



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO

TESI TRIENNALE

La Pila di Sabbia:
Studio del periodo
nell'evoluzione su grafi semplici

Autore:
Giovanni
CAMISASCA

Relatore:
Prof. Sergio
CARACCILO

Correlatore:
Dott. Andrea
SPORTIELLO

Anno accademico 2011-2012

Indice

1	La pila di sabbia	7
1.1	La pila di sabbia abeliana	7
1.1.1	Regole di evoluzione	8
1.1.2	Pila su di un grafo	9
1.1.3	Gli operatori a_i	11
1.2	Il gruppo degli operatori a_i	11
1.2.1	Configurazioni ricorrenti e transienti	11
1.2.2	Lo spazio R	14
1.2.3	Il gruppo G	14
1.3	Classi di equivalenza ed invarianti di toppling	15
2	Periodo di Toppling su catene lineari	21
2.1	La catena lineare	22
2.1.1	Periodo di catene lineari tramite invarianti	23
2.1.2	Periodo di catene lineari tramite relazione di chiusura	26
2.1.3	Notazione con gli esponenti	27
2.2	Simulazione numeriche	28
3	La antipila di sabbia	31
3.1	Antitoppling	31
3.1.1	Regole di antitoppling	31
3.1.2	Gli operatori a_i^\dagger	32
3.2	Toppling ed Antitoppling	33
3.2.1	Analogie	33
3.2.2	Commutatività	34
3.2.3	Periodo di antitoppling su catena lineare	35
3.3	Transienti e ricorrenti sotto gli operatori $a_i a_j^\dagger$	37

4	Periodo toppling/antitoppling su grafi semplici	39
4.1	Periodo su classi di equivalenza	39
4.2	Catene lineari con pozzo e sorgente	41
4.3	Catene circolari	42
	4.3.1 Calcolo del periodo	43
	4.3.2 Proprietà	45
	4.3.3 Simulazioni numeriche	49
4.4	Grafo completo	52
	4.4.1 Calcolo del periodo tramite relazioni di chiusura .	52
	4.4.2 Proprietà	53
	4.4.3 Simulazioni numeriche	54
4.5	Il fattore moltiplicativo	57
4.6	Tetoide	57
	4.6.1 Calcolo del periodo	59
	4.6.2 Simulazioni numeriche	62

Introduzione

In questo breve elaborato si sono approfondite le proprietà temporali e periodiche di un modello di criticità auto-organizzata, quelle della pila di sabbia su grafi semplici. I concetti sono presentati secondo la seguente struttura: in prima battuta vengono illustrate le caratteristiche fondamentali riguardanti la pila di sabbia abeliana, nel secondo capitolo viene calcolato il periodo della pila costruita sul grafo lineare, l'intento di studiare il periodo su grafi chiusi ci porta ad introdurre l'operazione di rimozione di sabbia che viene presentata nel terzo capitolo, infine abbiamo calcolato il periodo su semplici grafi chiusi come la catena circolare ed il tetoide.

Capitolo 1

La pila di sabbia

Una semplice dinamica per le pile di sabbia fu introdotta da Bak, Tang e Wiesenfeld nel loro celebre articolo del 1987 come esempio di Self organized criticality [1].

Ingenuamente tale modello può sembrare di una semplicità disarmante: vengono scelti N vertici, su di essi viene accumulata la sabbia e i vertici si scambiano la sabbia con semplici regole. Invece presenta peculiarità inimmaginabili date le premesse, è infatti caratterizzato da una dinamica discreta che, apparentemente in modo imprevedibile, porta il sistema in uno stato fuori dall'equilibrio tramite sconvolgimenti improvvisi chiamati valanghe.

1.1 La pila di sabbia abeliana

Ci restringeremo nel seguito ad un sottoinsieme delle pile di sabbia: le pile di sabbia abeliane. Il modello di pila di sabbia abeliano (ASM) fu introdotto nel 1990 da Deepak Dhar [2], tale modello oltre a presentare i fenomeni di interesse sopracitati permette una profonda analisi matematica. In effetti la ASM è il più semplice modello di self-organized criticality che può essere trattato analiticamente.

Il modello è costituito da un insieme di N vertici indicizzati da $i = 1 \dots N$. Su ogni vertice una configurazione definisce una variabile intera z_i non negativa, chiamata altezza della pila, ed è fissato una volta per

tutte un valore di soglia z_i^c . Una configurazione della pila, successione z_i , è stabile se $z_i < z_i^c$ per $\forall i \in [N]$.

1.1.1 Regole di evoluzione

La pila evolve temporalmente secondo le seguenti regole:

i) **Aggiunta di sabbia**

Ad ogni passo un granello di sabbia viene aggiunto in uno dei siti con probabilità p_i . Se la nuova configurazione soddisfa già la condizione di stabilità $z_i < z_i^c$ si passa al prossimo passo, se invece $\exists i$ tale che la condizione suddetta non è soddisfatta la configurazione è instabile e deve evolvere finchè non raggiunge tale condizione.

ii) **Toppling**

L'operazione di toppling o rilassamento permette alla pila di raggiungere la stabilità dopo l'aggiunta di sabbia. Se $z_i > z_i^c$ nel nodo i allora tale vertice cede la sabbia ad altri nodi a proprio scapito cioè: $z_j \rightarrow z_j - \Delta_{ij}$ per $j = 1 \dots N$. La nuova configurazione così raggiunta può essere stabile o instabile, l'operazione di toppling viene ripetuta fino al raggiungimento della stabilità.

