



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO
FACOLTÀ DI SCIENZE E TECNOLOGIE

Università degli Studi di Milano

FACOLTÀ DI SCIENZE E TECNOLOGIE
Corso di Laurea Triennale in Fisica

TESI DI LAUREA TRIENNALE

**Un Modello Esattamente Risolubile
di Superradianza con Interazione Atomica**

Autore:

Andrea Di Gioacchino

Matricola 794608

Relatore:

Prof. Sergio Caracciolo

Correlatore:

Pietro Rotondo

Anno Accademico 2013–2014

Indice

Introduzione	2
Cenni Storici sul Modello di Dicke	2
Esperimenti Recenti	3
1 Il Modello di Dicke	7
1.1 Hamiltoniana di Dicke	7
1.2 Funzione di Partizione	8
1.3 Transizione di Fase del Modello di Dicke	11
1.3.1 Transizione di Fase a Temperatura Nulla	14
2 Il Modello di Ising	18
2.1 Il Modello di Ising Classico	18
2.1.1 Hamiltoniana di Ising	18
2.1.2 Transizione di Fase nel Modello di Ising	18
2.2 Il Modello di Ising Quantistico	22
2.2.1 Hamiltoniana Quantistica	22
2.2.2 Transizioni di Fase Quantistiche	22
2.2.3 Transizione di Fase del Modello di Ising Quantistico	23
2.2.4 Modello di Ising Quantistico Unidimensionale	24
3 Interazione Atomica nel Modello di Dicke	34
3.1 Generalizzare il Modello di Dicke	34
3.2 La nuova Hamiltoniana	34
3.3 Diagonalizzazione dell'Hamiltoniana	35
3.4 Transizioni di Fase	36
3.4.1 Funzione di Partizione	37
3.4.2 Diagramma di Fase	38
3.4.3 Commenti	39
4 Conclusioni	45
A Metodo del Punto Sella	49
B Deduzione del Modello di Dicke	51

Introduzione

Cenni Storici sul Modello di Dicke

Il modello di Dicke descrive l'interazione di N atomi a due livelli energetici (detti anche qubits) con un campo elettromagnetico quantizzato in una cavità di volume V . Gli atomi sono considerati in posizioni fissate, sufficientemente lontani affinché sia trascurabile la loro interazione "diretta".

In questo sistema fisico, infatti, è il campo elettromagnetico che media un'interazione a lungo range tra tutti gli N atomi del campione.

In particolare, il modello di Dicke prevede che aumentando il parametro di accoppiamento tra campo elettromagnetico ed atomi si osserva un aumento dell'emissione spontanea di un fattore proporzionale al numero di atomi N , a causa dell'emissione collettiva dei singoli atomi (fenomeno detto "superradianza").

L'Hamiltoniana che descrive questo sistema fu scritta da R. H. Dicke [1] nel 1953.

Circa 20 anni più tardi, K. Hepp e E. H. Lieb [2] prima e Y. K. Wang e F. T. Hioe [3] dopo, studiarono la termodinamica del modello, riuscendo a dimostrare che il fenomeno previsto da Dicke è una transizione di fase tra il regime in cui il numero medio di fotoni in cavità per atomo è nullo e quello in cui il numero medio di fotoni in cavità è proporzionale al numero di atomi N (fase di superradianza).

Purtroppo l'osservazione di tale transizione di fase richiede condizioni sperimentali impossibili da ottenere per quel tempo: in primo luogo il sistema di livelli energetici degli atomi deve essere tale che essi possano effettuare transizioni tra due soli stati (per esempio tra lo stato fondamentale e il primo livello eccitato, se i livelli successivi sono molto più energetici di questi due). In secondo luogo l'interazione diretta fra gli atomi deve essere trascurabile.

Inoltre per lungo tempo c'è stato dibattito in letteratura sull'esistenza effettiva della transizione di superradianza. Essa, infatti, potrebbe essere solamente un artificio matematico dovuto ad un termine trascurato nella deduzione dell'Hamiltoniana (il cosiddetto termine di A^2). Tale dibattito, comunque, non verrà preso in considerazione in queste pagine¹.

Per queste ragioni il modello di Dicke perse interesse con il passare del tempo.

Recentemente, però, questo scenario è cambiato notevolmente: infatti sono stati proposti sistemi fisici realizzabili in laboratorio descritti a livello efficace da modelli tipo Dicke (in cui eventualmente vengono definiti in modo diverso i vari parametri). Inoltre l'avvento di nuove tecnologie, come ad esempio la possibilità di raffreddare i campioni atomici fino a temperature molto vicine

¹per approfondimenti su questo argomento, vedere [4] e [5].

allo zero assoluto (dell'ordine di micro-kelvin o addirittura di nano-kelvin), ha permesso di limitare al minimo l'indeterminazione dovuta ai gradi di libertà vibrazionali, rendendo sempre migliore l'approssimazione di atomo a due livelli energetici. Inoltre al giorno d'oggi si riesce a raggiungere il regime strong-coupling del modello di Dicke, ovvero quello in cui i valori dei parametri sono tali da poter osservare la transizione di superradianza.

Esperimenti Recenti

In questa sezione si vogliono descrivere brevemente alcuni esempi di esperimenti svolti recentemente che coinvolgono lo studio del modello di Dicke e che costituiscono una motivazione essenziale per quanto verrà analizzato nei prossimi capitoli.

Il primo esperimento da considerare, che risale all'anno 2010, è quello del gruppo di T. Esslinger dell'ETH di Zurigo [6].

Nel setup sperimentale del gruppo, un condensato di Bose-Einstein, accoppiato ad una cavità, viene irradiato nella direzione trasversale rispetto alla cavità da un laser di potenza P (vedi figura 1). Il laser utilizzato ha una lunghezza d'onda molto diversa rispetto a quella di una qualsiasi transizione atomica e molto vicina ad una di quelle supportate dalla cavità.

Si osserva che finché la potenza del laser resta al di sotto di una certa soglia, non viene rilevata nessuna radiazione elettromagnetica della lunghezza d'onda supportata dalla cavità.

Questo è dettato dal fatto che gli atomi hanno una densità spaziale uniforme e quindi diffondono la luce in modo tale da creare interferenza distruttiva. Il fatto che gli atomi siano uniformemente distribuiti nello spazio può essere intuito con il seguente argomento: il condensato di Bose-Einstein è caratterizzato dal fatto che tutti gli atomi hanno momento nullo. Ciò significa che la funzione d'onda di un singolo atomo in rappresentazione degli impulsi è una delta di Dirac. Calcolando il modulo al quadrato della sua trasformata di Fourier si ottiene, quindi, una funzione costante, che corrisponde alla densità di probabilità relativa alla posizione dell'atomo.

Al contrario, aumentando la potenza del laser al di sopra di una certa soglia, si osserva della radiazione della lunghezza d'onda supportata dalla cavità: si ha quindi una transizione ad una fase nella quale gli atomi si auto-organizzano nello spazio in modo che lo scattering del campo elettromagnetico sia coerente.

Anche in questo caso il comportamento del sistema si può intuire ragionando sulla funzione d'onda di un singolo atomo. Infatti al crescere della potenza del laser, una frazione di atomi macroscopicamente rilevante ha accesso al successivo autovalore del momento. In questo caso, calcolando il quadrato del modulo della funzione d'onda in rappresentazione degli impulsi, si ottiene per la probabilità $P(x)$ di trovare la particella nella posizione x (caso unidimensionale):

$$\begin{aligned} P(x) &= |F[\delta(k) + \delta(k - k_0)]|^2 = |1 + e^{-ik_0x}|^2 = (1 + \cos(k_0x))^2 + \sin^2(k_0x) \\ &= 2(1 + \cos(k_0x)) \end{aligned}$$

Quindi la densità atomica sarà definita dalla sovrapposizione di due funzioni periodiche, una delle quali è quella appena calcolata e definisce la densità di probabilità della componente della posizione lungo la cavità, mentre l'altra è

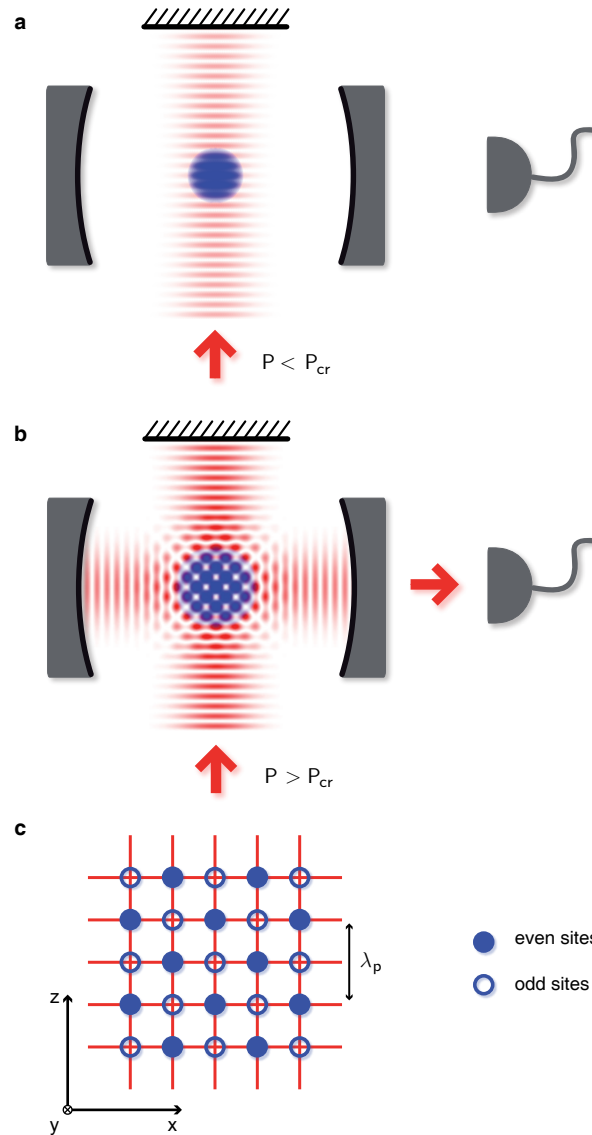


Figura 1: Schema dell'esperimento realizzato in [6]. Il condensato di Bose-Einstein è posto all'interno di una cavità e la radiazione emessa da un laser di potenza P è orientata nella direzione z . Il caso **a** è quello in cui la densità atomica del condensato è costante e quindi la radiazione nella cavità, a causa dell'interferenza distruttiva degli scattering dei vari atomi, è nulla. Nel caso **b**, invece, la potenza del laser supera la soglia della transizione di fase, gli atomi si auto-organizzano (come disegnato nella parte **c**) e il rivelatore posto subito al di fuori di una parete semi-riflettente rileva radiazione della lunghezza d'onda supportata dalla cavità.

dovuta al campo elettromagnetico e quindi riguarda la componente della posizione nella direzione del laser (come nella figura 1). Si ottiene di conseguenza un reticolo di punti in cui sarà concentrata la probabilità di trovare gli atomi (fenomeno detto di auto-organizzazione).

Un'osservazione interessante è che l'Hamiltoniana che descrive questo sistema è analoga all'Hamiltoniana di Dicke in cui si ridefinisce il significato dei vari parametri [7]. In particolare questo parallelismo permette di identificare la transizione di fase che conduce all'auto-organizzazione degli atomi con quella che porta il sistema descritto dal modello di Dicke nello stato di superradianza. In questo senso, se il sistema dell'esperimento del gruppo di Esslinger compie una transizione di fase, allora si sta osservando indirettamente anche quella del modello di Dicke.

In particolare, l'Hamiltoniana del sistema dell'esperimento è descritta da:

$$H = \omega_0 J_z + \omega a^\dagger a + \frac{\lambda}{\sqrt{N}}(a + a^\dagger)(J_+ + J_-) + \frac{3}{4}U_0 c_1^\dagger c_1 a^\dagger a \quad (1)$$

dove c_0 e c_1 sono operatori bosonici che distruggono un bosone con momento rispettivamente nullo o diverso da zero, il numero di atomi è $N = c_0^\dagger c_0 + c_1^\dagger c_1$ e vale: $J_z = \frac{1}{2}(c_1^\dagger c_1 - c_0^\dagger c_0)$ e $J_+ = c_1^\dagger c_0 = J_-^2$.

Se si confronta questa Hamiltoniana con quella di Dicke (che verrà introdotta in modo dettagliato nel prossimo capitolo), si osserva che l'unica differenza tra le due è l'ultimo termine della (1), che si può dimostrare essere irrilevante per valori dei parametri vicini a quelli che caratterizzano la transizione di fase. È importante sottolineare, però, che i parametri ω_0 , ω e λ hanno nell'equazione (1) un significato diverso rispetto a quello che avranno nell'Hamiltoniana di Dicke. Infatti, si può verificare che nell'esperimento in analisi il coefficiente λ è direttamente proporzionale alla potenza del laser, mentre nel caso dell'Hamiltoniana di Dicke il coefficiente λ dipende dalla densità di atomi.

Si osservi inoltre che anche ragionando sui momenti degli atomi (nel caso dell'esperimento del gruppo di Esslinger) e sui livelli energetici (nel caso del modello di Dicke) si può stabilire un parallelismo: infatti per valori dei parametri inferiori a quelli della transizione di fase, il condensato di Bose-Einstein è formato da atomi con momento nullo, proprio come il modello di Dicke ha per stato fondamentale quello con soli atomi nel livello energetico più basso. Avvenuta la transizione di fase, invece, nell'esperimento si osserva un effetto dovuto ad una frazione non trascurabile di atomi con momento diverso da zero e nel modello di Dicke si osserva un numero macroscopico di fotoni in cavità, cosa possibile solo se una frazione non trascurabile di atomi è nel primo livello eccitato.

Essenziali per motivare i capitoli seguenti sono anche altri due lavori molto recenti (luglio 2014), uno teorico e uno sperimentale, in cui il modello di Dicke viene proposto e realizzato in maniera più simile alla sua accezione originale, ovvero utilizzando effettivamente atomi a due livelli energetici in un campo elettromagnetico.

²si può verificare che gli operatori J così costruiti obbediscono alle regole di commutazione di $SU(2)$ e costituiscono quella che prende il nome di rappresentazione di Schwinger del momento angolare

Il primo è quello di L. J. Zou et al. [8]. In questo caso il qubit viene realizzato grazie a un campione di diamante in cui alcuni atomi sono sostituiti con altrettanti atomi di Azoto. Il campione viene quindi posto in una cavità a microonde, e sono proprio questi atomi di Azoto ad essere efficacemente descritti con un modello simile a quello di Dicke (ancora una volta dando il giusto significato ai vari coefficienti di accoppiamento).

Nel secondo lavoro, di M. P. Baden et al. [9], viene osservata la transizione di fase di superradianza usando un campione di atomi ultrafreddi di rubidio ^{87}Rb in cui la struttura a due livelli viene ricostruita a livello efficace grazie a transizioni Raman cavity-assisted.

Riassumendo, quello che vuole essere il concetto alla base di questo capitolo introduttivo è l'importanza cruciale del modello di Dicke come punto di partenza nella descrizione della termodinamica di sistemi in cui molti atomi interagiscono con un campo elettromagnetico e il fatto che tale modello è tuttora oggetto di studi, sia teorici che sperimentali.

Capitolo 1

Il Modello di Dicke

1.1 Hamiltoniana di Dicke

L'Hamiltoniana del modello di Dicke, che descrive l'interazione di N atomi a due livelli energetici con un campo elettromagnetico in una cavità di volume V , è formata da due parti, ovvero:

$$H = H_0 + H_I,$$

dove H_0 è la parte “libera” dell'Hamiltoniana, che descrive la dinamica indipendente di un numero finito di modi del campo elettromagnetico e di N atomi isolati, mentre H_I è la parte che descrive l'interazione radiazione–materia del sistema.

Quindi si ha, nel sistema di unità di misura in cui $\hbar = 1$:

$$H_0 = H_{field} + H_{atoms} = \sum_s \nu_s a_s^\dagger a_s + \frac{1}{2} \omega \sum_{j=1}^N \sigma_j^z, \quad (1.1)$$

$$H_I = \frac{1}{2\sqrt{V}} \left[\left(\sum_s \lambda'_s (a_s + a_s^\dagger) \right) \left(\sum_{j=1}^N (\sigma_j^+ + \sigma_j^-) \right) \right],$$

dove a_s e a_s^\dagger sono gli operatori di distruzione e creazione relativi al modo s -esimo del campo elettromagnetico di frequenza ν_s , ω è la differenza di energia tra i due livelli energetici degli atomi e λ'_s è un coefficiente che descrive l'accoppiamento del modo s -esimo del campo con gli atomi. Nella deduzione originale dell'Hamiltoniana, che viene accennata nell'appendice B, si ha

$$\lambda'_s = \omega d (2\pi/\nu_s)^{\frac{1}{2}} (N/V)^{\frac{1}{2}},$$

dove d è la proiezione del momento di dipolo atomico, che caratterizza la transizione tra i due livelli energetici, lungo il vettore di polarizzazione del campo elettromagnetico. Quindi variando la densità di atomi N/V è possibile aumentare o diminuire a piacere il valore del coefficiente λ'_s . Infine le σ sono le matrici di Pauli, ovvero:

$$\hat{\sigma}^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}^y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

e vale: $\sigma^+ := (\sigma^x + i\sigma^y)/2$, $\sigma^- := (\sigma^x - i\sigma^y)/2$.

Da questo punto in poi, verrà preso in considerazione un caso particolare di questa Hamiltoniana, quello che permette di studiare la transizione di fase nel modo più semplice possibile: è il caso in cui il campo elettromagnetico ha un solo modo di frequenza ν . Ciò corrisponde a considerare un sistema in cavità (a singolo modo).

Inoltre, nel limite termodinamico ($N \rightarrow \infty$ e $V \rightarrow \infty$), è conveniente definire $N/V := \rho$, e misurare l'energia in unità di frequenza. In questo modo l'Hamiltoniana di Dicke è descritta da:

$$H = a^\dagger a + \sum_{j=1}^N \left[\frac{1}{2} \epsilon \sigma_j^z + \frac{\lambda}{2\sqrt{N}} (a + a^\dagger) \sigma_j^x \right], \quad (1.2)$$

dove $\epsilon = \omega/\nu$ e $\lambda = \lambda' \rho/\nu$.

1.2 Funzione di Partizione

Da un punto di vista termodinamico la superradianza, cioè l'emissione collettiva di fotoni da parte degli atomi, può essere vista come transizione di fase, osservabile all'aumentare della densità atomica (proporzionale a λ^2) e al diminuire della temperatura.

Per osservare ciò, si deve per prima cosa calcolare la funzione di partizione $Z(N, T)$ del sistema. Poichè vale $Z(N, T) = \text{Tr}(e^{-\beta H})$, dove $\beta = 1/(k_B T)$ con k_B costante di Boltzmann, si deve scegliere una base conveniente per il calcolo della traccia.

Per quanto riguarda la descrizione del campo elettromagnetico, questa base è quella degli stati coerenti $|\alpha\rangle$, caratterizzati dalle seguenti proprietà:

1. $|\alpha\rangle$ è un autostato dell'operatore di distruzione a , cioè vale:

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle; \quad \langle\alpha|a^\dagger = \langle\alpha|\alpha^*.$$

2. l'insieme di tutti gli $|\alpha\rangle$ è completo, ovvero:

$$\int \frac{d^2\alpha}{\pi} |\alpha\rangle\langle\alpha| = 1,$$

dove $\int d^2\alpha := \iint d(\text{Im}(\alpha)) d(\text{Re}(\alpha))$.

