definizione permette di dar senso a tutte le formule ricavate (toglie cioè forme di indeterminazione come $\frac{0}{0}$), si può poi ritornare alla (B.1) semplicemente mandando ζ a zero.

Le seguenti tre regole permettono di ridurre $B[n, n_x, n_y]$ ad una somma algebrica finita di termini della forma $B[m, 0, 0] =: B[m]$. Prescindendo dalla dimensione in cui ci mettiamo (estendendo in modo ovvio la (B.1), definendo $B[n, a_1, \dots, a_d]$), abbiamo:

$$B[n, 1] = \frac{1}{d} \int d\vec{p} \frac{\hat{p}^2 + h - h}{(\hat{p}^2 + h)^n}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{d}(B[n-1] - hB[n]), \\
B[n, m, 1] &= \frac{1}{d-1} \int d\vec{p} \frac{\widehat{p}_1^{2m} (\sum_{i \neq 1} \widehat{p}_i^2)}{(\widehat{p}^2 + h)^n} \\
&= \frac{1}{d-1} \int d\vec{p} \frac{\widehat{p}_1^{2m} (\widehat{p}^2 - \widehat{p}_1^2 + h - h)}{(\widehat{p}^2 + h)^n} \\
&= \frac{1}{d-1} (B[n-1, m] - B[n, m+1] - hB[n, m]). \quad (\text{B.4})
\end{aligned}$$

La terza relazione, integralmente presa da [13], si può ottenere a partire dall'uguaglianza (valida per $m > 1$):

$$\frac{\widehat{p}_\mu^{2b}}{(\widehat{p}^2 + h)^{n+\zeta}} = 4 \frac{\widehat{p}_\mu^{2(b-1)}}{(\widehat{p}^2 + h)^{n+\zeta}} + 2 \frac{\widehat{p}_\mu^{2(b-2)}}{n+\zeta-1} \sin p_\mu \frac{d}{dp_\mu} \frac{1}{(\widehat{p}^2 + h)^{n+\zeta-1}}, \quad (\text{B.5})$$

che segue dal fatto che:

$$4 \left((\widehat{x}^2)^{m-1} - \sin^2 x (\widehat{x}^2)^{m-2} \right) = (\widehat{x}^2)^m. \quad (\text{B.6})$$

Integrando la (B.5) per parti otteniamo la terza formula di ricorsione:

$$B_\zeta[n, m, \dots] = \quad (\text{B.7})$$

$$\begin{aligned}
&4B_\zeta[n, m-1, \dots] + \frac{m-1}{n+\zeta-1} B_\zeta[n-1, m-1, \dots] \\
&- \frac{4m-6}{n+\zeta-1} B_\zeta[n-1, m-2, \dots]. \quad (\text{B.8})
\end{aligned}$$

Utilizzando queste tre regole riportiamo un integrale della forma $B[n, a, b]$ ad una combinazione lineare finita di termini della forma $B[r]$, con:

$$\min[0, n - (a+b)] \leq r \leq n-1. \quad (\text{B.9})$$

Infine diamo una forma di ricorsione che permette di riportare tutti gli integrali della forma $B[n]$, a semplici combinazioni di $B[1]$ e $B[2]$. A differenza delle precedenti questa vale soltanto nel caso in cui siamo in due dimensioni. Data la (B.2), vale:

$$\int d\vec{p} \frac{2\widehat{p}_1^4 \widehat{p}_2^2 + h\widehat{p}_1^2 \widehat{p}_2^2}{(\widehat{p}^2 + h)^{n+1}} = B_\zeta[n, 1, 1]. \quad (\text{B.10})$$

Applicando le formule di riduzione trovate sopra a questa uguaglianza (per $n > 3$):

$$B[n-1, 1, 1] - 2B[n, 2, 1] - hB[n, 1, 1] = 0, \quad (\text{B.11})$$

recuperiamo la seguente uguaglianza:

$$\begin{aligned}
B[n] &= \frac{1}{T} \left[(n-3)^2 B[n-3] - (4+h)(19+3(n-5)n) B[n-2] \right. \\
&\quad \left. + (32+3h(8+h))(n-2)^2 B[n-1] \right] \\
T &= h(4+h)(8+h)(n-2)(n-1). \quad (\text{B.12})
\end{aligned}$$