Il trasferimento di sabbia è quindi regolato dalla matrice di interi Δ di dimensioni $N \times N$. Tale matrice intera è costruita così da soddisfare tali proprietà:

- i) $\Delta_{ii} > 0$ per $\forall i$
- ii) $\Delta_{ij} < 0$ per $i \neq j$
- iii) $\sum_j \Delta_{ij} \geq 0$ per $\forall i$

Le prime due semplici regole assicurano che il vertice di toppling possa solo perdere sabbia mentre i vertici circostanti possano solo riceverne. La terza invece garantisce che la sabbia non venga creata durante il processo di raggiungimento della stabilità o di rilassamento, non viene richiesto $\sum_j \Delta_{ij} = 0$ poichè vi sono siti della pila, detti siti di bordo, che possono scaricare la sabbia all'esterno della pila stessa. Infatti con la sola aggiunta di sabbia condizioni stazionarie non possono essere raggiunte se

non con condizioni al contorno dissipative. Notiamo come raggiunta una condizione critica l'aggiunta di un grano di sabbia in un vertice e relativo toppling possa innescare una successione di topplings coinvolgente un gran numero di vertici della pila, tale fenomeno è chiamato valanga.

Mettiamo subito in evidenza la caratteristica cruciale di questo modello, da cui appunto trae il nome. Se vi sono diversi siti della pila instabili è indifferente in quale ordine si svolgano le operazioni di toppling. Definiamo ora N operatori t_j con $j \in [1, \dots, N]$, tali operatori sono gli operatori di toppling. Data una configurazione $Z = \{z_j\}$ instabile sul vertice i , allora $t_i Z$ è la configurazione Z' con $z'_j = z_j + \Delta_{ij}$ per $j = 1 \dots N$. Se consideriamo due vertici entrambi instabili i e k allora notiamo che eseguire toppling in i lascia k instabile e che dopo aver eseguito l'operazione di toppling in entrambi i vertici otteniamo la configurazione $z_j \rightarrow z_j - \Delta_{ji} - \Delta_{jk}$, tale configurazione è chiaramente invariante sotto lo scambio $i \leftrightarrow k$. Possiamo quindi dedurre che la configurazione finale ottenuta è indipendente dall'ordine con cui eseguiamo il toppling cioè:

$$[t_i, t_j] = 0 \text{ per } \forall i, j \quad (1.1.1)$$

Ripetendo questo ragionamento per tutti i siti coinvolti in una valanga deduciamo che lo stato finale raggiunto è invariante rispetto all'ordine di toppling.

1.1.2 Pila su di un grafo

La pila è dunque definita su di un insieme di vertici connessi virtualmente tramite la matrice Δ , consideriamo infatti connessi i vertici in grado di scambiare sabbia fra loro. Due vertici i e j sono quindi connessi se $\Delta_{ij} \neq 0$.

Un grafo è definito come una coppia (V, E) , dove V è un insieme di vertici e E è un insieme di archi tali che $E \subseteq [V]^2$. Due vertici sono detti adiacenti o primi vicini se sono connessi almeno da un arco. Costruito un grafo con N vertici possiamo definire su di esso la matrice $N \times N$ Laplaciana definita come la differenza della matrice dei gradi di libertà e quella di adiacenza :



Figura 1.1: Esempio di grafo generico

$$\Delta_{i,j} := \begin{cases} \deg(v_i) & \text{if } i = j \\ -k & \text{if } i \neq j \text{ and } v_i \text{ è adiacente a } v_j \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

dove $\deg(v_i)$ corrisponde al numero di primi vicini di i e k al numero di connessioni fra i siti i e j . Nel caso di connessioni singole ed adirezionali $k = -1$. D'ora in avanti ci restringeremo ad una pila definita su di un grafo adirezionale senza anelli o vertici multipli, cioè a $k = -1$.

La matrice Laplaciana appena costruita corrisponde esattamente alla matrice Δ che regola gli scambi di sabbia nella pila.

Possiamo ora definire i valori di soglia che determinano l'instabilità della pila. Senza alcuna perdita di generalità possiamo porre $z_i^c = \Delta_{ii}$, in questo modo abbiamo semplicemente posto a 0 l'altezza di un vertice dopo l'operazione di toppling.

Esempio 1.1. Consideriamo una pila di sabbia costruita su di un reticolo rettangolare, in tal caso scegliamo di indicizzare gli N vertici tramite due coordinate x e y . Avremo allora che:

- i) $\deg(v_i) = \Delta_{ii} = 4$
- ii) $\Delta_{ij} = 1$ se $|x_i - x_j| + |y_i - y_j| = 1$

iii) $\Delta = 0$ altrove

In tal caso allora il valore di soglia sarà proprio 4. In questo caso l'essere al bordo corrisponde con l'idea geometrica del reticolo, infatti vertici sul bordo del reticolo possono scaricare la sabbia all'esterno dello stesso.