In questa base, la funzione di partizione assume la forma¹:

$$Z(N, T) = \sum_{s_1=\pm 1} \cdots \sum_{s_N=\pm 1} \int \frac{d^2\alpha}{\pi} \langle s_1 \cdots s_N | \langle\alpha| e^{-\beta H} |\alpha\rangle | s_1 \cdots s_N \rangle. \quad (1.3)$$

Per calcolare $\langle\alpha| e^{-\beta H} |\alpha\rangle$, è conveniente definire $b := a/\sqrt{N}$ e $b^\dagger := a^\dagger/\sqrt{N}$ e quindi riscrivere l'Hamiltoniana (1.2) nel seguente modo:

$$H = \sum_{j=1}^N \left[b b^\dagger + \frac{\epsilon}{2} \sigma_j^z + \frac{\lambda}{2} (b + b^\dagger) \sigma_j^x \right]. \quad (1.4)$$

¹un atomo è nello stato $|s = \pm 1\rangle$ se, con riferimento all'equazione (1.1), ha energia rispettivamente $\pm \frac{1}{2}\omega$.

Inoltre occorre fare un'altra osservazione: è semplice ottenere la relazione di commutazione tra b e b^\dagger , infatti:

$$[b, b^\dagger] = \frac{1}{N} [a, a^\dagger] = \frac{1}{N} .$$

Usando questa relazione, si può intuire che, nel limite termodinamico ($N \rightarrow \infty$), qualsiasi sequenza formata da r operatori b ed s operatori b^\dagger è equivalente allo stesso numero di operatori disposti nel cosiddetto "ordine antinormale", cioè $(b^\dagger)^s b^r$.

Infatti ogni volta che si scambiano tra loro gli operatori b e b^\dagger , si ottengono due termini, uno che è quello nell'ordine cercato ed uno che è proporzionale ad $1/N$. Nel limite termodinamico il secondo dei due termini è trascurabile e quindi si ottiene il risultato voluto. Ad esempio:

$$bb^\dagger b^\dagger b = (b^\dagger b + \frac{1}{N})b^\dagger b = b^\dagger bb^\dagger b + \frac{1}{N}b^\dagger b = b^\dagger(b^\dagger b + \frac{1}{N})b + \frac{1}{N}b^\dagger b = b^\dagger b^\dagger bb + \frac{2}{N}b^\dagger b.$$

Si osservi, comunque, che questo non è altro che un argomento euristico, ma che comunque l'ipotesi fatta può essere dimostrata in modo formale (come è stato fatto da K. Hepp e E. H. Lieb in [10]).

Utilizzando allora questa proprietà e l'equazione (1.4), si può dimostrare che:

$$\langle \alpha | H^r | \alpha \rangle = (\langle \alpha | H | \alpha \rangle)^r = \left[\alpha \alpha^* + \sum_{j=1}^N \left[\frac{\epsilon}{2} \sigma_j^z + \frac{\lambda}{2\sqrt{N}} (\alpha + \alpha^*) \sigma_j^x \right] \right]^r .$$

Tale dimostrazione consiste nell'osservare che in qualsiasi termine di H^r si possono sostituire le permutazioni di tutti gli operatori di campo b e b^\dagger (che si ottengono calcolando la potenza r -esima di H) con quelle nell'ordine antinormale (grazie alla proprietà descritta poco sopra), e usare il fatto che $\langle \alpha | (b^\dagger)^s b^r | \alpha \rangle = \frac{1}{N^s} (\alpha^\dagger)^s \alpha^r$.

Quindi si ottiene per $\langle \alpha | e^{-\beta H} | \alpha \rangle$:

$$\begin{aligned} \langle \alpha | e^{-\beta H} | \alpha \rangle &= \langle \alpha | \sum_r \frac{(-\beta H)^r}{r!} | \alpha \rangle \\ &= \exp \left\{ -\beta \left[\alpha \alpha^* + \sum_{j=1}^N \left(\frac{\epsilon}{2} \sigma_j^z + \frac{\lambda}{2\sqrt{N}} (\alpha + \alpha^*) \sigma_j^x \right) \right] \right\} . \end{aligned} \quad (1.5)$$

Si noti che per arrivare alla (1.5) sono state usate le seguenti due ipotesi:

- il limite $N \rightarrow \infty$ degli operatori a/\sqrt{N} e a^\dagger/\sqrt{N} esiste;
- l'ordine delle operazioni di limite in

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{R \rightarrow \infty} \sum_{r=0}^R \frac{(-\beta H)^r}{r!}$$

può essere scambiato.

Per proseguire nel calcolo della (1.3), si definisce

$$h_j := \frac{\epsilon}{2}\sigma_j^z + \frac{\lambda}{2\sqrt{N}}(\alpha + \alpha^*)\sigma_j^x,$$

e si osserva che $[h_i, h_j] = 0$.

Utilizzando questa definizione e l'equazione (1.5), si ottiene:

$$\begin{aligned} \langle s_1 \cdots s_N | \langle \alpha | e^{-\beta H} | \alpha \rangle | s_1 \cdots s_N \rangle &= \\ &= e^{-\beta|\alpha|^2} \langle s_1 \cdots s_N | \exp\left(-\beta \sum_{j=1}^N h_j\right) | s_1 \cdots s_N \rangle \\ &= e^{-\beta|\alpha|^2} \langle s_1 \cdots s_N | \prod_{j=1}^N e^{-\beta h_j} | s_1 \cdots s_N \rangle \\ &= e^{-\beta|\alpha|^2} \prod_{j=1}^N \langle s_j | e^{-\beta h_j} | s_j \rangle, \end{aligned} \quad (1.6)$$

dove la terza espressione è ottenuta usando la proprietà $[h_i, h_j] = 0$ nella nota formula di Baker–Campbell–Hausdorff e la quarta si ottiene considerando il fatto che l'operatore h_j agisce come l'operatore identità sugli stati $|s_i\rangle$, per $i \neq j$.

Inserendo ora l'equazione (1.6) nella (1.3), otteniamo la seguente espressione per $Z(N, T)$:

$$\begin{aligned} Z(N, T) &= \int \frac{d^2\alpha}{\pi} \sum_{s_1=\pm 1} \cdots \sum_{s_N=\pm 1} e^{-\beta|\alpha|^2} \prod_{j=1}^N \langle s_j | e^{-\beta h_j} | s_j \rangle \\ &= \int \frac{d^2\alpha}{\pi} e^{-\beta|\alpha|^2} (\langle +1 | e^{-\beta h} | +1 \rangle + \langle -1 | e^{-\beta h} | -1 \rangle)^N \\ &= \int \frac{d^2\alpha}{\pi} e^{-\beta|\alpha|^2} (\text{Tr}(e^{-\beta h}))^N, \end{aligned} \quad (1.7)$$

dove la seconda uguaglianza è ottenuta dalla prima calcolando la sommatoria e la produttoria dopo aver scambiato il loro ordine (osservando che i fattori di cui si vuole calcolare il prodotto sono tutti uguali), con:

$$h := \frac{\epsilon}{2}\sigma^z + \frac{\lambda}{2\sqrt{N}}(\alpha + \alpha^*)\sigma^x.$$

Ora, $e^{-\beta h}$ è una matrice (delle stesse dimensioni di h) e quindi la sua traccia può essere calcolata nella base in cui essa è diagonale. Questa base è la stessa in cui h è diagonale: infatti l'esponenziale di una matrice diagonale è una matrice *diagonale* avente per elementi gli esponenziali degli elementi della matrice di partenza.

Allora, per diagonalizzare h , come primo passo la si scrive in forma matriciale, cioè

$$h = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\epsilon & \lambda(\alpha + \alpha^*)/2\sqrt{N} \\ \lambda(\alpha + \alpha^*)/2\sqrt{N} & -\frac{1}{2}\epsilon \end{pmatrix}.$$

A questo punto si risolve l'equazione secolare

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2}\epsilon - \mu & \lambda(\alpha + \alpha^*)/2\sqrt{N} \\ \lambda(\alpha + \alpha^*)/2\sqrt{N} & -\frac{1}{2}\epsilon - \mu \end{vmatrix} = 0,$$

che ha per soluzioni:

$$\mu = \pm \left(\frac{1}{2}\epsilon\right) \left(1 + \frac{4\lambda^2[\text{Re}(\alpha)]^2}{\epsilon^2 N}\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.8)$$

Usando quindi la (1.8) nella (1.7), si ottiene:

$$\begin{aligned} Z(N, T) &= \int \frac{d^2\alpha}{\pi} e^{-\beta|\alpha|^2} \left(e^{\beta|\mu|} + e^{-\beta|\mu|}\right)^N \\ &= \int \frac{d^2\alpha}{\pi} e^{-\beta|\alpha|^2} \left\{ 2 \cosh \left[\left(\frac{1}{2}\beta\epsilon\right) \left(1 + \frac{4\lambda^2[\text{Re}(\alpha)]^2}{\epsilon^2 N}\right)^{\frac{1}{2}} \right] \right\}^N. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Si osservi ora che l'unica dipendenza da $\text{Im}(\alpha)$ nell'integrale (1.9) è nell'esponenziale $e^{-\beta|\alpha|^2}$. Quindi svolgendo questo integrale gaussiano e sostituendo la variabile di integrazione $y = \text{Re}(\alpha)/\sqrt{N}$ si ottiene:

$$\begin{aligned} Z(N, T) &= \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{\pi\beta}} \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-N\beta y^2} \left\{ 2 \cosh \left[\left(\frac{1}{2}\beta\epsilon\right) \left(1 + \frac{4\lambda^2 y^2}{\epsilon^2}\right)^{\frac{1}{2}} \right] \right\}^N \\ &= \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{\pi\beta}} \int_{-\infty}^{\infty} dy \exp[N\phi(y)], \end{aligned}$$

con

$$\phi(y) := -\beta y^2 + \log \left[2 \cosh \left(\left(\frac{1}{2}\beta\epsilon\right) \left(1 + \frac{4\lambda^2 y^2}{\epsilon^2}\right)^{\frac{1}{2}} \right) \right]. \quad (1.10)$$

Questo integrale può essere risolto col metodo del punto sella², ottenendo così il seguente risultato:

$$Z(N, T) \propto \max_{-\infty \leq y \leq \infty} \exp[N\phi(y)]. \quad (1.11)$$

1.3 Transizione di Fase del Modello di Dicke

Per evidenziare le due fasi in cui può trovarsi il sistema, si può analizzare la funzione definita nella (1.10), e calcolare la funzione di partizione al variare dei parametri che influenzano la posizione del suo massimo.

Come primo passo, si calcola la derivata di ϕ :

$$\phi'(y) = -2\beta y + \frac{2\beta\lambda^2 y}{\epsilon} \left(1 + \frac{4\lambda^2 y^2}{\epsilon^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \tanh \left(\left(\frac{1}{2}\beta\epsilon\right) \left(1 + \frac{4\lambda^2 y^2}{\epsilon^2}\right)^{\frac{1}{2}} \right).$$

²tale metodo è descritto in maggior dettaglio nell'appendice A, data la sua importanza in generale e l'uso che ne viene fatto in queste pagine.

Affinchè sia massimo $\exp(N\phi)$ (dall'equazione (1.11)), deve essere massima ϕ . Quindi deve essere $\phi' = 0$, cioè:

$$y = 0 \quad \text{oppure} \quad \frac{\epsilon}{\lambda^2} \eta = \tanh \left[\left(\frac{1}{2} \beta \epsilon \right) \eta \right], \quad (1.12)$$

in cui $\eta := (1 + 4\lambda^2 y^2 / \epsilon^2)^{\frac{1}{2}}$. Si osservi, quindi, che si ha: $1 \leq \eta \leq \infty$.

Inoltre, dato che $\tanh x \leq 1$ per $x \leq \infty$, si conclude che, se $\lambda^2 < \epsilon$, la seconda delle (1.12) non ammette soluzioni. In questo caso, quindi, la funzione (1.10) ha un unico massimo in $y = 0$. Dunque si ha:

$$Z(N, T) \propto \left[2 \cosh \left(\frac{1}{2} \beta \epsilon \right) \right]^N. \quad (1.13)$$

Si consideri ora il caso $\lambda^2 > \epsilon$. Data questa ipotesi, si possono verificare due scenari. Il primo si ha per $\beta < \beta_c$, dove β_c è definito dall'equazione:

$$\frac{\epsilon}{\lambda^2} = \tanh \left[\left(\frac{1}{2} \beta_c \epsilon \right) \right].$$

Sotto queste condizioni, si capisce, con ragionamenti simili a quelli fatti nel caso precedente, che la seconda equazione delle (1.12) ancora una volta non ha soluzioni. Quindi il massimo della (1.10) si ha per $y = 0$ e si ritrovano gli stessi risultati del caso precedente, compresa la (1.13).

D'altra parte, se $\beta > \beta_c$, la seconda delle equazioni (1.12) ha una sola soluzione nell'intervallo $1 \leq \eta \leq \infty$, quella con $\eta = \eta_0$, dove η_0 è definito da:

$$\frac{\epsilon}{\lambda^2} \eta_0 = \tanh \left[\left(\frac{1}{2} \beta \epsilon \right) \eta_0 \right].$$

Si noti che la funzione (1.10) è pari e quindi η_0 definisce due punti estremali per ϕ , simmetrici rispetto ad $y = 0$: siano essi $\pm y_0$. Poichè il limite per $y \rightarrow \pm \infty$ di ϕ è $-\infty$ e ci sono tre (e solo tre) punti estremali, l'unica possibilità è che in questo caso il punto $y = 0$ sia un minimo locale, mentre i punti $y = \pm y_0$ siano punti di massimo assoluti.

Per la funzione di partizione si ottiene, in tal caso:

$$Z(N, T) \propto \exp \left\{ N \left[-\beta y_0^2 + \log \left[2 \cosh \left(\frac{1}{2} \beta \epsilon \eta_0 \right) \right] \right] \right\}. \quad (1.14)$$

Come si può vedere confrontando le equazioni (1.13) e (1.14), nel caso in cui $\lambda^2 > \epsilon$ ci sono due fasi differenti e il sistema passa dall'una all'altra alla temperatura $T_c = \frac{1}{k\beta_c}$, detta "temperatura critica" del sistema. In particolare, lo stato in cui il sistema si presenta se $T > T_c$ verrà detto di "radianza normale" (per sottolineare il fatto che non è presente il fenomeno della superradianza), quello invece in cui il sistema è ad una temperatura $T < T_c$ è detto lo stato di "superradianza".

Per motivare il nome delle due fasi, si deve calcolare il numero medio di fotoni in cavità (per atomo) nei due differenti casi: esso è dato dal valor medio dell'operatore $\frac{a^\dagger a}{N}$, che per definizione vale:

$$\bar{n} := \left\langle \frac{a^\dagger a}{N} \right\rangle = \frac{\text{Tr} \left[\left(\frac{a^\dagger a}{N} \right) e^{-\beta H} \right]}{Z(N, T)}.$$

Questa quantità è detta “parametro d’ordine” del sistema. In generale un parametro d’ordine è definito dall’aver media termodinamica nulla in una certa fase del sistema e diversa da zero nelle altre fasi. Usualmente un parametro d’ordine è la derivata della funzione di partizione rispetto ad un qualche parametro che caratterizza il sistema. Proprio per questa ragione se il parametro d’ordine varia in modo discontinuo, la transizione di fase è detta di primo ordine (discontinuità nella derivata prima della funzione di partizione). Se invece varia con continuità ma con derivata discontinua, la transizione di fase è detta di secondo ordine (discontinuità nella derivata seconda della funzione di partizione).

Per calcolare la traccia al numeratore della (1.3), si procede in modo simile al calcolo di $Z(N, T)$, ottenendo:

$$\begin{aligned} \text{Tr} \left[\left(\frac{a^\dagger a}{N} \right) e^{-\beta H} \right] &= \frac{1}{N} \int \frac{d^2\alpha}{\pi} |\alpha|^2 e^{-\beta|\alpha|^2} f(\text{Re}(\alpha)) \\ &= \frac{1}{\pi N} \int_{-\infty}^{\infty} dv v^2 e^{-\beta v^2} f(v) \int_{-\infty}^{\infty} dw e^{-\beta w^2} + \\ &\quad + \frac{1}{\pi N} \int_{-\infty}^{\infty} dv e^{-\beta v^2} f(v) \int_{-\infty}^{\infty} dw w^2 e^{-\beta w^2}, \end{aligned}$$

con $v := \text{Re}(\alpha)$ e $w := \text{Im}(\alpha)$ e

$$f(x) := \left\{ 2 \cosh \left[\left(\frac{1}{2} \beta \epsilon \right) \left(1 + \frac{4\lambda^2 x^2}{\epsilon^2 N} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \right\}^N.$$

A questo punto, si calcolano gli integrali gaussiani presenti e si sostituisce $y = v/\sqrt{N}$ nei due integrali che restano, ottenendo:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{N\sqrt{\pi\beta}} \int_{-\infty}^{\infty} dv v^2 e^{-\beta v^2} f(v) + \frac{1}{2N\sqrt{\pi}\beta^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} dv e^{-\beta v^2} f(v) \\ &= \sqrt{\frac{N}{\pi\beta}} \int_{-\infty}^{\infty} dy y^2 e^{-N\beta y^2} f(\sqrt{N}y) + \frac{1}{2\sqrt{\pi N}\beta^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-N\beta y^2} f(\sqrt{N}y). \end{aligned}$$

Infine si osserva che nel limite termodinamico il contributo del secondo integrale è trascurabile rispetto a quello del primo. Si ottiene dunque:

$$\bar{n} = \frac{\int_0^\infty dy y^2 \exp \left\{ N \left[-\beta y^2 + \log \left[2 \cosh \left(\left(\frac{1}{2} \beta \epsilon \right) \left(1 + \frac{4\lambda^2 y^2}{\epsilon^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \right] \right] \right\}}{\int_0^\infty dy \exp \left\{ N \left[-\beta y^2 + \log \left[2 \cosh \left(\left(\frac{1}{2} \beta \epsilon \right) \left(1 + \frac{4\lambda^2 y^2}{\epsilon^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \right] \right] \right\}}.$$

Questi due integrali possono essere risolti col metodo del punto sella. Quindi per i ragionamenti fatti precedentemente si ottengono i risultati nei due differenti casi:

- se $\lambda^2 < \epsilon$ oppure se $\lambda^2 > \epsilon$ e $\beta < \beta_c$, la funzione integranda va calcolata per $y = 0$, quindi

$$\bar{n} = 0;$$

- se $\lambda^2 > \epsilon$ e $\beta > \beta_c$, invece, si ottiene

$$\bar{n} = y_0^2 \neq 0 ,$$

dove y_0 è il (valore assoluto del) punto di massimo della funzione ϕ introdotta sopra.

Ecco, quindi, in che modo si può vedere che $\frac{a^\dagger a}{N}$ è un parametro d'ordine del sistema. Ricordando inoltre il suo significato fisico, è evidente che nello stato di superradianza il numero medio di fotoni in cavità è proporzionale al numero di atomi totali, a differenza del caso in cui il sistema è nello stato di radianza normale.