Bibliografia

- [1] E. Domany, D. Mukamel, B. Nienhuis and A. Schwimmer, “Duality Relations And Equivalences For Models With $O(N)$ And Cubic Symmetry,” Nucl. Phys. B **190** (1981) 279.
- [2] J. Cardy, “Scaling And Renormalization In Statistical Physics”. Cambridge lecture notes in physics; 0005; Cambridge University Press; (Cambridge, 2000).
- [3] N. Magnoli and F. Ravanini, “Phase Transitions In Lattice 2-D $O(N)$ Sigma Model With Mixed Action In The Large N Limit,” Z. Phys. C **34** (1987) 43.
- [4] S. Caracciolo and A. Pelissetto, “Two-Dimensional Heisenberg Model with Nonlinear Interactions,” Phys. Rev. E **66** (2002) 016120 [arXiv:cond-mat/0202506].
- [5] M. Campostrini, A. Cucchieri, T. Mendes, A. Pelissetto, P. Rossi, A. D. Sokal and E. Vicari, “Application of the $O(N)$ -Hyperspherical Harmonics to the Study of the Continuum Limits of One-Dimensional σ -Models and to the Generation of High-Temperature Expansions in Higher Dimensions,” Nucl. Phys. Proc. Suppl. **47**, 759 (1996) [arXiv:hep-lat/9509034].
- [6] A. Cucchieri, T. Mendes, A. Pelissetto and A. D. Sokal, “Continuum Limits and Exact Finite-Size-Scaling Functions for One-Dimensional $O(N)$ -Invariant Spin Models,” J. Statist. Phys. **86**, 581 (1997) [arXiv:hep-lat/9509021].
- [7] A. D. Sokal and A. O. Starinets, “Pathologies of the large- N limit for $RP(N-1)$, $CP(N-1)$, $QP(N-1)$ and mixed isovector / isotensor sigma-models,” Nucl. Phys. B **601**, 425 (2001) [arXiv:hep-lat/0011043].
- [8] J. Zinn-Justin, “Quantum Field Theory And Critical Phenomena”. The international series of monographs on physics; 0077; Cambridge University Press; (Oxford, 1989).

- [9] P. Fendley and O. Tchernyshyov, “Phase transitions in one dimension and less,” Nucl. Phys. B **639**, 411 (2002) [arXiv:cond-mat/0202129].
- [10] M. Campostrini, A. Pelissetto, P. Rossi and E. Vicari, “Four point renormalized coupling constant in $O(N)$ models,” Nucl. Phys. B **459**, 207 (1996) [arXiv:hep-lat/9506002].
- [11] G. Parisi, “Statistical Field Theory”. Frontiers in Physics; 0066; Addison-Wesley; (Redwood City, California; 1988).
- [12] C. Itzykson and J. M. Drouffe, “Statistical Field Theory. Vol. 1: From Brownian Motion To Renormalization And Lattice Gauge Theory”. Cambridge monographs on mathematical physics; Cambridge University Press; (Cambridge, 1989).
- [13] S. Caracciolo and A. Pelissetto, “Four-Loop Perturbative Expansion for the Lattice N -Vector Model,” Nucl. Phys. B **455**, 619 (1995) [arXiv:hep-lat/9510015].
- [14] H. W. J. Blöte, W. Guo, and H. J. Hilhorst, “Phase transition in a 2-dimensional Heisenberg model,” Phys. Rev. Lett. **88**, 047203 (2002) [arXiv:cond-mat/0201174].
- [15] M. Campostrini, P. Rossi, “The $1/N$ expansion of two-dimensional spin model,” IFUP-TH 14/93. Il nuovo cimento.
- [16] K. G. Wilson and J. B. Kogut, “The Renormalization Group And The Epsilon Expansion,” Phys. Rept. **12**, 75 (1974).
- [17] S. Caracciolo, A. Pelissetto. Non pubblicati.
- [18] K. Huang “Statistical mechanics”. John Wiley and Sons; (New York, 1987).
- [19] Y. C. Kim, M. E. Fisher, G. Orkoulas, “Asymmetric Fluid Critically I: Scaling with Pressure Mixing,” [arXiv:cond-mat/0212145].
- [20] A. C. D. van Enter, S. B. Shlosman, “First-Order Transitions for n -Vector Models in Two and more Dimensions: Rigorous Proof,” Phys. Rev. Lett. **89**, 285702-1 (2002).
- [21] E. Domany, M. Schick and R. H. Swendaen, Phys. Rev. Lett. **52** (1984) 1535.