1.1.3 Gli operatori a_i

Definiamo ora N operatori a_i che agiscono sulle configurazioni stabili della pila. Data una configurazione stabile Z la configurazione $a_i Z$ è la configurazione stabile ottenuta aggiungendo un grano in posizione i e lasciando rilassare il sistema fino al raggiungimento della stabilità. Gli operatori a_i sono evidentemente legati con gli operatori t_i , infatti gli a_i rappresentano l'aggiunta di un grano di sabbia seguita da una successione di toppling che riporta la configurazione alla stabilità.

Evidentemente è indifferente l'ordine con cui vengono aggiunti i grani di sabbia sui siti e grazie alla commutatività dei t_i possiamo dedurre che la configurazione finale ottenuta è indipendente dall'ordine con cui aggiungo la sabbia ed eseguo il rilassamento cioè:

$$[a_i, a_j] = 0 \text{ per } \forall i, j \quad (1.1.2)$$

Gli operatori che rappresentano l'aggiunta di sabbia e relativo rilassamento commutano fra loro, proprio da questa condizione di commutatività prende il nome tale modello. La commutatività degli operatori a_i è la proprietà cruciale che rende la ASM trattabile analiticamente.

1.2 Il gruppo degli operatori a_i

1.2.1 Configurazioni ricorrenti e transienti

Un processo stocastico markoviano o processo di Markov è un processo stocastico nel quale la probabilità di transizione che determina il passaggio ad uno stato di sistema dipende unicamente dallo stato di sistema immediatamente precedente e non dal come si è giunti a tale stato [5]. L'evoluzione temporale della pila di sabbia soddisfa entrambi i requisiti:

I grani vengono aggiunti in posizioni casuali sul grafo è quindi un processo stocastico e la configurazione al tempo $t + 1$ dipende solamente da quella al tempo t , per questo motivo l'evoluzione temporale della pila è Markoviana. Per questo motivo, come nella teoria standard di Markov, le configurazioni possono essere divise in transienti e ricorrenti. dato lo spazio delle configurazioni stabili S possiamo allora definire:

Definizione 1.1. La configurazione $Z \in S$ è detta accessibile dalla configurazione $Z' \in S$ se esiste un cammino da Z a Z' con probabilità positiva.

Definizione 1.2. Una configurazione $C \in S$ è ricorrente se è accessibile da tutte le configurazioni accessibili da C stessa.

Definizione 1.3. Una configurazione non ricorrente è detta transiente.

Sfruttando gli operatori appena introdotti possiamo quindi specificare la relazione di ricorrenza nella seguente maniera [2]: una configurazione C è ricorrente sotto a_i se esiste un intero positivo m_i tale che

$$a_i^{m_i} C = C \quad (1.2.1)$$

una configurazione C è ricorrente se esistono degli interi positivi m_i tali che

$$a_i^{m_i} C = C \text{ per } \forall i \quad (1.2.2)$$

Una configurazione ricorrente è facilmente raggiungibile reiterando l'applicazione di un operatore qualsiasi a_i . Siccome il numero di configurazioni possibili è finito, l'orbita di a_i deve chiudersi su se stessa dopo un certo numero di iterazioni [4]. Quindi data una qualsiasi configurazione stabile Z devono esistere due numeri n e m_i tali che $a_i^{n+m_i} Z = a_i^n Z$, dove m_i è il periodo ed n è il numero di configurazioni transienti prima di raggiungere il ciclo delle ricorrenti.

Una volta raggiunto il ciclo delle ricorrenti tramite l'interazione di a_i lo spazio delle configurazioni ricorrenti non può più essere abbandonato tramite l'utilizzo di a_i . Tale effetto può in teoria essere ottenuto tramite l'impiego dell'operatore a_j con i diverso da j , ma sfruttando la proprietà di abelianità otteniamo $a_j C = a_j a_i^{m_i} C = a_i^{m_i} (a_j C)$ con C ricorrente. Quindi:

- i) se C è una configurazione ricorrente per a_i lo è anche $a_j C$
- ii) l'operatore a_j mappa cicli di a_i in cicli di a_i con lo stesso periodo

Dalla *iii* apprendiamo che il periodo dell' operatore a_i non dipende dalla configurazione di partenza, infatti tutte le configurazioni possono essere raggiunte partendo dalla configurazione vuota applicando gli a_j e il periodo di a_i deve rimanere invariato. Da tutte queste considerazioni possiamo quindi dedurre che l'applicazione di a_j su di un ciclo di a_i porta alla formazione di un toro bidimensionale, tramite possibili configurazioni transienti. Ripetendo questa deduzione per tutti gli $i = 1 \dots N$ scopriamo che l'insieme delle configurazioni forma un toro multidimensionale sotto l'azione degli a_i . Ogni a_i mi permette di muovermi lungo una direzione del toro, sono gli operatori di traslazione lungo il toro.