1.3.1 Transizione di Fase a Temperatura Nulla

Un caso particolare della transizione di fase appena osservata (e che verrà utilizzato nel seguito) è quello che si ottiene studiando il limite di $T \rightarrow 0$ (cioè $\beta \rightarrow \infty$) della (1.10). Ripercorrendo gli stessi passaggi della sezione precedente, si ha:

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \phi(y) = \beta \left[-y^2 + \frac{1}{2} \epsilon \sqrt{1 + \frac{4\lambda^2 y^2}{\epsilon^2}} \right] .$$

Per indagare la transizione di fase è allora utile studiare il massimo della funzione:

$$\varphi(y) := -y^2 + \frac{1}{2} \epsilon \sqrt{1 + \frac{4\lambda^2 y^2}{\epsilon^2}} . \quad (1.15)$$

Si calcola quindi la sua derivata,

$$\varphi(y)' = 2y \left[-1 + \frac{\lambda^2}{\epsilon} \left(1 + \frac{4\lambda^2 y^2}{\epsilon^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \right] ,$$

e si calcola per quali y essa è uguale a zero. Il risultato che si ottiene è:

$$y = 0 \quad \text{oppure} \quad y^2 = \frac{1}{4\lambda^2} (\lambda^4 - \epsilon^2) .$$

Si osservi che il secondo risultato esiste se e solo se vale

$$\lambda^2 > \epsilon . \quad (1.16)$$

Osservando che φ è una funzione pari di y è evidente che se la condizione (1.16) non è soddisfatta, allora il massimo di φ si ha per $y = 0$. D'altra parte, se la (1.16) è valida per i parametri scelti, il massimo di φ si ha per $y \neq 0$, e quindi si osserva la transizione di fase (ciò si può giustificare esattamente come fatto nella sezione precedente ragionando sui limiti e sulla parità di φ).

Da questi calcoli si deduce che la transizione dalla fase di radianza normale a quella di superradianza avviene anche a temperatura nulla (è, quindi, una transizione di fase *quantistica*, nel senso che verrà chiarito in seguito), questa volta dipendendo solo dai parametri λ ed ϵ secondo la (1.16). È inoltre interessante osservare l'energia dello stato fondamentale (detto anche ground state o semplicemente GS) del sistema, nella figura 1.1. Nel caso $T \rightarrow 0$, infatti, si ha:

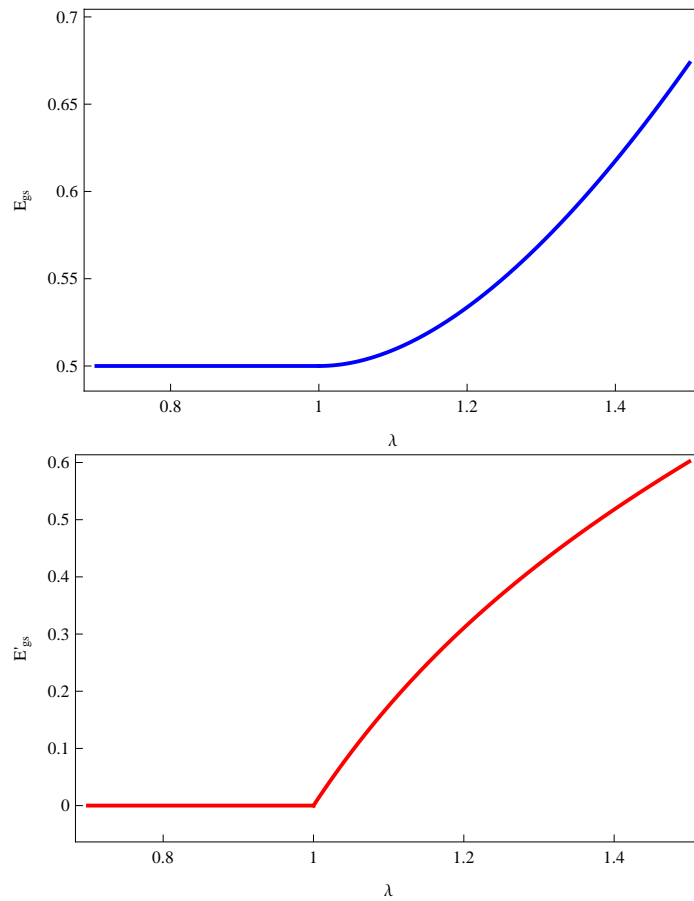


Figura 1.1: energia dello stato fondamentale (in blu) e sua derivata (in rosso) nel caso $T = 0$ al variare del coefficiente di accoppiamento λ tra atomi e campo elettromagnetico, con $\epsilon = 1$. Si osservi come, nel punto di transizione di fase, cioè per $\lambda = 1$, la derivata seconda (non riportata nei grafici) sia evidentemente discontinua (come si capisce guardando il grafico della derivata prima).

$$Z(N, T) = \sum_n e^{-\beta E_n} \approx e^{-\beta E_{gs}} , \quad (1.17)$$

dato che $\beta \rightarrow \infty$ e E_{gs} (energia del ground state, appunto) è il minore tra tutti gli E_n . Quindi nel caso del modello di Dicke a $T \rightarrow 0$ si ha:

$$E_{gs} \propto \max_{-\infty \leq y \leq \infty} \varphi(y) \quad (1.18)$$

e, come si nota nella figura 1.1, l'energia dello stato fondamentale ha una discontinuità nella derivata seconda. Quindi la transizione di superradianza è del secondo ordine. Ciò viene confermato anche dalla figura 1.2, in cui viene mostrato che il parametro d'ordine varia con continuità.

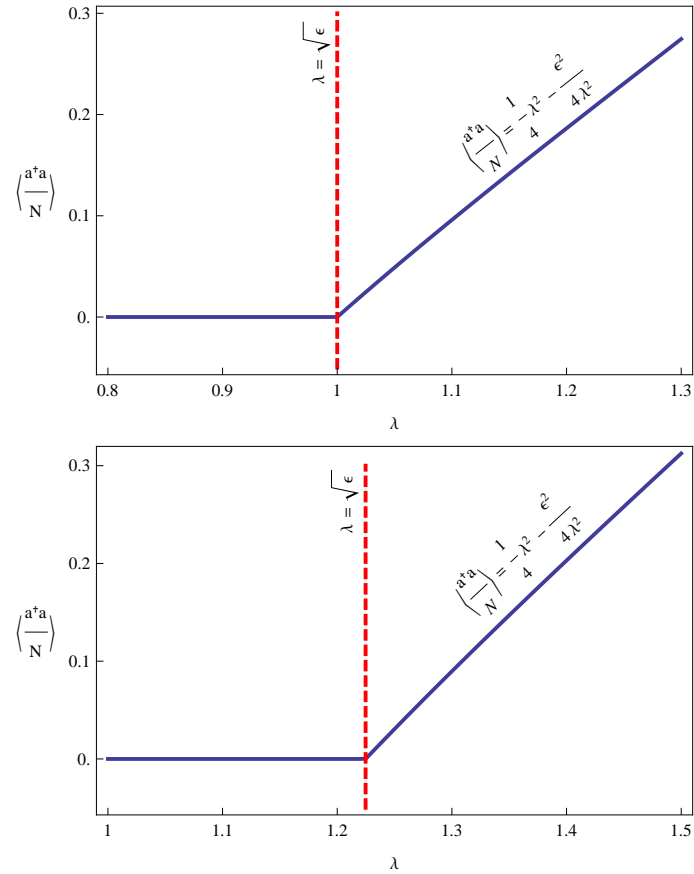


Figura 1.2: numero medio di fotoni in cavità nel caso $T = 0$ al variare del coefficiente di accoppiamento λ tra atomi e campo elettromagnetico. Le due figure sono ottenute calcolando numericamente il massimo della funzione $\varphi(y) = -y^2 + \frac{1}{2}\epsilon\sqrt{1 + \frac{4\lambda^2 y^2}{\epsilon^2}}$, avendo fissato il parametro che caratterizza la distanza energetica tra i livelli degli atomi, ϵ ($\epsilon = 1$ per la figura in alto e $\epsilon = 1.5$ per quella in basso). La retta tratteggiata rossa corrisponde al punto di transizione di fase, ovvero quello in cui la media del parametro d'ordine diventa non nulla. Come ci si aspetta, è la retta $\lambda^2 = \epsilon$.

Capitolo 2

Il Modello di Ising

2.1 Il Modello di Ising Classico

Il modello di Ising, introdotto nel 1920 da Wilhelm Lenz e studiato fin da subito da Ernst Ising, è il più semplice modello di meccanica statistica che presenta una transizione di fase. In particolare, questo modello descrive l'interazione di N momenti magnetici (che, per brevità, verranno chiamati semplicemente "spin") associati ad N atomi immersi in un campo magnetico esterno.

2.1.1 Hamiltoniana di Ising

L'importante semplificazione che si fa con il modello di Ising è quella di rendere la quantità vettoriale *spin* un semplice scalare che può valere ± 1 . Gli spin, inoltre, vengono considerati aventi posizione fissata in un reticolo. Grazie a queste ipotesi, l'interazione tra gli spin e tra spin e campo magnetico è data dall'Hamiltoniana:

$$H = -\frac{J}{2} \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i \sigma_j - B \sum_{i=1}^N \sigma_i, \quad (2.1)$$

dove J misura l'intensità dell'accoppiamento tra gli spin, mentre B misura l'intensità del campo magnetico esterno. Inoltre il simbolo $\langle i,j \rangle$ sta ad indicare il fatto che la somma va effettuata su tutti gli spin adiacenti¹.

2.1.2 Transizione di Fase nel Modello di Ising

Studiando l'Hamiltoniana (2.1) si può dimostrare che il sistema presenta una transizione di fase ad una certa temperatura T_c , individuata dal parametro d'ordine di magnetizzazione spontanea $M = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sigma_i$. Tale temperatura critica è infatti caratterizzata dal passaggio da una fase paramagnetica (in cui la media termodinamica del parametro d'ordine è nulla) ad una ferromagnetica (in cui la media termodinamica del parametro d'ordine è diversa da zero).

¹ cioè se per esempio si ha una catena di spin allora la somma va fatta su ogni coppia di spin vicini; se invece si ha un reticolo quadrato, la somma andrà calcolata facendo interagire ogni spin con i quattro spin a lui più vicini, e così via.

Poichè non si conosce una soluzione esatta di questo modello nel caso generale n -dimensionale, per studiarne la termodinamica si ricorre a metodi approssimati. Tra questi, quello più semplice è la “approssimazione di campo medio”².

Sia allora $P(\sigma)$ la probabilità che il sistema sia nella configurazione microscopica σ (quindi σ definisce lo stato di ogni spin del sistema). L'approssimazione di campo medio consiste nel supporre che $P(\sigma)$ sia fattorizzabile nelle probabilità dei singoli siti, cioè valga:

$$P(\sigma) = \prod_{i=1}^N P_i(\sigma_i). \quad (2.2)$$

Inoltre, si ipotizza che sia

$$P_i(\sigma_i) = \frac{1+m_i}{2} \delta(\sigma_i - 1) + \frac{1-m_i}{2} \delta(\sigma_i + 1),$$

dove gli m_i sono opportuni parametri. Per capire il significato fisico degli m_i , si osservi che per una generica funzione calcolata su di un singolo sito vale:

$$\langle f(\sigma_i) \rangle = \sum_{\sigma_i} P_i(\sigma_i) f(\sigma_i) = \frac{1+m_i}{2} f(1) + \frac{1-m_i}{2} f(-1). \quad (2.3)$$

In particolare si ottiene:

$$\langle \sigma_i \rangle = \frac{1+m_i}{2} - \frac{1-m_i}{2} = m_i.$$

Quindi il parametro m_i è la magnetizzazione media del sito i -esimo. Poichè i coefficienti di accoppiamento tra i vari spin sono tutti uguali a J , deve essere $m_i = m$ per ogni i , con m opportuna costante.

In particolare, m deve essere scelto in modo da minimizzare l'energia libera del sistema. Dunque, poichè si ha per l'entropia S e per l'energia E (usando un sistema di unità di misura in cui $k_B = 1$):

$$\begin{aligned} S &= -\langle \log(P(\sigma)) \rangle = -\sum_{i=1}^N \langle \log(P_i(\sigma_i)) \rangle = \\ &= -\sum_{i=1}^N \left[\frac{1+m}{2} \log\left(\frac{1+m}{2}\right) + \frac{1-m}{2} \log\left(\frac{1-m}{2}\right) \right], \\ E &= \langle H \rangle = \sum_{\sigma} P_{\sigma} H_{\sigma} = -\frac{J}{2} \sum_{\langle i,j \rangle} m^2 - BNm, \end{aligned}$$

dove nella prima equazione si è usata la (2.3), mentre nella seconda si è usata la (2.1) insieme al fatto che $\langle f(\sigma_i)g(\sigma_j) \rangle = \langle f(\sigma_i) \rangle \langle g(\sigma_j) \rangle$ (che si dimostra subito usando la (2.2)).

Quindi si deve scegliere m in modo che

$$\begin{aligned} F &= E - TS = -\frac{J}{2} \sum_{\langle i,j \rangle} m^2 - BNm + \\ &\quad - NT \left[\frac{1+m}{2} \log\left(\frac{1+m}{2}\right) + \frac{1-m}{2} \log\left(\frac{1-m}{2}\right) \right] \end{aligned}$$

²una trattazione completa e chiara di tale teoria si può trovare in [11].

sia minima.

Sia ora z il numero di “primi vicini” con cui ogni spin interagisce: si ha allora $\sum_{\langle i,j \rangle}^N m^2 = zNm^2$. Inoltre, affinché F sia minima, deve essere $\partial F/\partial m = 0$, quindi:

$$zJm - B - T \operatorname{arctanh}(m) = 0 ,$$

ovvero:

$$m = \tanh(\beta [zJm - B]) . \quad (2.4)$$

Si vuole capire ora se il sistema presenta una magnetizzazione residua per $B \rightarrow 0$. In questo caso, l'equazione da risolvere diventa:

$$m = \tanh(\beta zJm) .$$

Questa equazione può essere risolta graficamente, osservando la figura 2.1. Come si nota, $m = 0$ è sempre soluzione, mentre se la derivata della funzione $\tanh(\beta zJm)$ nell'origine è maggiore di 1, ovvero se vale $\beta zJ > 1$, allora si hanno altre due soluzioni (simmetriche rispetto ad $m = 0$).

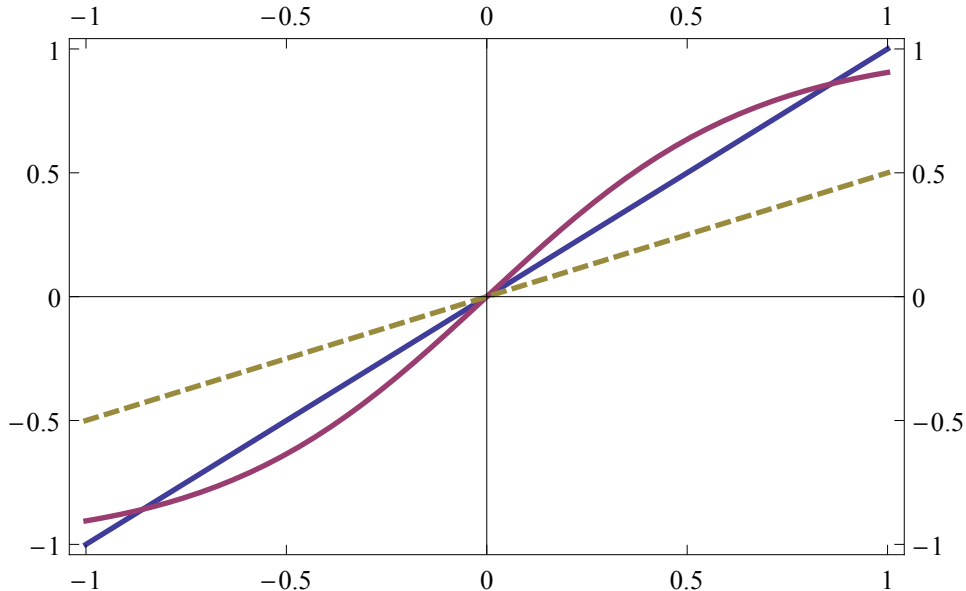


Figura 2.1: in blu è riportata la retta $y = m$, mentre in viola è riportato il grafico di $y = \tanh(1.5 m)$; confrontando il caso della retta blu con la retta tratteggiata ($y = 0.5 m$), si vede che l'equazione $m = \tanh(Am)$ può avere una (in $m = 0$) o tre (per $m = 0, \pm\lambda$) soluzioni, dipendentemente dal parametro A .

Inoltre imponendo la condizione di minimo locale $\partial^2 F/\partial m^2 < 0$, si capisce che nel, caso in cui sono presenti tre soluzioni, il punto $m = 0$ diventa un massimo locale, mentre gli altri due punti sono minimi (il grafico qualitativo è quello in figura 2.2). Quindi in tal caso si ha $m \neq 0$, ovvero il sistema si trova all'equilibrio con magnetizzazione residua non nulla.

Riassumendo, se $T < T_c$, con

$$T_c = zJ ,$$

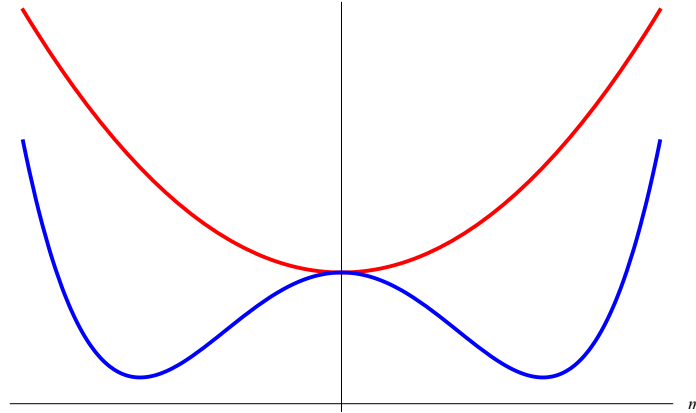


Figura 2.2: energia libera del modello di Ising nei casi $T < T_c$ (in blu) e $T > T_c$ (in rosso); si noti come per $T > T_c$ F ha un solo minimo, in $m = 0$, mentre per $T < T_c$ ha tre punti estremanti: uno è ancora in $m = 0$ ed è un punto di massimo, mentre gli altri due sono punti di minimo in $m \neq 0$.

si ha una magnetizzazione residua non nulla e in tal caso il sistema viene detto nella fase “ferromagnetica”. Invece se $T > T_c$, il minimo di F si ha per $m = 0$ e quindi la magnetizzazione residua è nulla: in tal caso si parla di fase “paramagnetica”.

Si noti la somiglianza tra l’equazione (2.4) e la seconda delle (1.12): se si considera il caso $\epsilon \rightarrow 0$ nel modello di Dicke e si ridefiniscono i parametri nel modo opportuno, le due equazioni diventano identiche. Inoltre in entrambi i casi l’equazione può avere una o tre soluzioni, ed in entrambi i casi questo corrisponde ad una transizione di fase. Infatti nel caso $\epsilon \rightarrow 0$, l’unica condizione per la transizione di fase nel modello di Dicke è che $T < T_c$, esattamente come accade nel modello di Ising.