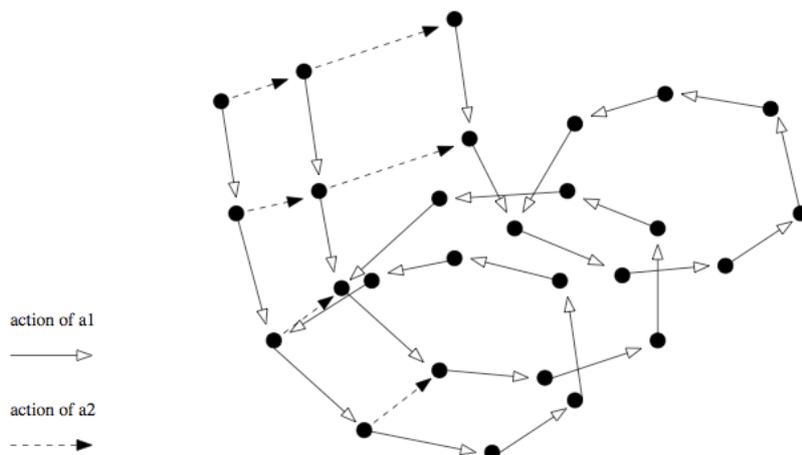


Figura 1.2: Il toro delle configurazioni ricorrenti in 2 dimensioni

Data una determinata configurazione stabile Z è inoltre possibile determinare se questa configurazione è ricorrente. Vi sono diversi metodi per fare ciò fra cui i più largamente impiegati sono il burning test e l'identity test.

1.2.2 Lo spazio R

Introduciamo lo spazio R delle configurazioni ricorrenti, chiuso sotto l'applicazione degli a_i . Definiamo in R l'inverso a_i^{-1} . Per ogni configurazione $C \in R$ definiamo

$$a_i^{-1}C = a_i^{m_i-1}C \text{ per } \forall i \quad (1.2.3)$$

Tale operazione è possibile perchè in un ciclo ogni configurazione può provenire da una sola configurazione sotto l'azione di a_i . Gli operatori quindi formano un gruppo abeliano, la proprietà associativa segue infatti dalla definizione stessa.

Rimane aperta la possibilità che due configurazioni ricorrenti non siano mutualmente accessibili, così che esisterebbero dei tori disconnessi fra loro. Questa situazione però non può presentarsi qualora le probabilità $p_i > 0$ per $\forall i$. Consideriamo infatti la configurazione critica Z_{max} in cui $z_i = \Delta_{ii} - 1$ essa è raggiungibile da ogni configurazione stabile tramite l'applicazione ripetuta degli a_i , è quindi ricorrente. Siccome in R sono definiti gli a_i^{-1} ogni configurazione è raggiungibile da Z_{max} , quindi tutte le configurazioni sono accessibili mutualmente. Tutte le configurazioni giacciono sullo stesso toro.

1.2.3 Il gruppo G

Definiamo ora il gruppo G come il gruppo abeliano generato dagli operatori a_i con $i = 1 \dots N$. Tale gruppo è finito e definito completamente dalle seguenti relazioni:

$$a_i^{\Delta_{ii}} = \prod_{j \neq i} a_j^{-\Delta_{ij}} \text{ per } \forall i \quad (1.2.4)$$

Tali relazioni sono di facile comprensione: aggiungendo Δ_{ii} grani sul vertice i si provoca certamente toppling, tali grani vengono distribuiti sui siti j secondo le normali regole di toppling dettate da Δ_{ij} . Facendo uso di tali relazioni è sempre possibile ridurre il grado di un polinomio di a_i almeno fino a Δ_{ii} . Invertendo la relazione appena data si ottiene:

$$\prod_j a_j^{-\Delta_{ij}} = \mathbb{I} \text{ per } \forall i \quad (1.2.5)$$

Siccome prese due configurazioni $C, C' \in R$ esiste sempre un operatore $g \in G$ tale che $C' = gC$ allora G ed R hanno la stessa cardinalità, cioè $|R| = |G|$.

Come è dimostrato in [2] vale

$$|R| = |G| = \det \Delta \quad (1.2.6)$$

1.3 Classi di equivalenza ed invarianti di toppling

Lo spazio delle configurazioni costituisce un semigrupp commutativo sull'insieme dei vertici N con l'operazione di gruppo definita come la somma delle altezze seguita da rilassamento. Nello spazio delle configurazioni definiamo una relazione di equivalenza: date due configurazioni $Z = \{z_j\}$ e $Z' = \{z'_j\}$ diciamo che esse son equivalenti sotto l'operazione di toppling $Z \sim Z'$ se esiste una successione di N interi n_i tale che

$$z_j = z'_j + \sum_i n_i \Delta_{ij} \text{ per } \forall i \quad (1.3.1)$$

Ogni classe di equivalenza di toppling contiene una sola configurazione ricorrente. Ad ogni configurazione $Z = \{z_i\}$ possiamo associare una configurazione ricorrente C definita da