Quindi è lecito un parallelismo tra i due modelli (di Ising in campo medio e di Dicke) e tra le loro fasi. In particolare ci sarà un’analogia nel caso in cui le equazioni hanno una sola soluzione, ovvero tra la fase paramagnetica e quella di radianza normale, e nel caso in cui le equazioni hanno tre soluzioni, quindi tra la fase ferromagnetica e quella di superradianza.

Questa analogia è motivata dal fatto che l’interazione nel modello di Dicke è a lungo range e si dimostra che l’approssimazione di campo medio risulta esatta nel modello di Ising se si fanno interagire *tutte* le coppie di spin, inserendo anche in questo modello, quindi, un’interazione a lungo range.

2.2 Il Modello di Ising Quantistico

2.2.1 Hamiltoniana Quantistica

Il modello di Ising quantistico è piuttosto diverso da quello “classico”, pur avendo con esso alcuni elementi in comune. L’Hamiltoniana è:

$$H = -Kg \sum_{i=1}^N \hat{\sigma}_i^z - KJ \sum_{\langle i,j \rangle} \hat{\sigma}_i^y \hat{\sigma}_j^y, \quad (2.5)$$

in cui $K > 0$ è l’unica costante dimensionale e descrive l’ordine di grandezza tipico delle energie in gioco nel sistema. J e g sono, invece due costanti adimensionali che permettono di variare l’intensità dell’accoppiamento rispettivamente tra gli spin degli atomi e tra lo spin del singolo atomo e il campo magnetico. È chiaro, quindi, che il primo termine della (2.5) descrive l’interazione spin–campo magnetico, mentre il secondo descrive l’interazione tra gli spin adiacenti.

Misurando l’energia in unità di K e definendo $h := g/J$, si può riscrivere l’Hamiltoniana in una forma più semplice:

$$H' = -h \sum_{i=1}^N \hat{\sigma}_i^x - \sum_{\langle i,j \rangle} \hat{\sigma}_i^z \hat{\sigma}_j^z. \quad (2.6)$$

Si osservi che $\hat{\sigma}^j$ sta ad indicare l’*operatore quantistico* “spin nella direzione j ” (o meglio il doppio di esso) e quindi le scritture matriciali degli operatori $\hat{\sigma}$ sono le matrici di Pauli.

Si noti che nella base in cui $\hat{\sigma}^z$ è diagonale, esso ha autovalori ± 1 , e quindi gli spin si comportano esattamente come nel modello di Ising classico per quanto riguarda la loro interazione: essi possono essere negli stati $|\uparrow\rangle$ (autovalore 1) o $|\downarrow\rangle$ (autovalore -1).

D’altra parte, nel modello quantistico il campo magnetico è in una direzione ortogonale a quella in cui gli spin si orientano per la loro reciproca interazione. Per descrivere questo fatto, l’interazione con il campo magnetico è introdotta nella (2.6) da $\hat{\sigma}^x$, che non commuta con $\hat{\sigma}^z$. Ciò introduce dei comportamenti del sistema che sono puramente quantistici, come ad esempio il fatto che lo stato di spin possa essere una sovrapposizione degli stati $|\uparrow\rangle$ e $|\downarrow\rangle$.

Ciò che resta da fare, ora, è studiare questo modello per capire se presenta una transizione di fase, come il modello di Ising classico. Prima di questo, però, è necessario definire cosa si intende per transizione di fase quantistica³.

2.2.2 Transizioni di Fase Quantistiche

Sia H l’Hamiltoniana di un sistema quantistico e sia g il parametro da cui H dipende, cioè sia $H = H(g)$. In generale, al variare di g , l’energia dei livelli energetici dello spettro di $H(g)$ sarà una funzione analitica.

Si osservi ora lo stato fondamentale del sistema: ci si aspetta che al variare di g esso resti “al di sotto” (energeticamente parlando) del primo livello eccitato. C’è però la possibilità che ci sia un “overlapping”, cioè che l’energia dello stato fondamentale diventi maggiore di quella del primo livello eccitato (e quindi i due

³tale definizione è presa da quella presente in [12].

stati si “scambiano di ruolo”). In questo caso l’energia del stato fondamentale non è più una funzione analitica del parametro (nel punto dell’overlapping) e si dice che c’è una transizione di fase (quantistica)⁴.

Solitamente ad una transizione di fase quantistica corrisponde un cambiamento del comportamento fisico del sistema, proprio come nel caso della transizione di fase nel modello di Ising classico si osserva cambiare la magnetizzazione residua del sistema.

Infine si osservi che poichè le transizioni di fase quantistiche riguardano lo stato fondamentale di un sistema, in teoria esse sono da studiare a $T = 0$. Infatti mentre le transizioni di fase classiche sono dovute a fluttuazioni *termiche* (si pensi ad esempio al caso degli spin del modello di Ising classico), quelle quantistiche sono dovute alle cosiddette fluttuazioni *quantistiche*, cioè sono dovute al Principio di Indeterminazione di Heisenberg. Quindi a $T = 0$ sono solo le transizioni di fase quantistiche che possono avere luogo (dato che non ci sono fluttuazioni termiche), mentre per $T \gg 0$ diventano dominanti le fluttuazioni termiche, quindi in questo caso ha senso studiare solo le transizioni di fase classiche.

2.2.3 Transizione di Fase del Modello di Ising Quantistico

Per analizzare la transizione di fase quantistica nel modello di Ising quantistico, si può procedere nel seguente modo: per prima cosa, si studia lo stato fondamentale della (2.6) nei casi $h \gg 1$ e $h \ll 1$.

Sia quindi $h \gg 1$. In questo caso il primo termine della (2.6) è dominante. Trascurando allora il termine meno importante, si ottiene il seguente stato fondamentale:

$$|0\rangle = \prod_i |\rightarrow\rangle_i,$$

dove $|\rightarrow\rangle_i = (|\uparrow\rangle_i + |\downarrow\rangle_i) / \sqrt{2}$. Quindi, poichè se su un tale stato viene misurata la componente z dello spin si ha pari probabilità di trovare $+1$ e -1 , gli spin sono indipendenti gli uni dagli altri. Questa fase è detta, in analogia con il caso classico, fase paramagnetica (quantistica).

Il caso $h \ll 1$ è piuttosto simile: infatti sotto questa ipotesi è il secondo termine della (2.6) ad essere dominante, e l’altro viene trascurato. Quindi lo stato fondamentale può essere:

$$|0\rangle = \prod_i |\uparrow\rangle_i \quad \text{oppure} \quad |0\rangle = \prod_i |\downarrow\rangle_i.$$

In questa fase il comportamento del sistema cambia rispetto al caso precedente: infatti gli spin sono tutti correlati! Questa fase prende quindi il nome di fase ferromagnetica (quantistica).

Essendo questi i comportamenti nei casi-limite del sistema in considerazione, ci deve essere un valore di h , che verrà indicato con h_c , in cui c’è la transizione di fase. Per individuarlo, una strategia può essere quella di diagonalizzare

⁴affinchè ciò sia possibile, comunque, devono essere verificate alcune ipotesi. In primo luogo, deve accadere che gli stati del sistema non cambino al variare di g (per rendere sensato il confronto di cui si parla sopra), ovvero che l’autofunzione dell’Hamiltoniana non dipenda da g ; quindi a variare deve essere solo l’energia dei vari livelli, cioè gli autovalori dell’Hamiltoniana devono dipendere da g . Tali ipotesi possono essere verificate, ad esempio, se $H = H_0 + gH_I$ con $[H_0, H_I] = 0$.

l'Hamiltoniana (2.6) e quindi studiare direttamente lo spettro energetico. Questo problema è esattamente risolubile nel caso del modello di Ising quantistico unidimensionale e verrà affrontato in modo dettagliato nella prossima sezione⁵.

2.2.4 Modello di Ising Quantistico Unidimensionale

L'Hamiltoniana del modello di Ising quantistico unidimensionale descrive una catena di Ising di atomi in un campo magnetico trasversale. Si ottiene quindi dalla (2.6):

$$H = \sum_{i=1}^N (-h\hat{\sigma}_i^x + \hat{\sigma}_i^z \hat{\sigma}_{i+1}^z). \quad (2.7)$$

Piuttosto che diagonalizzare direttamente questa Hamiltoniana, è preferibile ruotare gli assi nel seguente modo, in modo da poter poi definire vari operatori (come σ^+ o σ^-) nel modo standard (inoltre, per comodità, da ora in poi verrà usato il simbolo σ per indicare gli operatori, eliminando il cappello):

$$H = \sum_{i=1}^N (-h\sigma_i^x + \sigma_i^y \sigma_{i+1}^y). \quad (2.8)$$

Trasformazione di Jordan–Wigner

Per diagonalizzare l'Hamiltoniana (2.8), il primo passo da fare è la cosiddetta trasformazione di Jordan–Wigner, che mappa il problema di spin in un problema di fermioni senza spin (*spinless*).

L'idea alla base di tale trasformazione è relativamente semplice: si osserva che esiste una corrispondenza tra un sistema di N atomi con due stati di spin (quindi spin- $\frac{1}{2}$) e un sistema di N siti che possono essere occupati o meno da una particella. Ciò è vero solo se si ha la possibilità di mettere una sola particella per sito, associando per esempio lo stato “spin-up” al sito vuoto e lo stato “spin-down” al sito pieno. Ecco allora che entrano in gioco i fermioni *spinless*: essi devono obbedire al principio di esclusione di Pauli, e quindi solo uno di loro può occupare un determinato sito (proprio perchè non hanno spin: se avessero accesso a n stati di spin, allora sarebbe stato lecito mettere fino a n fermioni per sito, come illustrato nella figura 2.3).

La trasformazione di Jordan–Wigner consiste nel fare la seguente sostituzione:

$$\sigma_j^+ = e^{i\pi \sum_{l<j} \psi_l^\dagger \psi_l} \psi_j, \quad (2.9)$$

$$\sigma_j^- = \psi_j^\dagger e^{-i\pi \sum_{l<j} \psi_l^\dagger \psi_l}, \quad (2.10)$$

$$\sigma_j^z = 1 - 2\psi_j^\dagger \psi_j, \quad (2.11)$$

dove, come da notazione standard, $\sigma^+ = (\sigma^x + i\sigma^y)/2$ e $\sigma^- = (\sigma^x - i\sigma^y)/2$; inoltre ψ e ψ^\dagger sono gli operatori di distruzione e creazione di un fermione *spinless*,

⁵la trattazione di questo problema si può trovare, in termini simili a quelli che verranno usati, ad esempio qui [13].

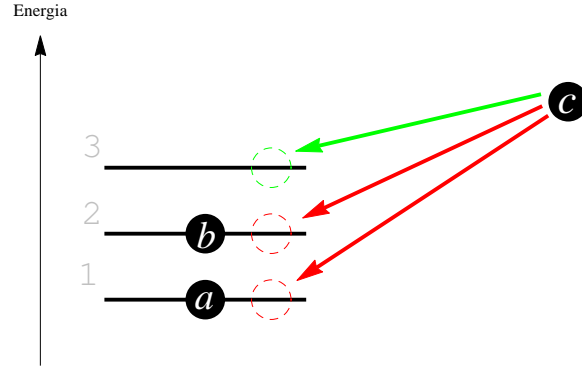


Figura 2.3: il fermione *spinless* “a” occupa il ground state e quello contrassegnato con “b” occupa il primo stato eccitato. Questa è la configurazione di minima energia con due fermioni, poichè, essendo senza spin, per il principio di esclusione di Pauli può esserci un solo fermione per ogni livello energetico. Se quindi si vuole creare il fermione “c”, per avere la configurazione di minima energia esso dovrà occupare il secondo stato eccitato.

ovvero operatori che rispettano le regole di anti-commutazione⁶:

$$\{\psi_i, \psi_j^\dagger\} = \delta_{ij}, \quad \{\psi_i, \psi_j\} = 0, \quad \{\psi_i^\dagger, \psi_j^\dagger\} = 0.$$

Alla luce della corrispondenza instaurata sopra, dovrebbe essere chiaro, riferendosi (solo momentaneamente) all’Hamiltoniana iniziale (2.7), che σ^z deve subire la trasformazione (2.11). Inoltre è semplice capire che c’è una relazione tra l’operatore ψ^\dagger , che crea un fermione in un sito vuoto, e l’operatore σ^+ , che fa passare uno spin dallo stato $|\downarrow\rangle$ allo stato $|\uparrow\rangle$ (similmente tra ψ e σ^-). Il motivo per cui questa relazione non è di semplice uguaglianza, è che se riferiti a siti diversi gli operatori ψ^\dagger e ψ *anticommutano*, mentre σ^+ e σ^- *commutano*. Il modo per far sì che tutte le relazioni siano rispettate correttamente (trovato da Jordan e Wigner) è tutt’altro che banale e consiste proprio nell’usare le trasformazioni (2.9) e (2.10).

Si osservi ora che vale la seguente uguaglianza:

$$\begin{aligned} \exp(\pm i\pi \psi_l^\dagger \psi_l) &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} (\pm i\pi)^j (\psi_l^\dagger \psi_l)^j = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} (\pm i\pi)^j \psi_l^\dagger \psi_l \\ &= 1 + (e^{\pm i\pi} - 1) \psi_l^\dagger \psi_l = 1 - 2\psi_l^\dagger \psi_l, \end{aligned}$$

dove il passaggio dalla seconda alla terza scrittura è giustificato dal fatto che, in quanto operatori di creazione e distruzione di fermioni liberi, si ha $\psi_j^2 = 0$ e $(\psi_j^\dagger)^2 = 0$ (si ottengono da $\{\psi_j, \psi_j\} = 0$ e $\{\psi_i^\dagger, \psi_j^\dagger\} = 0$) e quindi si dimostra subito che $(\psi_l^\dagger \psi_l)^2 = \psi_l^\dagger \psi_l$.

⁶queste regole di anti-commutazione possono essere dimostrate invertendo le equazioni (2.9) e (2.10) (per fare ciò si può usare il fatto che $\sigma_j^- \sigma_j^+ = \psi_j^\dagger \psi_j$) e le proprietà degli operatori σ^+ e σ^- .

Si possono allora riscrivere le equazioni (2.9) e (2.10) nel seguente modo:

$$\sigma_j^+ = i \prod_{l=1}^{j-1} (1 - 2\psi_l^\dagger \psi_l) \psi_j, \quad (2.12)$$

$$\sigma_j^- = i \prod_{l=1}^{j-1} (1 - 2\psi_l^\dagger \psi_l) \psi_j^\dagger. \quad (2.13)$$

E quindi:

$$\sigma_j^y = i(\sigma_j^- - \sigma_j^+) = i \prod_{l=1}^{j-1} (1 - 2\psi_l^\dagger \psi_l) (\psi_j^\dagger - \psi_j).$$

Ora si deve usare questo ultimo risultato per scrivere il termine $\sigma_j^y \sigma_{j+1}^y$ della Hamiltoniana (2.8):

$$\begin{aligned} \sigma_j^y \sigma_{j+1}^y &= - \prod_{l=1}^{j-1} (1 - 2\psi_l^\dagger \psi_l) (\psi_j^\dagger - \psi_j) \prod_{m=1}^j (1 - 2\psi_m^\dagger \psi_m) (\psi_{j+1}^\dagger - \psi_{j+1}) \\ &= \left(-\psi_j^\dagger \psi_{j+1}^\dagger + \psi_j^\dagger \psi_{j+1} + \psi_j \psi_{j+1}^\dagger - \psi_j \psi_{j+1} \right) (1 - 2\psi_j^\dagger \psi_j) \prod_{l=1}^{j-1} (1 - 2\psi_l^\dagger \psi_l)^2. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Risulta più semplice calcolare questi prodotti uno alla volta:

$$(1 - 2\psi_l^\dagger \psi_l)(1 - 2\psi_l^\dagger \psi_l) = 1 - 4\psi_l^\dagger \psi_l + 4(\psi_l^\dagger \psi_l)^2 = 1, \quad (2.15)$$

dove, nell'eseguire l'ultimo calcolo, è stata usata la proprietà $(\psi_l^\dagger \psi_l)^2 = \psi_l^\dagger \psi_l$.

Inoltre:

$$\begin{aligned} &\left(\psi_{j+1}^\dagger \psi_j^\dagger + \psi_{j+1} \psi_j - \psi_{j+1} \psi_j^\dagger - \psi_{j+1}^\dagger \psi_j \right) (1 - 2\psi_j^\dagger \psi_j) = \\ &= \psi_{j+1}^\dagger \psi_j^\dagger + \psi_{j+1} \psi_j - \psi_{j+1} \psi_j^\dagger - \psi_{j+1}^\dagger \psi_j + 2\psi_{j+1}^\dagger \psi_j \psi_j^\dagger \psi_j - 2\psi_{j+1} \psi_j \psi_j^\dagger \psi_j \\ &= \psi_{j+1}^\dagger \psi_j^\dagger - \psi_{j+1} \psi_j + \psi_{j+1}^\dagger \psi_j - \psi_{j+1} \psi_j^\dagger, \end{aligned} \quad (2.16)$$

dove, nei vari passaggi, è stata usata la proprietà degli operatori fermionici $\{\psi_i, \psi_j^\dagger\} = \delta_{ij}$ e il fatto che $\psi_j^2 = 0$ e $(\psi_j^\dagger)^2 = 0$.

Inserendo ora le (2.15) e (2.16) nella (2.14) si ottiene:

$$\sigma_j^y \sigma_{j+1}^y = \psi_{j+1}^\dagger \psi_j^\dagger - \psi_{j+1} \psi_j + \psi_{j+1}^\dagger \psi_j - \psi_{j+1} \psi_j^\dagger. \quad (2.17)$$

Inoltre, usando la (2.11):

$$\sum_{j=1}^N \sigma_j^z = \sum_{j=1}^N (1 - 2\psi_j^\dagger \psi_j) = N - 2 \sum_{j=1}^N \psi_j^\dagger \psi_j. \quad (2.18)$$

Quindi, inserendo le (2.17) e (2.18) nell'equazione (2.8), si ottiene:

$$H = - \sum_{j=1}^N \left(\psi_{j+1}^\dagger \psi_j^\dagger + \psi_j \psi_{j+1} + \psi_{j+1}^\dagger \psi_j + \psi_j^\dagger \psi_{j+1} \right) - hN + 2h \sum_{j=1}^N \psi_j^\dagger \psi_j. \quad (2.19)$$

È necessaria ora una precisazione: scrivendo la (2.19) in questo modo, si trascura il problema delle condizioni al contorno. Infatti bisognerebbe imporre delle condizioni al contorno periodiche o anti-periodiche per definire il significato di scritte come ψ_{j+1} quando $j = N$ ⁷. D'altra parte, questo problema è irrilevante nel momento in cui si studia il limite $N \rightarrow \infty$, dato che riguarda un solo termine di H (quindi nel limite termodinamico comporta una correzione trascurabile).

Il passaggio seguente da fare per diagonalizzare l'Hamiltoniana è quello di passare nello spazio dei momenti. Prima di fare ciò, però, è utile cambiare la notazione usata finora: d'ora in poi gli N atomi saranno etichettati con un indice j che va da $-n$ a n (invece che da 0 a N). Anche in questo caso, è evidente che tale operazione può essere fatta solo se si ha un numero *dispari* di atomi; d'altra parte, ancora una volta, il concetto di numero pari e dispari di particelle perde il suo significato nel limite termodinamico, e quindi il cambio di notazione diventa lecito.