$$C[z_i] = \prod_i a_i^{z_i} C^* \quad (1.3.2)$$

dove C^* è una configurazione ricorrente assegnata. Se Z e Z' appartengono alla stessa classe di equivalenza allora avremo $C[z_i] = C[z'_i]$ infatti usando le relazioni di chiusura del gruppo G :

$$C[z'_i] = \prod_i a_i^{z'_i} C^* = \prod_i a_i^{z_i + \sum_i n_i \Delta_{ij}} C^* = \left(\prod_i a_i^{z_i} \right) \left(\prod_{ij} a_i^{\Delta_{ij} n_j} \right) C^* \quad (1.3.3)$$

$$= \left(\prod_i a_i^{z_i} \right) \left(\prod_j \left(\prod_i a_i^{\Delta_{ij}} \right)^{n_j} \right) C^* = \prod_i a_i^{z_i} C^* = C[z_i] \quad (1.3.4)$$

Quindi ad ogni classe di equivalenza corrisponde una ed una sola configurazione ricorrente. Esiste quindi una funzione suriettiva f dalle configurazioni alle classi di equivalenza ed una funzione biettiva g dalle classi

di equivalenza alle ricorrenti. Avremo allora che $g(f(\bullet))$ é una funzione suriettiva dalle configurazioni alle ricorrenti.

Passiamo ora ad introdurre gli invarianti di toppling, introdotti per la prima volta da Lee e Tzeng [6]. Definiamo un invariante di toppling come una funzione scalare definita sullo spazio di tutte le configurazioni della pila tale da avere lo stesso valore su tutte le configurazioni appartenenti alla stessa classe di equivalenza. Data la matrice di toppling Δ per una pila $Z = \{z_j\}$ composta da N siti definiamo altrettante funzioni scalari Q_i con $i = 1 \dots N$ nella seguente maniera:

$$Q_i(z_j) = \sum_j \Delta_{ij}^{-1} z_j \pmod{1} \quad (1.3.5)$$

Verifichiamo allora immediatamente che le Q_i cosí definite sono invarianti di toppling. Consideriamo la trasformazione di toppling nel vertice k -esimo definita come $Z = \{z_j\} \rightarrow Z' = \{z'_j = z_j - \Delta_{jk}\}$ allora otteniamo grazie alla linearità in z_i dei Q_i

$$Q_i(Z') = Q_i(Z) - \sum_j \Delta_{ij}^{-1} \Delta_{jk} = Q_i(Z) \pmod{1} \quad (1.3.6)$$

Benché le Q_i siano invarianti di toppling esse non sono invarianti sotto l'operazione di aggiunta di sabbia rappresentata dagli a_i . Infatti consideriamo l'aggiunta di sabbia sul vertice k -esimo a_k definita come $Z = \{z_j\} \rightarrow Z' = \{z'_j = z_j + \delta_{kj}\}$ allora otteniamo

$$Q_i(Z') = Q_i(Z) + \sum_j \Delta_{ij}^{-1} \delta_{jk} \neq Q_i(Z) \pmod{1} \quad (1.3.7)$$

in quanto Δ^{-1} ha entrate razionali.

Queste funzioni hanno ovviamente valori razionali, ma possono essere trasformate in interi moltiplicando per il numero appropriato. Quindi tali funzioni possono essere utilizzate per identificare le configurazioni ricorrenti, lo spazio delle ricorrenti può essere sostituito dall'insieme di N -uple (Q_1, Q_2, \dots, Q_N) ma questa identificazione è generalmente sovrabbondante, non sono tutti linearmente indipendenti.

Desideriamo ora estrarre dagli N invarianti di toppling Q_i un insieme minimale di invarianti linearmente indipendenti I_i . Mostriamo come questo possa essere fatto tramite l'impiego della Smith Normal Form per matrici intere [7] [8].

Teorema 1.3.1. *Ogni matrice Δ non-singolare $N \times N$ può essere scritta nella forma*

$$\Delta = ADB \quad (1.3.8)$$

dove A e B sono matrici intere $N \times N$ con determinante unitario e D è una matrice diagonale

$$D_{ij} = d_i \delta_{ij} \quad (1.3.9)$$

dove

- i) d_i è un multiplo di d_{i+1} per $\forall i$
- ii) $d_i = e_{i-1}/e_i$ dove e_i è il massimo comun divisore (gcd) dei determinanti dei minori $(N-i) \times (N-i)$ di Δ

La matrice D è determinata univocamente da Δ sotto queste condizioni mentre le matrici A e B non sono affatto uniche.