Chiarito questo punto, si può passare allo spazio dei momenti (imponendo condizioni al contorno periodiche, cioè ponendo $\psi_{N+j} = \psi_j$)⁸:

$$\psi_j = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \sum_k e^{-ikj} \psi_k, \quad \psi_j^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \sum_k e^{ikj} \psi_k^\dagger, \quad (2.20)$$

con $k = 0, \pm \frac{2\pi}{2n+1}, \pm \frac{4\pi}{2n+1}, \dots, \pm \frac{2n\pi}{2n+1}$.

Per semplicità di notazione, da qui in poi si userà k per intendere $\frac{2m\pi}{2n+1}$ con m intero (incluso tra 0 e n), e $\sum_k f_k$ per intendere $\sum_{j=0}^n f_{\frac{2j\pi}{2n+1}}$.

Il metodo più semplice per trasformare la (2.19) consiste nel prenderne un termine alla volta. Quindi:

$$\begin{aligned} \sum_{j=-n}^n \psi_{j+1}^\dagger \psi_j &= \sum_{j=-n}^n \frac{1}{2n+1} \sum_k e^{ik(j+1)} \psi_k^\dagger \sum_q e^{-iqj} \psi_q \\ &= \sum_{k,q} \psi_k^\dagger \psi_q e^{ik} \left(\frac{1}{2n+1} \sum_{j=-n}^n e^{i(k-q)j} \right) = \sum_k \psi_k^\dagger \psi_k e^{ik} \\ &= \sum_{k>0} \left(e^{ik} \psi_k^\dagger \psi_k + e^{-ik} \psi_{-k}^\dagger \psi_{-k} \right) + \psi_0^\dagger \psi_0, \end{aligned}$$

dove è stato usato il fatto che $\frac{1}{2n+1} \sum_{j=-n}^n e^{i(k-q)j} = \delta_{kq}$ (con $k = \frac{2\pi a}{2n+1}$ e

⁷ tale discussione viene fatta in modo dettagliato e preciso da F. Franchini in [14].

⁸ anche in questo caso, se si impongono condizioni anti-periodiche, cioè $\psi_{N+j} = -\psi_j$, la differenza che si ottiene è trascurabile nel limite termodinamico

$q = \frac{2\pi b}{2n+1}$ e $a, b \in \mathbb{N}$)⁹.

$$\begin{aligned} \sum_{j=-n}^n \psi_j^\dagger \psi_{j+1} &= \left(\sum_{j=-n}^n \psi_{j+1}^\dagger \psi_j \right)^\dagger = \left[\sum_{k>0} \left(e^{ik} \psi_k^\dagger \psi_k + e^{-ik} \psi_{-k}^\dagger \psi_{-k} \right) + \psi_0^\dagger \psi_0 \right]^\dagger \\ &= \sum_{k>0} \left(e^{-ik} \psi_k^\dagger \psi_k + e^{ik} \psi_{-k}^\dagger \psi_{-k} \right) + \psi_0^\dagger \psi_0 . \end{aligned}$$

Usando questi due risultati insieme, si ottiene:

$$\sum_{j=1}^N \left(\psi_{j+1}^\dagger \psi_j + \psi_j^\dagger \psi_{j+1} \right) = 2 \left[\sum_{k>0} \cos k \left(\psi_k^\dagger \psi_k + \psi_{-k}^\dagger \psi_{-k} \right) + \psi_0^\dagger \psi_0 \right] . \quad (2.21)$$

Proseguendo con gli altri termini della (2.19), si ha:

$$\begin{aligned} \sum_{j=-n}^n \psi_{j+1}^\dagger \psi_j^\dagger &= \frac{1}{2n+1} \sum_{j=-n}^n \sum_{k,q} e^{i(k+q)j} e^{ik} \psi_k^\dagger \psi_q^\dagger \\ &= \sum_{k,q} e^{ik} \psi_k^\dagger \psi_q^\dagger \delta_{-k,q} = \sum_k e^{ik} \psi_k^\dagger \psi_{-k}^\dagger \\ &= \sum_{k>0} \left(e^{ik} \psi_k^\dagger \psi_{-k}^\dagger + e^{-ik} \psi_{-k}^\dagger \psi_k^\dagger \right) = \sum_{k>0} 2i \sin k \psi_k^\dagger \psi_{-k}^\dagger , \end{aligned}$$

dove la $\delta_{-k,q}$ si ottiene come sopra e, nell'ultimo passaggio, è stata usata la proprietà $\left\{ \psi_k^\dagger, \psi_{-k}^\dagger \right\} = 0$.

$$\sum_{j=-n}^n \psi_j \psi_{j+1} = \left[\sum_{j=-n}^n \psi_{j+1}^\dagger \psi_j^\dagger \right]^\dagger = \sum_{k>0} 2i \sin k \psi_{-k} \psi_k = \sum_{k>0} 2i \sin k \psi_k \psi_{-k} .$$

⁹per dimostrare questa uguaglianza, si può procedere nel seguente modo: siano $a, b \in \mathbb{N}$; allora:

$$\frac{1}{2n+1} \sum_{j=-n}^n e^{i(a-b)\frac{2\pi}{2n+1}j} = \frac{1}{2n+1} \sum_{j=-n}^n \left[\cos \left((a-b)\frac{2\pi}{2n+1}j \right) + i \sin \left((a-b)\frac{2\pi}{2n+1}j \right) \right] .$$

Ora, $\sum_{j=-n}^n \sin \left((a-b)\frac{2\pi}{2n+1}j \right) = 0$ poichè il seno è una funzione dispari; si osservi allora il termine $\frac{1}{2n+1} \sum_{j=-n}^n \cos \left((a-b)\frac{2\pi}{2n+1}j \right)$: fare questa somma equivale a dividere la circonferenza goniometrica in $2n+1$ parti uguali e sommare le proiezioni sull'asse delle ascisse dei punti che vi ottengo. Ciò equivale a trovare la posizione (lungo le ascisse) del baricentro del poligono regolare con $2n+1$ lati iscritto nella circonferenza goniometrica. Tale posizione deve essere invariante per rotazioni degli assi che lasciano invariato il poligono e quindi non può che essere all'origine degli assi. Quindi si intuisce che il risultato deve essere proprio $(2n+1)\delta_{ab}$ che, moltiplicato per il $1/(2n+1)$ che resta, conclude la dimostrazione. Comunque, nel limite $n \rightarrow \infty$ si può dimostrare facilmente la validità di questo ultimo passaggio:

$$\frac{1}{2n+1} \sum_{j=-n}^n \cos \left((a-b)\frac{2\pi}{2n+1}j \right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx \cos [x(a-b)]$$

che fa chiaramente 1 se $a = b$; se invece $a \neq b$, l'integrale è nullo: ciò si può vedere sostituendo la variabile di integrazione $y = x(a-b)$ e osservando che a questo punto resta da integrare la funzione $\cos y$ su un numero intero di intervalli di lunghezza 2π .

Quindi vale:

$$\sum_{j=-n}^n \left(\psi_{j+1}^\dagger \psi_j^\dagger + \psi_j \psi_{j+1} \right) = 2i \sum_{k>0} \sin k \left(\psi_k^\dagger \psi_{-k}^\dagger + \psi_k \psi_{-k} \right). \quad (2.22)$$

Ora resta solo l'ultimo termine:

$$\begin{aligned} \sum_{j=-n}^n \psi_j^\dagger \psi_j &= \frac{1}{2n+1} \sum_{k,q} \psi_k^\dagger \psi_q \sum_{j=-n}^n e^{i(q-k)j} = \sum_k \psi_k^\dagger \psi_k \\ &= \sum_{k>0} \left(\psi_k^\dagger \psi_k + \psi_{-k}^\dagger \psi_{-k} \right) + \psi_0^\dagger \psi_0. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Usando le equazioni (2.21), (2.22) e (2.23) nella (2.19), si ottiene in conclusione:

$$\begin{aligned} H &= -2 \sum_{k>0} (\cos k - h) \left(\psi_k^\dagger \psi_k + \psi_{-k}^\dagger \psi_{-k} \right) + \\ &\quad - 2i \sum_{k>0} \sin k \left(\psi_k^\dagger \psi_{-k}^\dagger + \psi_k \psi_{-k} \right) - hN + \\ &\quad - 2(1-h) \psi_0^\dagger \psi_0. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Trasformazione di Bogoliubov

L'ultimo passo che resta da fare consiste nel riscrivere l'Hamiltoniana (2.24) in termini di nuovi operatori fermionici, che permettono di eliminare il termine $\left(\psi_k^\dagger \psi_{-k}^\dagger + \psi_k \psi_{-k} \right)$. In questo modo l'Hamiltoniana sarà in forma diagonale. Si usa allora la trasformazione di Bogoliubov, che combina in modo non banale gli operatori di creazione e di distruzione fermionici:

$$\begin{aligned} \gamma_k &:= U_k \psi_k + iV_k \psi_{-k}^\dagger, & \gamma_{-k} &:= U_k \psi_{-k} - iV_k \psi_k^\dagger, \\ \gamma_k^\dagger &:= U_k \psi_k^\dagger - iV_k \psi_{-k}, & \gamma_{-k}^\dagger &:= U_k \psi_{-k}^\dagger + iV_k \psi_k, \end{aligned} \quad (2.25)$$

con $U_k, V_k \in \mathbb{R}$. Affinchè γ_k e γ_k^\dagger siano operatori fermionici anche nella nuova base, deve valere $\{\gamma_k, \gamma_p^\dagger\} = \delta_{kp}$ e $\{\gamma_k, \gamma_p\} = \{\gamma_k^\dagger, \gamma_p^\dagger\} = 0$. Si calcola subito (usando le proprietà degli anti-commutatori) che le seconde uguaglianze sono sempre soddisfatte (per $U_k, V_k \in \mathbb{R}$). Dalla prima uguaglianza, invece, si ottiene che U_k e V_k soddisfano la relazione $U_k^2 + V_k^2 = 1$ e possono quindi essere parametrizzati come:

$$U_k = \cos \theta_k, \quad V_k = \sin \theta_k. \quad (2.26)$$

Invertendo le (2.25) si ottiene:

$$\begin{aligned} \psi_k &= U_k \gamma_k - iV_k \gamma_{-k}^\dagger, & \psi_{-k} &= U_k \gamma_{-k} + iV_k \gamma_k^\dagger, \\ \psi_k^\dagger &= U_k \gamma_k^\dagger + iV_k \gamma_{-k}, & \psi_{-k}^\dagger &= U_k \gamma_{-k}^\dagger - iV_k \gamma_k. \end{aligned}$$

Ora, ancora una volta, si devono fare queste sostituzioni nell'Hamiltoniana. È di nuovo conveniente considerare un termine della (2.24) alla volta, quindi:

$$\begin{aligned}\psi_k^\dagger \psi_k &= \left(U_k \gamma_k^\dagger + i V_k \gamma_{-k} \right) \left(U_k \gamma_k - i V_k \gamma_{-k}^\dagger \right) \\ &= U_k^2 \gamma_k^\dagger \gamma_k - i U_k V_k \gamma_k^\dagger \gamma_{-k}^\dagger + i U_k V_k \gamma_{-k} \gamma_k + V_k^2 \gamma_{-k} \gamma_{-k}^\dagger \\ &= U_k^2 \gamma_k^\dagger \gamma_k - i U_k V_k \left(\gamma_k^\dagger \gamma_{-k}^\dagger + \gamma_k \gamma_{-k} \right) - V_k^2 \gamma_{-k}^\dagger \gamma_{-k} + V_k^2 ,\end{aligned}\quad (2.27)$$

$$\begin{aligned}\psi_{-k}^\dagger \psi_{-k} &= \left(U_k \gamma_{-k}^\dagger - i V_k \gamma_k \right) \left(U_k \gamma_{-k} + i V_k \gamma_k^\dagger \right) \\ &= U_k^2 \gamma_{-k}^\dagger \gamma_{-k} - i U_k V_k \gamma_k \gamma_{-k} + i U_k V_k \gamma_{-k}^\dagger \gamma_k^\dagger + V_k^2 \gamma_k \gamma_k^\dagger \\ &= U_k^2 \gamma_{-k}^\dagger \gamma_{-k} - i U_k V_k \left(\gamma_k^\dagger \gamma_{-k}^\dagger + \gamma_k \gamma_{-k} \right) - V_k^2 \gamma_k^\dagger \gamma_k + V_k^2 ,\end{aligned}\quad (2.28)$$

$$\begin{aligned}\psi_k^\dagger \psi_{-k}^\dagger &= \left(U_k \gamma_k^\dagger + i V_k \gamma_{-k} \right) \left(U_k \gamma_{-k}^\dagger - i V_k \gamma_k \right) \\ &= U_k^2 \gamma_k^\dagger \gamma_{-k}^\dagger - i U_k V_k \gamma_k^\dagger \gamma_k + i U_k V_k \gamma_{-k} \gamma_{-k}^\dagger + V_k^2 \gamma_{-k} \gamma_k \\ &= U_k^2 \gamma_k^\dagger \gamma_{-k}^\dagger - i U_k V_k \left(\gamma_k^\dagger \gamma_k + \gamma_{-k}^\dagger \gamma_{-k} \right) - V_k^2 \gamma_k \gamma_{-k} + i U_k V_k ,\end{aligned}\quad (2.29)$$

$$\begin{aligned}\psi_k \psi_{-k} &= \left(U_k \gamma_k - i V_k \gamma_{-k}^\dagger \right) \left(U_k \gamma_{-k} + i V_k \gamma_k^\dagger \right) \\ &= U_k^2 \gamma_k \gamma_{-k} + i U_k V_k \gamma_k \gamma_k^\dagger - i U_k V_k \gamma_{-k}^\dagger \gamma_{-k} + V_k^2 \gamma_{-k}^\dagger \gamma_k^\dagger \\ &= U_k^2 \gamma_k \gamma_{-k} - i U_k V_k \left(\gamma_k^\dagger \gamma_k + \gamma_{-k}^\dagger \gamma_{-k} \right) - V_k^2 \gamma_k^\dagger \gamma_{-k}^\dagger + i U_k V_k .\end{aligned}\quad (2.30)$$

Inserendo ora le equazioni dalla (2.27) alla (2.30) nell'Hamiltoniana (2.24), si ottiene:

$$\begin{aligned}H &= - \sum_{k>0} \left[\left(2 (\cos k - h) (U_k^2 - V_k^2) + 4 \sin k U_k V_k \right) \left(\gamma_k^\dagger \gamma_k + \gamma_{-k}^\dagger \gamma_{-k} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left(4i (h - \cos k) U_k V_k + 2i \sin k (U_k^2 - V_k^2) \right) \left(\gamma_k^\dagger \gamma_{-k}^\dagger + \gamma_k \gamma_{-k} \right) \right] + \\ &\quad - 2 \sum_{k>0} \left[2 (\cos k - h) V_k^2 - 2 \sin k U_k V_k \right] - h(2n + 1) + \\ &\quad - 2 (1 - h) (U_0^2 - V_0^2) \gamma_0^\dagger \gamma_0 - 2V_0^2 (1 - h) .\end{aligned}\quad (2.31)$$

A questo punto, si utilizza il fatto che U_k e V_k sono definiti a meno di una condizione, per annullare il termine proporzionale a $\gamma_k^\dagger \gamma_{-k}^\dagger + \gamma_k \gamma_{-k}$. Per prima cosa, dalle (2.26) si ottiene

$$2U_k V_k = \sin 2\theta_k , \quad U_k^2 - V_k^2 = \cos 2\theta_k , \quad (2.32)$$

e quindi la condizione da imporre è:

$$2i (h - \cos k) \sin 2\theta_k + 2i \sin k \cos 2\theta_k = 0 ,$$

ovvero

$$\tan 2\theta_k = - \frac{\sin k}{h - \cos k} .$$

Da questa equazione si ottiene, con semplici passaggi¹⁰:

$$\sin 2\theta_k = \frac{-\sin k}{\sqrt{h^2 - 2h \cos k + 1}}, \quad \cos 2\theta_k = \frac{h - \cos k}{\sqrt{h^2 - 2h \cos k + 1}}. \quad (2.33)$$

Prima di sostituire le (2.33) nella (2.31), si definisce

$$\xi_k := 2\sqrt{h^2 - 2h \cos k + 1}.$$

Usando ora le (2.32) e le (2.33), si ottiene:

$$\begin{aligned} -2(1-h)(U_0^2 - V_0^2)\gamma_0^\dagger\gamma_0 &= -2(1-h)\cos 2\theta_0\gamma_0^\dagger\gamma_0 \\ &= -2(1-h)\frac{h-1}{\sqrt{(h-1)^2}}\gamma_0^\dagger\gamma_0 = 2|h-1|\gamma_0^\dagger\gamma_0 \\ &= \xi_0\gamma_0^\dagger\gamma_0, \end{aligned}$$

che, inserita nella (2.31) insieme alle (2.32) e alle (2.33), porta all'equazione:

$$H = \sum_k \xi_k \gamma_k^\dagger \gamma_k + \text{const}, \quad (2.34)$$

dove *const* sta ad indicare la parte non operatoriale della Hamiltoniana (2.31). Ciò che resta da fare è proprio analizzare questi termini. In particolare, si può procedere nel seguente modo: per prima cosa, si osserva che dalle (2.32) si ottiene

$$V_k^2 = \frac{1}{2} - \frac{\cos 2\theta_k}{2}.$$

Ponendo ora $f(k) := h^2 - 2h \cos k + 1$, si può riscrivere il termine *const* di H seguendo questi passaggi:

$$\begin{aligned} &-2 \sum_{k>0} [2(\cos k - h)V_k^2 - 2\sin k U_k V_k] - 2V_0^2(1-h) - h(2n+1) \\ &= -2 \left\{ \sum_{k>0} \left[\cos k - h - \frac{(\cos k - h)(h - \cos k)}{\sqrt{f(k)}} + \frac{\sin^2 k}{\sqrt{f(k)}} \right] + \right. \\ &\quad \left. + V_0^2(1-h) \right\} - h(2n+1) = \\ &= -2 \sum_{k>0} \frac{h^2 - 2h \cos k + \cos^2 k + \sin^2 k}{\sqrt{f(k)}} - 2 \left(\frac{1-h}{2} + \right. \\ &\quad \left. - \frac{(1-h)(h-1)}{2\sqrt{f(k)}} \right) - \left[\sum_{k>0} 2 \cos k - 2 \sum_{k>0} h + (2n+1)h \right] \\ &= -2 \sum_{k>0} \sqrt{f(k)} - 1 + h - 2 \frac{1}{2} \sqrt{f(0)} - \sum_{k>0} 2 \cos k + \\ &\quad + n 2h - n 2h - h \\ &= - \sum_{k>0} \xi_k - \frac{1}{2} \xi_0 - \left(1 + 2 \sum_{k>0} \cos k \right). \end{aligned}$$

¹⁰In generale, se si ha $\frac{a}{b} = \tan \alpha := \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, si ottiene che deve essere $\sin \alpha = a/x$ e $\cos \alpha = b/x$; usando ora la condizione $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ si ottiene $\frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{x^2} = 1$, cioè $x = \sqrt{a^2 + b^2}$

Usando inoltre il fatto che $\sum_{k>0} h_k = 1/2(\sum_k h_k - h_0)$ se $h_k = h_{-k}$ (cosa che, in questo caso, vale sia per $h_k = \cos k$, sia per $h_k = \xi_k$) e il fatto che $\sum_k \cos k = 0$ (come discusso nella nota a piè di pagina 28), si ottiene:

$$\text{const} = -\frac{1}{2} \sum_k \xi_k .$$

E quindi, infine, si può scrivere l'Hamiltoniana in forma diagonale:

$$H = \sum_k \xi_k \left(\gamma_k^\dagger \gamma_k - \frac{1}{2} \right) . \quad (2.35)$$

Spettro Energetico e Transizione di Fase

Ottenuta la (2.35), si può ottenere suo spettro energetico.