Definiamo allora gli invarianti I_i in termini di d_i

$$I_i(Z) = \sum_j A_{ij}^{-1} z_j \text{ mod } d_i \quad (1.3.10)$$

mostriamo che sono invarianti di toppling in maniera analoga a quanto fatto per i Q_i , utilizzando la relazione di equivalenza otteniamo:

$$I_i[z'_j] = \sum_j A_{ij}^{-1} z'_j = I_i[z_j] - \sum_{jk} A_{ij}^{-1} \Delta_{jk} n_k \quad (1.3.11)$$

$$= I_i[z_j] - \sum_{jklm} A_{ij}^{-1} A_{jl} D_{lm} B_{mk} n_k = I_i[z_j] - \sum_{jk} D_{ij} B_{jk} n_k \quad (1.3.12)$$

$$= I_i[z_j] - d_i \sum_k B_{ik} n_k = I_i[z_j] \text{ mod } d_i \quad (1.3.13)$$

Dalla definizione vale la seguente relazione fra i due invarianti:

$$I_i[Z] = \sum_j d_i B_{ij} Q_j[Z] \quad (1.3.14)$$

Solamente gli invarianti I_i per cui $d_i \neq 1$ sono d'interesse. Possiamo infatti mostrare che l'insieme di tali invarianti è minimale e completo. Detto g il numero degli I_i non banali, a ogni configurazione ricorrente

associamo una g -upla (I_1, I_2, \dots, I_g) dove tutti gli I_i sono interi di modulo d_i . Allora il numero totale di g -uple distinte sarà $\prod_{i=1}^g d_i = \det D = \det \Delta = |G| = |R|$ grazie alla proprietà $\det A = \det B = \pm 1$. Inoltre la mappa fra R e g -uple è biunivoca. Definiamo infatti l'operatore e_i come segue

$$e_i = \prod_{j=1}^N a_j^{A_{ij}} \text{ per } 1 \leq j \leq g \quad (1.3.15)$$

Agendo con l'operatore e_i su di una configurazione arbitraria $C^* \in R$ otteniamo la trasformazione $z_j \rightarrow z_j + A_{ij}$. Se la configurazione C^* corrispondeva alla g -upla $(I_1^*, I_2^*, \dots, I_g^*)$ la configurazione $e_i C^*$ corrisponderà a $I_j = I_j^* + \delta_{ij}$ come segue direttamente dalla definizione di I . Agendo con gli operatori e_i possiamo allora ottenere tutte le g -uple e ad ognuna di esse far corrispondere una configurazione ottenuta da C^* . Avendo gli spazi la stessa cardinalità abbiamo dimostrato quanto ci eravamo prefissi.

Possiamo esprimere gli a_j in termini degli e_i invertendo la definizione, otteniamo:

$$a_j = \prod_{i=1}^g e_i^{A_{ij}^{-1}} \quad (1.3.16)$$

gli e_i generano quindi il gruppo G su R . Siccome gli invarianti I_i sono definiti mod(d_i) allora gli operatori e_i soddisfano la relazione di chiusura

$$e_i^{d_i} = \mathbb{I} \text{ per } i = 1, \dots, g \quad (1.3.17)$$

Un gruppo ciclico è un gruppo che può essere generato da un solo elemento. Il teorema fondamentale per i gruppi abeliani finitamente generati asserisce che ogni gruppo abeliano finitamente generato è prodotto di gruppi ciclici.

$$G = Z_{d_1} \times Z_{d_2} \times \dots \times Z_{d_g} \quad (1.3.18)$$

con d_i definiti nella Smith Normal Form.

Con questa sezione abbiamo terminato la presentazione generale della pila di sabbia abeliana. Possiamo ora porci molte domande sulle strutture e sull'evoluzione di questo sistema. Molti di questi aspetti sono già stati investigati. Per esempio la taglia delle valanghe, su grafi semplici e non, è stata studiata in [1, 9, 10], trovando che esistono principalmente due tipi di valanghe: a breve raggio che scalano come R^2 e lungo raggio che

scalano come R . Nel prossimo capitolo ci concentreremo invece su un aspetto radicalmente diverso: il periodo.

Capitolo 2

Periodo di Toppling su catene lineari

Come abbiamo mostrato nel capitolo precedente le configurazioni di una pila abeliana si dividono in transienti e ricorrenti. Abbiamo inoltre osservato come applicando reiteratamente l'operatore a_i su una configurazione si possa raggiungere, dopo una successione di configurazioni transienti, un ciclo di configurazioni ricorrenti di periodo finito. Assegnata una pila abeliana, presa una configurazione qualsiasi ricorrente C , chiamiamo periodo di a_i sulla pila il numero più piccolo di volte T_i (intervalli di tempo discreti) che devo applicare a_i a C per ritornare in essa stessa. cioè:

$$(a_i)^{T_i}C = C \tag{2.0.1}$$

Notiamo come qualsiasi configurazione iniziale scelta conduca alla determinazione dello stesso periodo. Infatti come mostrato nel capitolo precedente, grazie alla abelianità di G , l'operatore a_j mappa cicli di a_i in cicli di a_i dello stesso periodo. L'obbiettivo del seguente capitolo è determinare il periodo della pila abeliana nella dinamica generata da a_i nel caso di grafi lineari con condizioni al contorno dissipative, daremo due possibili deduzioni della stessa formula. La dinamica sotto esame consiste quindi nell'aggiunta di sabbia nel vertice i -esimo, per questo motivo tale vertice è chiamato sorgente (sor), la sabbia viene poi dissipata ai bordi della catena.

2.1 La catena lineare

Ci restringiamo ora ad uno specifico modello di pila abeliana: la pila monodimensionale. Il grafo di tale pila è il più semplice immaginabile: presi N nodi essi vengono connessi fra loro in maniera tale che ogni nodo abbia due sole connessioni adirezionali. Fanno eccezione a tale regola di costruzione i due estremi di questa catena che hanno solamente una connessione verso gli altri vertici del grafo ed una connessione verso l'esterno dissipativa.

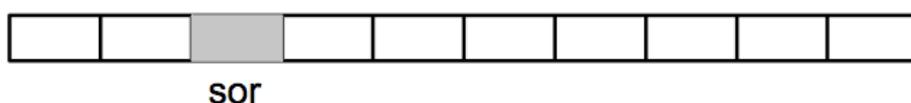


Figura 2.1: Catena lineare

La matrice Δ in questo caso assume la forma:

- i) $\deg(v_i) = \Delta_{ii} = 2$
- ii) $\Delta_{ij} = 1$ se $|x_i - x_j| + |y_i - y_j| = 1$
- iii) $\Delta = 0$ altrove

cioè:

$$\Delta = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Otteniamo quindi per gli operatori a_i definiti come nel capitolo precedente le seguenti relazioni:

$$a_i^2 = a_{i+1}a_{i-1} \quad (2.1.1)$$

ovvero in R :

$$a_{i+1} = a_i^2 a_{i-1}^{-1} \quad (2.1.2)$$

2.1.1 Periodo di catene lineari tramite invarianti

Vogliamo ora calcolare il periodo della catena lineare facendo uso di quanto appreso finora sugli invarianti di toppling. Consideriamo una pila abeliana costruita su di una catena di lunghezza L , fissato $i \in [1, \dots, L]$, vogliamo studiare il periodo T_i dell' operatore a_i . Dalla definizione di periodo sappiamo che:

$$a_i^{T_i} = \mathbb{I} \quad (2.1.3)$$

Prendiamo una configurazione $C \in R$ e aggiungiamo T_i grani di sabbia sul vertice i senza eseguire il rilassamento, ottenendo la configurazione C' . Gli invarianti di toppling di C' devono essere uguali a quelli della stessa configurazione dopo il rilassamento C'' e se vale $a_i^{T_i} = \mathbb{I}$ in R , allora $Q_k[C'] - Q_k[C] = 0$ per $\forall i$ poichè le due configurazioni saranno uguali.

$$Q_k[C'] - Q_k[C] = \sum_j \Delta_{kj}^{-1}(z'_j - z_j) = 0 \pmod{1} \quad (2.1.4)$$

Ora per $i \neq j$ abbiamo $z'_j - z_j = 0$, rimane quindi solo il caso $i = j$

$$Q_k[C'] - Q_k[C] = \Delta_{ki}^{-1}T_i = 0 \pmod{1} \quad (2.1.5)$$

Essendo $|R| = \det \Delta$ il periodo può essere al massimo $\det \Delta$. Moltiplicando per $\det \Delta$ e chiamando $E = \det(\Delta)\Delta^{-1}$ otteniamo che T_i è l'intero più piccolo soddisfacente l'equazione

$$E_{ki}T_i = 0 \pmod{\det \Delta}, \quad \text{per } \forall k \quad (2.1.6)$$

quindi

$$T_i = \frac{\det \Delta}{\gcd(E_{ki} : 1 \leq k \leq N)} \quad (2.1.7)$$

Questa formula è in realtà valida per qualunque grafo poichè non abbiamo ancora specificato la forma della matrice Δ . Notiamo però che per condizioni cicliche al contorno $\det \Delta = 0$. Applichiamo ora la formula al caso specifico che stiamo considerando e di cui conosciamo la matrice Δ .

Iniziamo dal calcolo di $\det \Delta$, considerando una matrice $N \times N$ siffatta:

$$\Delta_N = \begin{pmatrix} a & b & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b & a & b & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b & a & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & b \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b & a \end{pmatrix}$$

allora calcolando il determinante tramite il metodo dei minori otteniamo:

$$\det \Delta_N = a \det \Delta_{N-1} - b \det K = a \det \Delta_{N-1} - b[b \det \Delta_{N-2} - b \det L] \quad (2.1.8)$$

dove la matrice K è:

$$K = \begin{pmatrix} b & b & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b & a & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & b \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b & a \end{pmatrix}$$

e la matrice L è:

$$L = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b & a & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & b \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b & a \end{pmatrix}$$

si ha evidentemente $\det L = 0$. Otteniamo allora la regola di ricorsione

$$\det \Delta_N = a \det \Delta_{N-1} - b^2 \det \Delta_{N-2} \quad (2.1.9)$$

Da qui in avanti ci restringeremo al caso di nostro interesse cioè $a = 2$ e $b = -1$. Dimostriamo ricorsivamente che $\det \Delta_N = N + 1$. Per $N = 1$ si

ha $\det(2) = 2$ in accordo con la legge generale. Sostituendo nella legge di ricorsione ottengo