Come prima cosa, si osservi che i fermioni liberi senza spin descritti dalla (2.35) sono pseudo-particelle, cioè una semplice schematizzazione del problema (di spin- $\frac{1}{2}$ in un campo magnetico) sotto forma di particelle fittizie con particolari proprietà. Come già discusso, la proprietà peculiare dei fermioni è il fatto che essi obbediscono al principio di Pauli. Come conseguenza di ciò e del fatto che i fermioni sono *spinless*, si ha che si può avere un solo fermione per ogni valore di k consentito (come illustrato nella figura 2.3).

Si osserva senza difficoltà che, per la sua definizione, $\xi_k > 0 \quad \forall k$, quindi i livelli energetici si riempiranno attraverso la creazione di fermioni con il valore k' tale che $\xi_{k'}$ è il minore possibile tra gli ξ_k con i k permessi (non ancora occupati). Ciò significa che se $|0\rangle$ è il ground state del sistema, il primo stato eccitato sarà (considerando che ξ_0 è evidentemente il minore possibile tra gli ξ_k) $\gamma_0^\dagger |0\rangle$, dopodichè il livello seguente sarà $\gamma_q^\dagger \gamma_0^\dagger |0\rangle$ con $q \neq 0$ e tale che ξ_q sia il minore possibile, e così via.

Chiaramente, il ground state è quello con nessun fermione presente, quindi la sua energia è:

$$E_{GS} = -\frac{1}{2} \sum_k \xi_k = -\sum_k \sqrt{h^2 - 2h \cos k + 1}$$

La differenza di energia con il primo livello eccitato è: $2|h - 1|$. Come si vede, questa differenza è nulla per $h = 1$, che quindi è il punto in cui avviene la transizione di fase quantistica.

Dunque per $h > 1$ il sistema è nella fase paramagnetica, mentre per $h < 1$ è in quella ferromagnetica.

Infine si osservi che, come nel caso della transizione di fase quantistica nel modello di Dicke (sezione 1.3.1), questa transizione di fase è del secondo ordine: infatti l'energia del ground state in funzione di h presenta una discontinuità nella derivata seconda (come si vede nella figura 2.4).

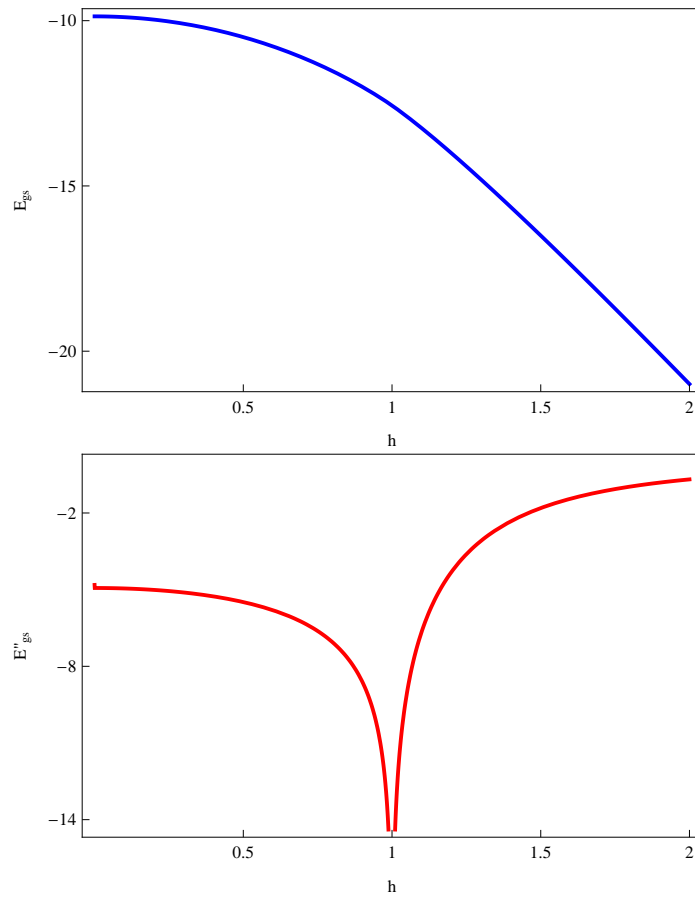


Figura 2.4: energia dello stato fondamentale (in blu) e sua derivata seconda (in rosso) nel caso $T = 0$ al variare del coefficiente h . Si osservi come, nel punto di transizione di fase, cioè per $h = 1$, la derivata seconda abbia una discontinuità (di seconda specie).

Capitolo 3

Interazione Atomica nel Modello di Dicke

3.1 Generalizzare il Modello di Dicke

Il modello di Dicke studiato nel capitolo 1 non considera l'interazione tra i singoli atomi nella cavità. Sebbene ciò sia giustificato, come già detto, per sistemi in cui gli atomi sono molto lontani tra loro (rispetto alla loro dimensione) ed a bassissime temperature, nei sistemi effettivamente disponibili in laboratorio, questa ipotesi non è sempre ben soddisfatta. Anzi, in alcuni casi il setup sperimentale è scelto in modo tale da studiare proprio l'effetto di una interazione di questo tipo [8].

Lo scopo di questo capitolo sarà quello di generalizzare l'Hamiltoniana di Dicke tenendo conto anche dell'interazione tra gli atomi grazie ad un termine di interazione (unidimensionale, a primi vicini) che sia tale da permettere comunque di risolvere "esattamente" (ovvero senza ricorrere a simulazioni numeriche) il modello.

L'Hamiltoniana che verrà considerata è quella introdotta da C. F. Lee e N. F. Jonhson in [15].

3.2 La nuova Hamiltoniana

Se si tengono in considerazione anche le interazioni tra le coppie di primi vicini degli N atomi nella cavità, l'Hamiltoniana (1.2) diventa:

$$\begin{aligned} H &= a^\dagger a + \sum_{j=1}^N \left[\frac{\lambda}{2\sqrt{N}} (a + a^\dagger) (\sigma_j^+ + \sigma_j^-) + \frac{\epsilon}{2} \sigma_j^z - J \sigma_j^y \sigma_{j+1}^y \right] \\ &= a^\dagger a + \sum_{j=1}^N \left[\frac{\lambda}{2\sqrt{N}} (a + a^\dagger) \sigma_j^x + \frac{\epsilon}{2} \sigma_j^z - J \sigma_j^y \sigma_{j+1}^y \right], \end{aligned} \quad (3.1)$$

dove J è il coefficiente di accoppiamento degli atomi.

Come si vede, alcuni termini dell'Hamiltoniana che verrà discussa sono già stati analizzati nel capitolo sul modello di Dicke standard. L'altro, invece, è

proprio dell'interazione tra spin del modello di Ising (quantistico unidimensionale).

3.3 Diagonalizzazione dell'Hamiltoniana

L'obiettivo di questo capitolo è quello di scrivere l'Hamiltoniana (3.1) in forma diagonale. Per raggiungere questo risultato, si utilizzano simultaneamente le due strategie descritte nei capitoli 1 e 2.

Si osservi che lo scopo della diagonalizzazione dell'Hamiltoniana è quello di poter poi, come fatto nel capitolo sul modello di Dicke classico, calcolare la funzione di partizione del sistema. Quindi l'Hamiltoniana da diagonalizzare è quella di cui si vuole calcolare la traccia su tutti gli stati del sistema (o meglio, si vuole calcolare la traccia di $e^{-\beta H}$). Allora, come è stato fatto per il modello di Dicke standard nella sezione (1.2), il primo passo è quello di usare la base degli stati coerenti per descrivere il campo elettromagnetico. Ciò, nell'Hamiltoniana (3.1), corrisponde al sostituire ad a e a^\dagger i loro autovalori, α e α^* . Così si ottiene¹:

$$H = |\alpha|^2 + \sum_{j=1}^N \left[\frac{\lambda \operatorname{Re}(\alpha)}{\sqrt{N}} \sigma_j^x + \frac{\epsilon}{2} \sigma_j^z - J \sigma_j^y \sigma_{j+1}^y \right]. \quad (3.2)$$

Poichè $|\alpha|^2$ non è un operatore (ma semplicemente un numero), si deve diagonalizzare la parte restante di H , che verrà chiamata H' .

Il secondo passaggio da fare è differente da quanto visto finora: esso consiste nel fare una rotazione con asse lungo l'asse y nello spazio degli spin. Lo scopo di questa rotazione è di portare l'Hamiltoniana H' in una forma simile alla (2.8). Quindi si deve, con la rotazione, rendere nullo il coefficiente di σ^x , in modo da avere solo l'operatore σ^z . Si osserva allora che, in generale,

$$a\sigma_j^x + b\sigma_j^z = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$$

e si vuole effettuare una trasformazione implementata dall'operatore U tale che:

$$U \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} U^\dagger = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda \sigma^z.$$

Quindi $\pm\lambda$ sono gli autovalori della matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ e l'operatore U è quello che la diagonalizza. Dunque:

$$\lambda = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

¹questa sostituzione non può essere fatta con tanta leggerezza da un punto di vista formale. Infatti è giustificata solo alla luce dell'osservazione precedente, ovvero solo se si sta integrando l'Hamiltoniana in $d^2\alpha$. Comunque, come verrà motivato in seguito con i dovuti calcoli, questo è l' α che, dopo aver usato il metodo di punto sella, caratterizzerà la funzione di partizione del sistema. Questo α è quello rilevante in quanto la funzione di partizione a $T \rightarrow 0$ è legata all'energia del GS, infatti:

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} Z = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \operatorname{Tr}(e^{-\beta H}) = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \sum_n e^{-\beta E_n} \approx \lim_{\beta \rightarrow \infty} e^{-\beta E_{GS}}$$

e l'energia del GS è, come già detto, cruciale per lo studio delle transizioni di fase quantistiche del sistema.

Applicando questi passaggi all'Hamiltoniana (3.2) si ottiene²:

$$H' = \sum_{j=1}^N \left[\sqrt{\left(\frac{\lambda \operatorname{Re}(\alpha)}{\sqrt{N}} \right)^2 + \left(\frac{\epsilon}{2} \right)^2} \sigma_j^z - J \sigma_j^y \sigma_{j+1}^y \right]. \quad (3.3)$$

A questo punto si può procedere con la trasformazione di Jordan–Wigner. I passaggi da seguire ed i calcoli da fare sono identici a quelli eseguiti per diagonalizzare l'Hamiltoniana del modello di Ising unidimensionale, nella sezione (2.2.4). Il risultato che si ottiene è quindi:

$$H' = -J \sum_{j=1}^N \left(\psi_{j+1}^\dagger \psi_j^\dagger + \psi_j \psi_{j+1} + \psi_{j+1}^\dagger \psi_j + \psi_j^\dagger \psi_{j+1} \right) + \\ -g(\alpha)N + 2g(\alpha) \sum_{j=1}^N \psi_j^\dagger \psi_j,$$

avendo definito

$$g(\alpha) = \sqrt{\left(\frac{\lambda \operatorname{Re}(\alpha)}{\sqrt{N}} \right)^2 + \left(\frac{\epsilon}{2} \right)^2}.$$

Sempre seguendo il procedimento usato nella sezione (2.2.4) (semplicemente sostituendo h con $g(\alpha)$ e non dimenticando la costante J), si passa allo spazio dei momenti e si ottiene:

$$H' = -2 \sum_{k>0} (J \cos k - g(\alpha)) \left(\psi_k^\dagger \psi_k + \psi_{-k}^\dagger \psi_{-k} \right) + \\ -2iJ \sum_{k>0} \sin k \left(\psi_k^\dagger \psi_{-k}^\dagger + \psi_k \psi_{-k} \right) - g(\alpha)N + \\ -2(J - g(\alpha)) \psi_0^\dagger \psi_0.$$

Facendo infine la trasformazione di Bogoliubov si giunge all'Hamiltoniana in forma diagonale (risommando $|\alpha|^2$ ad H' , secondo la (3.2)):

$$H = |\alpha|^2 + \sum_k \xi_k(\alpha) \left(\gamma_k^\dagger \gamma_k - \frac{1}{2} \right), \quad (3.4)$$

con

$$\xi_k(\alpha) := 2\sqrt{(g(\alpha))^2 - 2Jg(\alpha) \cos k + J^2}.$$

3.4 Transizioni di Fase

L'obiettivo di questa sezione è quello di disegnare il diagramma di fase del sistema avente la (3.4) per Hamiltoniana. In particolare verranno studiate le

²si può vedere, calcolando esplicitamente la matrice che implementa la rotazione, che essa commuta con σ^y e quindi l'ultimo termine di H' non viene modificato. C'è anche un modo più semplice per capire questa cosa: infatti si sta ruotando attorno all'asse y ed è ovvio che la matrice σ^y , che è il generatore delle rotazioni attorno all'asse y , non viene modificata da questa trasformazione (o, equivalentemente, commuta con l'operatore che la implementa).

transizioni di fase *quantistiche* del sistema, cioè quelle che si osservano a $T \rightarrow 0$, come discusso nella sezione 2.2.2.

Il primo passaggio da fare, quindi, è quello di calcolare la funzione di partizione del sistema.

3.4.1 Funzione di Partizione

Proprio come nel capitolo riguardante il modello di Dicke nella sua formulazione originale, la funzione di partizione del sistema si calcola come:

$$Z(N, T) = \sum_{s_1 \cdots s_N} \int \frac{d^2\alpha}{\pi} \langle s_1 \cdots s_N | \langle \alpha | e^{-\beta H} | \alpha \rangle | s_1 \cdots s_N \rangle ,$$

dove i significati dei vari simboli sono quelli usati in precedenza e la $\sum_{s_1 \cdots s_N}$ è intesa su tutti i possibili stati di spin di tutte le particelle.

Si ottiene quindi con passaggi molto simili a quelli della sezione (1.2):

$$Z(N, T) = \int \frac{d^2\alpha}{\pi} e^{-\beta|\alpha|^2} \sum_{s_1 \cdots s_N} \langle s_1 \cdots s_N | e^{-\beta H'} | s_1 \cdots s_N \rangle , \quad (3.5)$$

essendo H' definita come sopra, per ora ancora nella forma della relativa al problema di particelle di spin $-\frac{1}{2}$, prima della trasformazione di Jordan–Wigner: si osservi infatti che la somma è ancora sugli stati di spin.

Usando ora la (3.4) nell'equazione appena ottenuta, si ha:

$$Z(N, T) = \int \frac{d^2\alpha}{\pi} e^{-\beta|\alpha|^2 - \sum_k \xi_k(\alpha)/2} \left[\prod_k \left(1 + e^{-\beta \xi_k(\alpha)} \right) \right]. \quad (3.6)$$

Per arrivare a questa scrittura si fanno i seguenti passaggi: si raccoglie fuori dalla somma sugli stati (che ora, avendo usato la (3.4), diventa su tutti gli stati pieni o vuoti delle pseudo-particelle create da γ_k^\dagger) il termine costante $-\sum_k \xi_k(\alpha)/2$; si scrive la sommatoria della (3.4) come una produttoria davanti all'esponenziale; si scambia l'ordine di quest'ultima con la somma sugli stati (facendo questo passaggio la somma diventa sui due soli stati che si possono avere con k fissato: quello per cui $\gamma_k^\dagger \gamma_k |s_1\rangle = 0$ e quello per cui $\gamma_k^\dagger \gamma_k |s_2\rangle = |s_2\rangle$); si calcola tale somma e si ottiene la (3.6).

Si osservi ora che, per la sua definizione, $\xi_k(\alpha) = \xi_k(\text{Re}(\alpha))$ e quindi l'unica dipendenza della funzione integranda nella (3.6) da $\text{Im}(\alpha)$ è nel termine $e^{-\beta|\alpha|^2}$. Quindi risolvendo un integrale gaussiano e ponendo $w := \text{Re}(\alpha)$ si ottiene:

$$Z(N, T) = \frac{1}{\sqrt{\beta\pi}} \int dw e^{-\beta[w^2 - \sum_k \xi_k(w)/2]} \left[\prod_k \left(1 + e^{-\beta \xi_k(w)} \right) \right]. \quad (3.7)$$

Per poter scrivere la funzione di partizione in una forma più semplice, si osservi che valgono le seguenti uguaglianze:

$$\begin{aligned}
 \prod_k \left(1 + e^{-\beta \xi_k(w)}\right) &= \\
 &= \prod_k e^{-\frac{\beta}{2} \xi_k(w)} \left(e^{\frac{\beta}{2} \xi_k(w)} + e^{-\frac{\beta}{2} \xi_k(w)}\right) \\
 &= \prod_k 2e^{-\frac{\beta}{2} \xi_k(w)} \cosh\left(\frac{\beta}{2} \xi_k(w)\right) \\
 &= \exp\left\{\sum_k \left[\log \cosh\left(\frac{\beta}{2} \xi_k(w)\right) - \frac{\beta}{2} \xi_k(w) + \log 2\right]\right\}.
 \end{aligned}$$

A questo punto si definisce $x := w/\sqrt{N}$ e si nota che, per grandi N , vale $\sum_k = \frac{N}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dk$ ³. Quindi l'equazione (3.7) diventa:

$$Z(N, T) = \sqrt{\frac{N}{\beta\pi}} \int dx \left[e^{-\beta x^2 + I(x)}\right]^N, \quad (3.8)$$

con

$$I(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dk \left\{ \log \left[\cosh\left(\frac{\beta}{2} \xi_k(x)\right) \right] + \log(2) \right\}. \quad (3.9)$$

3.4.2 Diagramma di Fase

È necessario, prima di procedere, fare una precisazione riguardante le transizioni di fase quantistiche. Come detto nel capitolo che le riguarda, l'unico modo formalmente corretto per individuare una transizione di questo tipo è quello di studiare l'energia dello stato fondamentale del sistema in funzione dei parametri, come fatto nel caso del modello di Ising.

D'altra parte, in realtà, una transizione di fase presente a $T \rightarrow 0$ non può che essere di tipo quantistico. Infatti, come già detto, per temperature (quasi) nulle non esistono più le fluttuazioni termiche che inducono le transizioni di fase ordinarie.

In virtù di questo ragionamento la transizione di fase osservata nel modello di Dicke standard nella sezione (1.3.1) è una transizione di fase quantistica, e quelle che verranno studiate ora lo sono allo stesso modo.

Sia quindi $T \rightarrow 0$. Non è difficile vedere che la (3.9) può essere scritta in modo molto più semplice, ovvero:

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} I(x) = \frac{\beta}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dk \xi_k(x).$$

³per come è definito l'intervallo in cui varia k (nel capitolo precedente), si ottiene (passaggi validi nel limite $n \rightarrow \infty$):

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=-n}^n f\left(\frac{2\pi j}{2n+1}\right) &= (2n+1) \frac{1}{2n+1} \sum_j f\left(\frac{2\pi j}{2n+1}\right) = (2n+1) \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dx f(2\pi x) \\
 &= \frac{2n+1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dk f(k).
 \end{aligned}$$

Questo integrale, con le dovute sostituzioni, può poi essere riscritto in termini di un integrale ellittico completo di seconda specie⁴ (che ogni software di calcolo numerico può calcolare con precisione arbitraria), ma l'espressione che si ottiene non è particolarmente significativa e non verrà riportata.

Considerano che il sistema preso in considerazione è ottenuto partendo dal modello di Dicke, a cui si aggiunge l'interazione unidimensionale tra gli spin studiata nel modello di Ising, è lecito aspettarsi che al variare dei parametri il sistema possa essere in una combinazione qualsiasi (per lo meno a priori) delle seguenti 4 fasi: radianza normale e superradianza (dal modello di Dicke) e paramagnetismo e ferromagnetismo (dal modello di Ising unidimensionale).

Per studiare la transizione di fase propria del modello di Dicke, si deve analizzare la funzione di partizione. Si consideri allora la (3.8). Nel caso $T \rightarrow 0$ si ottiene, utilizzando il metodo del punto sella:

$$Z(N, T) \propto \max_{-\infty \leq x \leq \infty} \exp \left\{ \beta N \left[-x^2 + \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dk \xi_k(x) \right] \right\}. \quad (3.10)$$

Si può vedere, esattamente come fatto nel capitolo sul modello di Dicke, che il sistema ha comportamento superradiante se la funzione di partizione ha massimo in $x \neq 0$, mentre è il suo comportamento è di radianza normale se il massimo della funzione è in $x = 0$.

Per quanto riguarda la transizione di fase nel modello di Ising, si osservi l'Hamiltoniana (3.3): confrontandola con la (2.8), si intuisce che il sistema avrà comportamento paramagnetico se $g(x) > J$ e ferromagnetico se $g(x) < J$ (cosa che, volendo, si può dimostrare formalmente ponendo $h := g(\alpha)/J$, misurando H in unità di J e procedendo dalla (3.3) esattamente come fatto per la (2.8)), dove $g(x)$ è da calcolarsi per il valore di x che massimizza la funzione di partizione (come si capisce dalla nota a piè di pagina 35).

È arrivato il momento di osservare il diagramma di fase (figura 3.1) che risulta dai calcoli (numerici) che si devono fare su $Z(N, T)$ alla luce delle precedenti osservazioni. In particolare, sono stati calcolati tre diagrammi di fase per differenti valori di J .

3.4.3 Commenti

Si osservi come prima cosa la retta verticale che indica la transizione di fase dal comportamento ferromagnetico a quello paramagnetico, in radianza normale. È giusto aspettarsi che sia proprio a $\epsilon = 2J$: infatti si ha la condizione $g(x) = J$ con $x = 0$ (dato che il sistema è in radianza normale), che ha proprio quella come soluzione.

Allo stesso modo, è facile capire il comportamento del sistema per grandi λ ed ϵ : infatti in questo caso il termine dell'Hamiltoniana (3.2) proporzionale a J diventa trascurabile e il sistema torna ad essere quello del modello di Dicke standard, in cui la transizione di fase si ha per $\lambda^2 = \epsilon$. Anche in questo caso, il diagramma di fase risulta essere coerente con le attese.

Difficile da capire a priori, invece, è il fatto che con $\epsilon = 0$ si osservano sia il comportamento di radianza normale, sia quello di superradianza. Ciò è molto

⁴ovvero della forma:

$$E(m) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx (1 - m \sin^2 x)^{1/2}$$

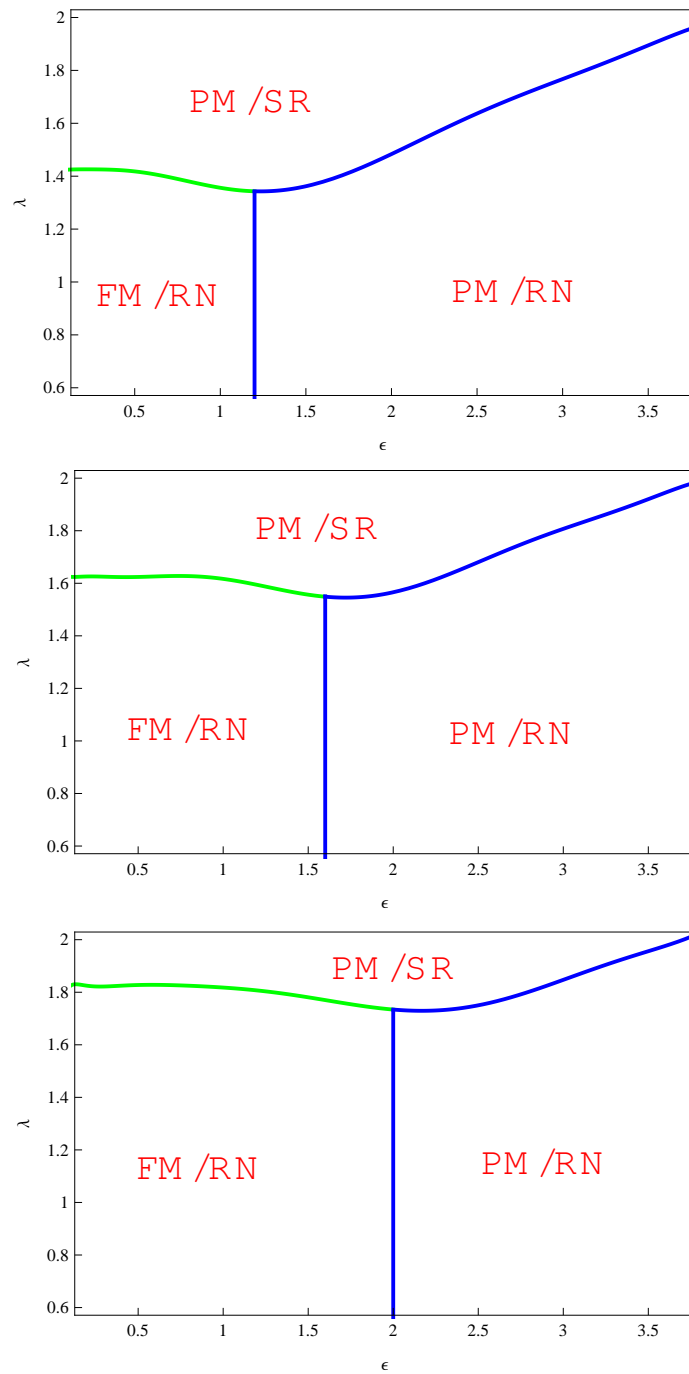


Figura 3.1: i diagrammi di fase sono, nell'ordine dall'alto verso il basso, relativi al caso $J = 0.6$, $J = 0.8$, $J = 1$. PM/SR sta per fase con comportamento paramagnetico e superradiante, PM/RN sta per fase con comportamento paramagnetico e di radianza normale, FM/RN sta per fase con comportamento ferromagnetico e di radianza normale. Si osservi che non è presente la fase che sarebbe, con ovvio significato, denominata FM/SR. Si noti inoltre la differente colorazione dei rami del diagramma di fase: il colore blu indica transizioni di fase del secondo ordine, quello verde indica transizioni del primo ordine. Si osservi infine che le scale sugli assi sono differenti tra loro.

diverso dal caso con $J = 0$, ovvero il caso del modello di Dicke standard, in cui per $\epsilon = 0$ c'è solo la fase di superradianza. Già da questa osservazione si intuisce che, in qualche senso, il comportamento di superradianza e quello di ferromagnetismo “interagiscono” tra loro.

Infatti, come si osserva dal diagramma di fase, non esiste la fase in cui il sistema manifesta contemporaneamente comportamento superradiante e ferromagnetico. Inoltre, si osservi nella figura 3.3 come varia il numero di fotoni in cavità al variare di λ (che si ottiene esattamente come per il modello di Dicke standard, e quindi risulta essere $\frac{\langle a^\dagger a \rangle}{N} = x^2$, dove x è il solito punto di massimo dell'esponentiale nella (3.10)): fino al valore di ϵ che corrisponde alla transizione dal comportamento ferromagnetico a quello paramagnetico, questa funzione è discontinua, al contrario di quello che si osserva nel modello di Dicke standard. Questo comportamento del parametro d'ordine “numero di fotoni medio” è accompagnato, come deve essere, dal cambio del tipo di non-analiticità dell'energia del ground state del sistema (come si può vedere dalla figura 3.2).

In realtà, questi due comportamenti sono strettamente legati. È semplice dimostrare, infatti, che se non esiste la fase di superradianza e ferromagnetismo, allora il numero medio di fotoni in cavità deve subire una discontinuità. Si procede in questo modo: si osservi la condizione che caratterizza la transizione al comportamento ferromagnetico, ovvero la condizione

$$g(x) = \sqrt{\left(\frac{\lambda x}{J}\right)^2 + \left(\frac{\epsilon}{2J}\right)^2} < 1. \quad (3.11)$$

Si consideri ora di essere in fase di radianza normale: si avrà allora $x = 0$. Si supponga inoltre di essere nella parte di diagramma di fase caratterizzata dal comportamento ferromagnetico (in cui effettivamente si osserva la discontinuità). Quindi in queste ipotesi vale $\frac{\epsilon}{2J} < 1$. Se ora si ammette, per assurdo, che sia possibile variare x con continuità, allora si potrà sempre trovare un x abbastanza piccolo affinché valga la (3.11), ovvero osservare una fase che sia insieme superradiante e ferromagnetica. Questa contraddizione delle ipotesi dimostra quindi la tesi.

Per capire perchè la fase con comportamento contemporaneamente ferromagnetico e superradiante non esiste, si consideri la condizione che divide il regime di ferromagnetismo da quello di paramagnetismo:

$$\sqrt{\frac{\lambda^2 x^2}{J^2} + \frac{\epsilon^2}{4J^2}} = 1,$$

da cui si ricava, per il “punto critico” x_c :

$$x_c = \frac{J}{\lambda} \sqrt{1 - \frac{\epsilon^2}{4J^2}}.$$

Affinchè si possa osservare superradianza e ferromagnetismo insieme, è dunque necessario che siano verificate le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} \max_{-\infty \leq x \leq \infty} \left[\lim_{\beta \rightarrow \infty} I(x) \right] = x_M \neq 0, \\ x_M \leq \frac{J}{\lambda} \sqrt{1 - \frac{\epsilon^2}{4J^2}}. \end{cases} \quad (3.12)$$

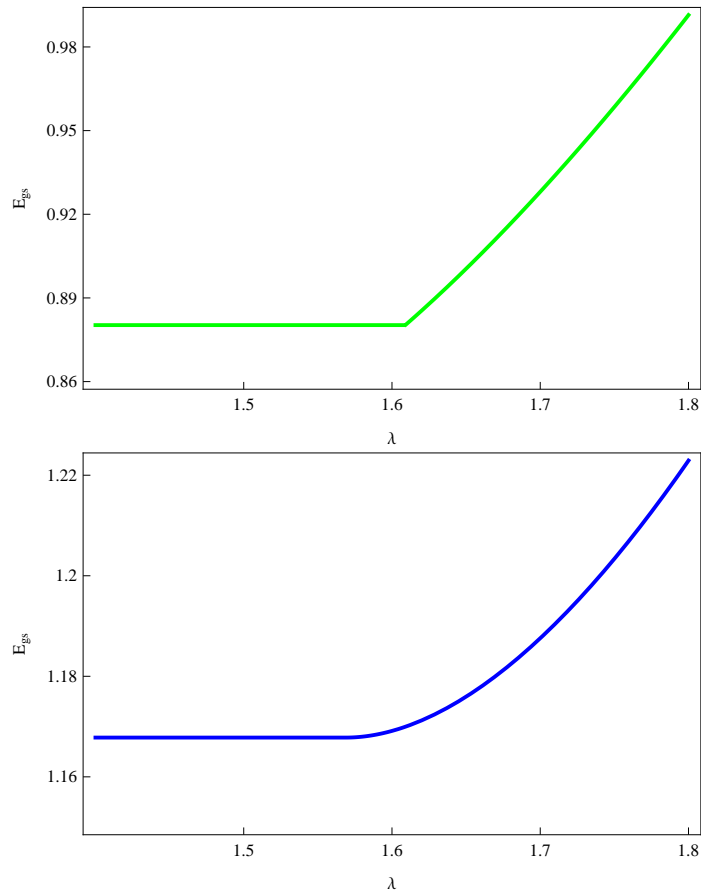


Figura 3.2: energia dello stato fondamentale per i valori $\epsilon = 1$ (in verde) e $\epsilon = 2$ (in blu) nel caso $T = 0$ al variare del parametro λ , calcolata per $J = 0.8$. Si osservi la differenza nei due casi: con $\epsilon = 1 < 2J$ si ottiene un grafico la cui derivata prima (non disegnata) è discontinua, mentre per $\epsilon = 2 > 2J$ si ottiene un grafico con la derivata prima sempre continua (che avrà una discontinuità nella derivata seconda). È evidente, in questo modo, la differenza dal punto di vista dell'energia dello stato fondamentale tra una transizione di fase di primo ordine e una di secondo.

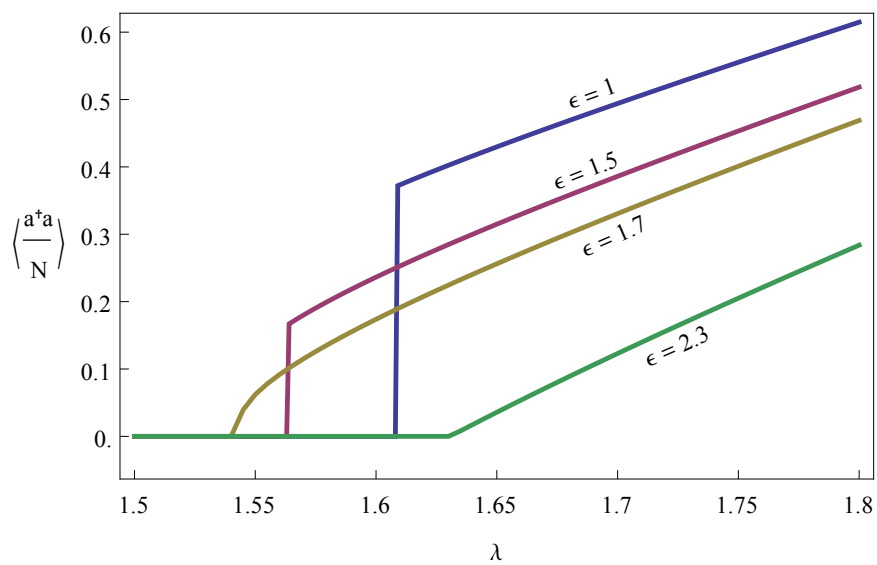


Figura 3.3: numero medio di fotoni in cavità, ottenuto con calcoli numerici; i grafici sono calcolati per vari valori del parametro ϵ , sempre nel il caso $J = 0.8$. Si osservi che se $J = 0.8$, la linea di transizione di fase tra comportamento paramagnetico e ferromagnetico è ad $\epsilon = 1.6$. Infatti per $\epsilon < 1.6$ si osservano discontinuità del numero di fotoni (transizione di fase di primo ordine), mentre per $\epsilon > 1.6$ la discontinuità è nella sua derivata (transizione di fase di secondo ordine).

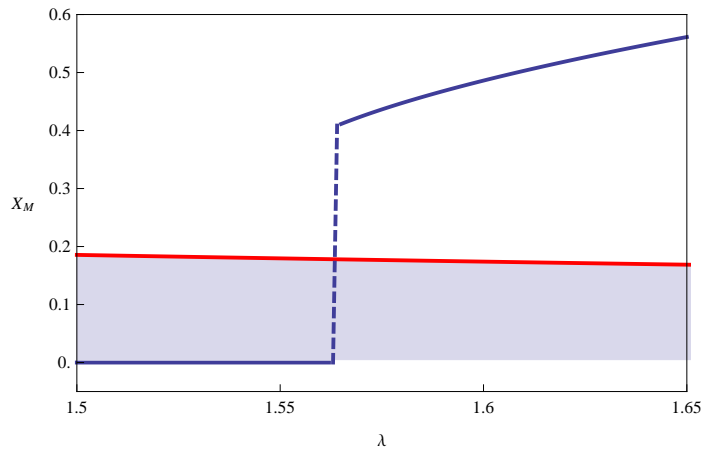


Figura 3.4: in blu è disegnato il valore del punto x_M in cui la funzione $\lim_{\beta \rightarrow \infty} I(x)$ è massima, mentre in rosso è disegnata la funzione $\frac{J}{\lambda} \sqrt{1 - \frac{\epsilon^2}{4J^2}}$ ed in grigio è evidenziata l'area in cui x_M è minore di tale funzione. Il grafico è ottenuto al variare di λ ed i valori dei parametri usati sono $J = 0.8$, $\epsilon = 1.5$. Si noti come le due condizioni x_M appartenente all'area evidenziata in grigio e $x_M \neq 0$ non sono mai soddisfatte contemporaneamente, tranne per il valore di λ in cui è presente la transizione di fase di superradianza (in cui la situazione diventa più delicata).

Tale sistema di condizioni è risolto graficamente (con ϵ e J fissati) nella figura 3.4. Si osservi come dalla condizione che realizza il comportamento ferromagnetico si ottenga, se $x_M \neq 0$, anche una condizione sul massimo di $\lim_{\beta \rightarrow \infty} I(x)$, da cui consegue, come visto nel capitolo riguardante il modello di Dicke, una condizione sul numero medio di fotoni in cavità.

Osservando il sistema di condizioni (3.12) si può vedere che i comportamenti di ferromagnetismo e di superradianza non possono coesistere nella stessa fase, se non in una sola linea del diagramma di fase: si fissi infatti il valore di J e di ϵ . È noto dall'analisi del modello di Dicke del capitolo 1 che il numero medio dei fotoni in cavità tende ad aumentare con λ a causa della prima condizione delle (3.12) (come si osserva anche nella figura 3.3). D'altra parte, la seconda delle (3.12), che implementa il comportamento ferromagnetico, è verificata per un valore di x_M che diminuisce al crescere di λ . Ciò significa che se le due condizioni sono entrambe verificate per più di un valore di λ , allora al variare di questo parametro il numero di fotoni dovrebbe contemporaneamente aumentare e diminuire, il che è assurdo.

Capitolo 4

Conclusioni

In questo capitolo conclusivo si vogliono ripercorrere velocemente i punti salienti dell'elaborato, sottolineando i passaggi fondamentali e le conclusioni raggiunte.

Nel primo capitolo viene introdotta l'Hamiltoniana di Dicke (1.2) e ne viene studiata la termodinamica.

L'osservazione dell'esistenza della transizione di fase di superradianza è fondamentale per quanto verrà fatto nei capitoli seguenti, ma non deve mettere in secondo piano una serie di altre considerazioni: come prima cosa, che tale transizione di fase è anche *quantistica*, come viene dimostrato nella sezione 1.3.1. In secondo luogo, si osservino i grafici che mostrano come variano il parametro d'ordine e l'energia del GS del sistema al variare di λ (unico coefficiente di accoppiamento che può essere modificato a piacere semplicemente variando la densità di atomi): viene mostrato chiaramente, in queste figure, che la transizione di fase di superradianza è di secondo ordine.

Nel secondo capitolo, dapprima si descrive la transizione dalla fase paramagnetica a quella ferromagnetica del modello di Ising classico bidimensionale in campo medio, al fine di osservare un parallelo tra le equazioni di punto sella che caratterizzano questa transizione di fase e quella del modello di Dicke. In particolare si osserva che tali equazioni sono identiche nel caso del coefficiente $\epsilon \rightarrow 0$ nel modello di Dicke.

Successivamente si introduce l'ingrediente che verrà usato poi per generalizzare il modello di Dicke, ovvero il modello di Ising quantistico unidimensionale. L'Hamiltoniana di tale modello viene quindi diagonalizzata, usando la trasformazione di Jordan–Wigner, che mappa il sistema di spin- $\frac{1}{2}$ in uno di fermioni senza spin interagenti, e la trasformazione di Bogoliubov. Infine viene studiata la termodinamica del modello, individuando la transizione di fase quantistica del modello di Ising quantistico unidimensionale.

Come si può vedere anche in questo caso dalle figure riguardanti l'energia di GS del modello, tale transizione di fase quantistica è del secondo ordine.

Prima di procedere all'analisi del terzo capitolo, è utile introdurre la definizione di “lunghezza di correlazione”. Senza entrare nel dettaglio più del necessario, essa è una grandezza termodinamica molto utile per studiare le transizioni di fase, che contiene informazioni su quanto è esteso il range dell'interazione che causa la transizione di fase nel sistema in considerazione.

Si può dimostrare che per transizioni del secondo ordine, la lunghezza di correlazione diverge nella transizione di fase (quindi l'interazione è tra tutti gli atomi del sistema), mentre ciò non accade nelle transizioni di fase del primo ordine, in cui si formano “domini”, ovvero porzioni macroscopiche del campione in analisi, in cui la transizione di fase è già avvenuta, e altri in cui non lo è ancora.

Quindi, nel caso del modello di Dicke e di Ising, la transizione di fase è un processo che coinvolge contemporaneamente tutti gli atomi del sistema.

Nel terzo capitolo si studia una versione generalizzata del modello di Dicke a cui è stato aggiunto un termine di interazione a primi vicini tra gli atomi. Si osservi che, sebbene il termine di interazione sia stato scelto in modo da conservare l'esatta risolubilità del sistema, esperimenti i cui modelli sono Hamiltoniane molto simili alla (3.1) sono già stati (e vengono tuttora) proposti in Circuit QED [8][16].

Viene poi studiato il modello ottenuto sfruttando le tecniche usate per i due modelli nei precedenti capitoli, e si ottiene il diagramma di fase del sistema.

Si consideri ora la transizione tra la fase ferromagnetica/di radianza normale e quella paramagnetica/superradiante.

Si potrebbe riassumere così quello che succede: poichè ferromagnetismo e superradianza “entrano in competizione”, il diagramma di fase che si ottiene non è la semplice sovrapposizione dei due diagrammi presi singolarmente: infatti si pensi al diagramma di fase del modello di Dicke ($\lambda = \sqrt{\epsilon}$) ed a quello del modello di Ising ($g(x) = J$) (plottati nella figura 4.1). Per valori bassi del parametro λ (quindi tra la linea tratteggiata e quella piena blu della figura 4.1) oppure, come si vede confrontando i grafici in figura 3.1, aumentando il parametro J , la zona “proibita” è dominata dal parametro J e quindi si ha ferromagnetismo (e radianza normale). Al contrario per valori alti del parametro λ (quindi sopra la linea tratteggiata nella figura 4.1), oppure valori bassi di J , è la superradianza a prevalere e quindi si ha paramagnetismo.

Nel punto in cui λ assume il suo valore critico, inoltre, la transizione di fase è del primo ordine. Ciò è evidente dal grafico del numero di fotoni in cavità, ma è facile intuire che anche il parametro d'ordine della transizione del modello di Ising, $\langle \sigma_y \rangle$ ha una discontinuità: infatti, con le notazioni del capitolo 3, si ha che $\langle \sigma_y \rangle = f(g(x_M))$, dove x_M è il valore per cui è massimo l'integrale di punto sella (3.10). Infatti il parametro d'ordine deve dipendere dal coefficiente di accoppiamento coinvolto nella transizione di fase. Allora, poichè è discontinuo il valore di $(g(x_M))$ al variare di λ nella transizione di fase, è lecito aspettarsi che ci sia una discontinuità anche in $\langle \sigma_y \rangle$.

Questo cambiamento rispetto ai modelli iniziali può essere interpretato nel seguente modo: sempre a causa del fatto che i comportamenti di ferromagnetismo e di superradianza sono in competizione, la lunghezza di correlazione non diverge più, ma si formano piccoli domini in cui è l'uno o l'altro comportamento a prevalere. Per spiegare meglio il concetto, si pensi di fissare i parametri ϵ e J , e di essere ad un valore di λ tale per cui la fase del sistema è quella ferromagnetica/di radianza normale. Aumentando λ , il sistema compie una transizione alla fase superradiante, ma poichè, come visto nel sistema di equazioni (3.11), superradianza e ferromagnetismo non possono coesistere per più di un valore di λ , quando tale coefficiente assume il suo valore critico ci saranno domini nel

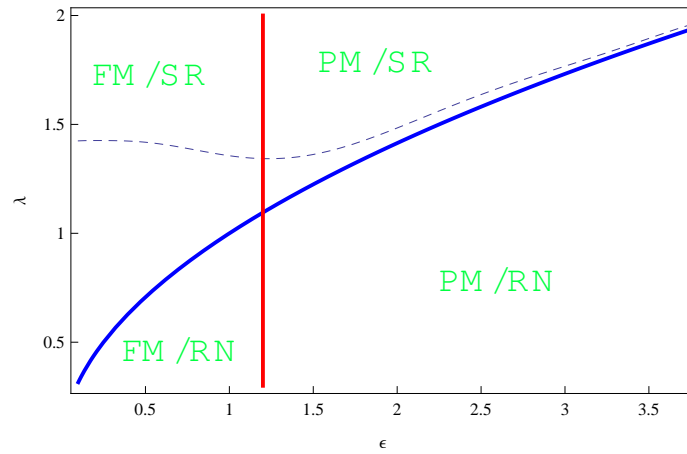


Figura 4.1: in blu è riportato il diagramma di fase del modello di Dicke standard ($\lambda = \sqrt{\epsilon}$), in rosso quello del modello di Ising con parametro di accoppiamento tra atomi $J = 0.6$ ($\epsilon = 2J$). In verde sono scritte le fasi del sistema se ferromagnetismo e superradianza non fossero comportamenti che competono tra loro. La linea tratteggiata è la stessa del plot con $J = 0.6$ della figura 3.1, ovvero la linea che corrisponde alla transizione di fase tra radianza normale e superradianza, nel caso del modello di Dicke con l'interazione tra atomi "alla Ising".

sistema in cui gli atomi si comportano ancora in modo ferromagnetico, e altri in cui gli atomi sono già superradianti.

Bibliografia

- [1] R. H. Dicke, *Phys. Rev.* **93**(1), 99-110 (1954).
- [2] K. Hepp, E. H. Lieb, *Ann. Phys.* **76**(2), 360 (1973)
- [3] Y. K. Wang, F. T. Hioe, *Phys. Rev. A* **7**(3), 831-836 (1973).
- [4] K. Rzazewski, K. Wodkiewicz, W. Zakowicz, *Phys. Rev. Lett.* **35**(7), 432-434 (1975).
- [5] P. Nataf, C. Ciuti, *Nat. Comm.* **1**, 72; DOI:10.1038/ncomms1069 (2010).
- [6] K. Baumann, C. Guerlin, F. Brennecke, T. Esslinger, *Nature* **464**, 1301 (2010).
- [7] D. Nagy, G. Konya, G. Szirmai, P. Domokos, *Phys. Rev. Lett.* **104**, 130401 (2010).
- [8] L. Zou et al., *Phys. Rev. Lett.* **113**, 023603 (2014).
- [9] M. P. Baden et al., *Phys. Rev. Lett.* **113**, 020408 (2014).
- [10] K. Hepp, E. H. Lieb, *Phys. Rev. A* **8**(5), 2517-2525 (1973).
- [11] V. Dotsenko, “*An Introduction to the Theory of Spin Glasses and Neural Networks*”, World Scientific (1994).
- [12] S. Sachdev, “*Quantum Phase Transitions*”, Cambridge University Press (2011).
- [13] G. Mussardo, “*Statistical Field Theory – An Introduction to Exactly Solved Models in Statistical Physics*”, Oxford University Press (2010).
- [14] F. Franchini, “*Notes on Bethe Ansatz Techniques*” (2011).
- [15] C. F. Lee, N. F. Johnson, *Phys. Rev. Lett.* **93**(8), 083001 (2004).
- [16] Y.W. Zhang et al., *Sci. Rep.* **4**, 4083; DOI:10.1038/srep04083 (2014).

Appendice A

Metodo del Punto Sella

Si consideri un integrale della forma

$$I(A) = \int_{x_1}^{x_2} dx f(x) e^{Ag(x)}, \quad (\text{A.1})$$

dove f e g sono funzioni reali della variabile reale x e sia $A > 0$.

Sia inoltre x_0 la posizione del massimo assoluto della funzione, con la condizione $x_1 < x_0 < x_2$.

Ora si cambi la variabile d'integrazione passando ad y , definita da:

$$x = x_0 + \frac{y}{\sqrt{A}}. \quad (\text{A.2})$$

Si osservi, inoltre, che si possono sviluppare le funzioni coinvolte nell'integrale (A.1) nel seguente modo:

$$Ag(x) = Ag(x_0) + \frac{1}{2}g''(x_0)y^2 + \frac{1}{6\sqrt{A}}g'''(x_0)y^3 + \frac{1}{24A}g''''(x_0)y^4 + \dots$$

dove $g'(x_0) = 0$ dato che x_0 è un massimo di $g(x)$. Quindi si ottiene:

$$e^{Ag(x)} = e^{Ag(x_0)} e^{\frac{1}{2}g''(x_0)y^2} \left(1 + \frac{g'''(x_0)y^3}{6\sqrt{A}} + \frac{3g''''(x_0)y^4 + [g'''(x_0)]^2 y^6}{72A} + \dots \right), \quad (\text{A.3})$$

dove i primi due termini sono ottenuti semplicemente usando lo sviluppo di $Ag(x)$, mentre gli altri si ottengono sviluppando gli altri esponenziali (ottenuti sempre dallo sviluppo precedente sostituito all'esponente) con la formula $e^{f(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(f(x))^n}{n!}$ e scrivendo il risultato come sviluppo in serie di potenze di $1/\sqrt{A}$.

Allo stesso modo, si può scrivere:

$$f(x) = f(x_0) \left(1 + \frac{f'(x_0)y}{f(x_0)\sqrt{A}} + \frac{f''(x_0)y^2}{2f(x_0)A} + \dots \right). \quad (\text{A.4})$$

Quindi, usando le equazioni (A.3) e (A.4) e facendo il cambio di variabile, l'integrale (A.1) diventa:

$$I(A) = \frac{f(x_0)e^{Ag(x_0)}}{\sqrt{A}} \int_{y_1}^{y_2} dy e^{\frac{1}{2}g''(x_0)y^2} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} A^{-n/2} P_n(y) \right), \quad (\text{A.5})$$

dove $P_n(y)$ sono dei polinomi in y di grado n ; si osservi, inoltre, che per n dispari si hanno polinomi dispari e per n pari si hanno polinomi pari.

Ora dalla relazione (A.2), si capisce che $y_2 > 0$ e $y_1 < 0$; inoltre per $A \rightarrow \infty$, i limiti dell'intervallo di integrazione tendono a $\pm\infty$. Integrando quindi su tutto l'asse reale si commette un errore piccolo, poichè l'esponenziale che viene integrato va a zero molto velocemente lontano da $y = 0$ (che era gi all'interno dell'intervallo), dato che $g(x_0) < 0$ (x_0 è punto di massimo).

Per svolgere l'integrale (A.5) si noti che tutti gli integrali con n dispari sono nulli e che vale in generale(per $a > 0$):

$$\sqrt{\frac{\pi}{a}} = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ax^2} = \left[ye^{-ax^2} \right]_{-\infty}^{+\infty} + 2a \int_{-\infty}^{\infty} dx x^2 e^{-ax^2} = 2a \int_{-\infty}^{\infty} dx x^2 e^{-ax^2}.$$

Quindi, ripetendo l'integrazione per parti, si può integrare facilmente qualsiasi funzione della forma $x^{2n}e^{-ax^2}$, con n numero naturale.

Usando queste semplici considerazioni nella (A.5), è immediato dimostrare che:

$$\begin{aligned} I(A) &\approx \frac{f(x_0)e^{Ag(x_0)}}{\sqrt{A}} \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{\frac{1}{2}g''(x_0)y^2} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} A^{-n/2} P_n(y) \right) \\ &= f(x_0)e^{Ag(x_0)} \sqrt{\frac{2\pi}{-Ag''(x_0)}} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{2n}}{A^n} \right), \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Infine si osservi che vale:

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{2n}}{A^n} \right) = 1$$

e quindi si ottiene il risultato:

$$I(A) = \sqrt{\frac{2\pi}{-Ag''(x_0)}} f(x_0) e^{Ag(x_0)}.$$

Appendice B

Deduzione del Modello di Dicke

La deduzione intuitiva dell'Hamiltoniana di Dicke riportata in questa appendice è quella che si fa considerando il sistema fisico che studiò lo stesso Dicke. Si noti, però, che un'Hamiltoniana della stessa forma descrive sistemi anche molto diversi, a patto di dare il giusto significato ai coefficienti di accoppiamento.

In generale, l'Hamiltoniana che descrive l'interazione tra un elettrone atomico e M modi del campo elettromagnetico, è (con $\hbar = c = 1$) :

$$H = \frac{1}{2m} (\vec{p} - e\vec{A})^2 + V(x) + H_{elm} , \quad (\text{B.1})$$

dove e è la carica dell'elettrone in modulo e H_{elm} è l'Hamiltoniana associata al solo campo elettromagnetico. Svolgendo il quadrato e trascurando il termine proporzionale ad e^2 (quindi in approssimazione di campo debole, cioè A^2 piccolo), si ottiene:

$$H = H_{fer} + H_{elm} + H_{int} , \quad (\text{B.2})$$

dove $H_{fer} = \vec{p}^2/2m + V(x)$ e $H_{int} = -e/2m(\vec{p} \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \vec{p})$.

Usando ora il formalismo della seconda quantizzazione per descrivere la parte di Hamiltoniana che riguarda il fermione, si ha:

$$H_{fer} = \sum_{\alpha} E_{\alpha} c_{\alpha}^{\dagger} c_{\alpha} , \quad (\text{B.3})$$

dove la somma è su tutti gli stati accessibili al fermione (etichettati dall'indice α) e gli c_{α}^{\dagger} e c_{α} sono gli operatori fermionici di creazione e distruzione di un fermione nell'autostato dell'Hamiltoniana (B.1) caratterizzato da energia E_{α} . Quindi per questi operatori valgono le regole di anticommutazione:

$$\begin{aligned} \{c_{\alpha}^{\dagger}, c_{\beta}\} &= \delta_{\alpha\beta} , \\ \{c_{\alpha}, c_{\beta}\} &= 0 . \end{aligned}$$

Si deve poi quantizzare il campo elettromagnetico, ottenendo per quanto riguarda la sua Hamiltoniana:

$$H_{elm} = \sum_{s=1}^M \nu_s a_s^{\dagger} a_s , \quad (\text{B.4})$$

dove a_s^\dagger e a_s sono gli operatori di creazione e distruzione (bosonici) del quanto del modo s -esimo del campo elettromagnetico, quindi per loro vale: $[a_s, a_{s'}^\dagger] = \delta_{ss'}$

Infine, sempre grazie al formalismo della seconda quantizzazione, il termine H_{int} si può scrivere come:

$$H_{int} = \sum_{s, \alpha, \beta} \lambda_{s\alpha\beta} (a_s^\dagger + a_s) c_\alpha^\dagger c_\beta, \quad (\text{B.5})$$

dove $\lambda_{s\alpha\beta}$ è un opportuno coefficiente di accoppiamento che dipende dall'energia dei livelli α e β e dal modo del campo s considerato.

A questo punto, si considerino N atomi che hanno accesso solamente a due livelli energetici, quello fondamentale di energia E_{gs} e quello eccitato di energia E_e . I costruttori e distruttori fermionici, quindi, si specializzano in modo che i fermioni con energia α nell' i -esimo atomo saranno creati da $c_{\alpha i}^\dagger$ e distrutti da $c_{\alpha i}$.

Inoltre si ridefiniscono i termini della (B.2) nel seguente modo, partendo dalle (B.3) e (B.5):

$$H_{fer} = \sum_{i=1}^N \left(E_{gs} c_{i1}^\dagger c_{i1} + E_e c_{i2}^\dagger c_{i2} \right), \quad (\text{B.6})$$

$$H_{int} = \Omega \sum_{i=1}^N \sum_{s=1}^M \lambda_s (a_s^\dagger + a_s) \left(c_{i1}^\dagger c_{i2} + c_{i2}^\dagger c_{i1} \right), \quad (\text{B.7})$$

dove Ω è un coefficiente che rende le λ_s intensive (che non hanno più gli indici perchè ora ci sono solo due livelli energetici e $\lambda_{s12} = \lambda_{s21}$).

Ora si considerano gli operatori:

$$\begin{aligned} \sigma^+ &= (\sigma^x + i\sigma^y)/2, \\ \sigma^- &= (\sigma^x - i\sigma^y)/2, \\ \sigma^z &= 2\sigma^+ \sigma^- - \mathbf{1}. \end{aligned}$$

Essi rispettano le seguenti regole:

$$\begin{aligned} \{\sigma^+, \sigma^-\} &= \mathbf{1}, & (\sigma^\pm)^2 &= 0, \\ [\sigma^z, \sigma^\pm] &= \pm\sigma^\pm, & (\sigma^z)^2 &= 0. \end{aligned}$$

Ora si osserva che queste sono le stesse regole che seguono gli operatori $c_2^\dagger c_1$, $c_1^\dagger c_2$ e $(c_2^\dagger c_2 - c_1^\dagger c_1)/2$.

Supponendo infine che gli operatori c e c^\dagger commutino se calcolati per atomi diversi, si ottiene:

$$H = \sum_{s=1}^M \nu_s a_s^\dagger a_s + \Delta \sum_{i=1}^N \sigma^z + \frac{1}{2\sqrt{N}} \sum_{s=1}^M \sum_{i=1}^N \lambda_s (a_s^\dagger + a_s) \sigma_i^x$$

che è l'Hamiltoniana di Dicke. Si osservi che, facendo tutti i calcoli in modo formale, si ottiene che per arrivare a questa formula si deve definire:

$$\lambda_s = \Delta d (2\pi/\nu_s)^{\frac{1}{2}} (N/V)^{\frac{1}{2}},$$

dove d è la proiezione del momento di dipolo atomico, che caratterizza la transizione tra i livelli energetici, lungo il vettore di polarizzazione del campo elettromagnetico e Δ è la differenza di energia tra tali livelli.