$$\det \Delta_N = 2(N - 1 + 1) - (N - 2 + 1) = N + 1 \quad (2.1.10)$$

Ora dobbiamo calcolare $\gcd(E_{ij} : 1 \leq j \leq N)$. Per comodità chiamiamo $M_j = \gcd_i(E_{ij})$ dove $E_{ij} = \det \Delta \cdot \Delta^{-1}$. Per il calcolo di Δ^{-1} utilizziamo il metodo di Cramer, indicando con $\Delta(i|j)$ il minore della matrice Δ ottenuto eliminando la riga i e la colonna j , avremo allora:

$$M_j = \gcd_i(\det \Delta \cdot \Delta_{ij}^{-1}) = \gcd_i[(\text{cof}_{ij} \Delta)^T] \quad (2.1.11)$$

dove $\text{cof}_{ij} \Delta = (-1)^{i+j} \det \Delta(i|j)$ sono i cofattori della matrice.

Trascurando i segni per comodità, si ottiene infine che, data la simmetria di Δ :

$$M_j = \gcd_i[\det \Delta(i|j)] \quad (2.1.12)$$

Ora calcolo $\det \Delta(i|j)$, vale la formula

$$\det \Delta(i|j) = (N + 1 - \max(i, j))(\min(i, j)) \quad (2.1.13)$$

che può essere dimostrata ricorsivamente. Consideriamo le matrici $\Delta(i|j)$ e $\Delta(i-1|j)$ esse soddisfano la relazione di ricorsione $\det \Delta(i|j) = b \det \Delta(i-1|j)$. Sostituendo nella relazione di ricorsione $\det \Delta(i-1|j) = (N - \max(i-1, j))(\min(i-1, j))$ si dimostra allora la relazione cercata.

Abbiamo quindi raggiunto la formula:

$$M_j = \gcd_i[(N + 1 - \max(i, j)) \cdot \min(i, j)] \quad (2.1.14)$$

questa espressione può essere ancora notevolmente semplificata così da eliminare la dipendenza dall'indice i . Notiamo infatti che gli elementi interni alla matrice M sono multipli degli elementi ai bordi:

$$M_{j1} = (N - j + 1) \quad M_{ji} = M_{j1}i \text{ per } i < j \quad (2.1.15)$$

$$M_{jN} = j \quad M_{ji} = M_{jN}(N - i + 1) \text{ per } i > j \quad (2.1.16)$$

Quindi, usando le proprietà del gcd (algoritmo di Eulero) abbiamo:

$$M_j = \gcd(N + 1 - j, j) = \gcd(N + 1, j) \quad (2.1.17)$$

In conclusione:

$$T_i = \frac{N + 1}{\gcd(N + 1, i)} \quad (2.1.18)$$

Abbiamo ottenuto la formula che ci eravamo prefissi. Il periodo dipenderà dalla dimensione (lunghezza) della catena lineare e dalla posizione della sorgente i .

2.1.2 Periodo di catene lineari tramite relazione di chiusura

Mostriamo ora un secondo metodo per il calcolo dei periodi su di una pila costruita su di un grafo lineare. Questo metodo fa uso delle relazioni esistenti fra gli operatori a_i per determinare il periodo.

Consideriamo gli operatori a_i , definiti come nel capitolo precedente: operatori di aggiunta di sabbia sul vertice e rilassamento conseguente. Allora come già osservato tali operatori devono soddisfare le seguenti relazioni, differenti per vertici interni e sul bordo del grafo.

$$a_i^2 = a_{i+1}a_{i-1} \text{ per } \forall i \in [2, \dots, N - 1] \quad (2.1.19)$$

$$a_i^2 = a_{i+1} \quad \text{per} \quad i = 1 \quad (2.1.20)$$

$$a_i^2 = a_{i-1} \quad \text{per} \quad i = N \quad (2.1.21)$$

Tali regole di toppling possono essere lette come regole di ricorsione. Scelto un operatore a_i tutti gli altri operatori a_j con $j \neq i$ possono essere scritti in funzione di quest'ultimo. Per semplicità prendiamo come generatore a_1 . Notiamo che in generale ogni operatore ha bisogno di altri due generatori per essere scomposto ma avendo due condizioni al contorno, nell'estremo destro ed in quello sinistro, possiamo ridurre ad uno il numero dei generatori e calcolare il periodo della pila. Rimane allora un solo generatore indipendente notiamo quindi che $|G| = 1$, cioè il gruppo G è ciclico.

Dalla relazione di chiusura a sinistra sappiamo che

$$a_2 = a_1^2 \quad (2.1.22)$$

allora dalla regola di ricorsione generale

$$a_i^2 = a_{i+1}a_{i-1} \text{ per } \forall i \in [2, \dots, N-1] \quad (2.1.23)$$

otteniamo la formula che esprime l'operatore generico a_i in funzione del generatore a_1

$$a_i = a_1^i \quad (2.1.24)$$

Questa formula è facilmente dimostrabile ricorsivamente, per $i = 1$ è verificata banalmente, per $a_{i+1} = a_i^2 a_{i-1}^{-1}$ sostituendo si ottiene $a_{i+1} = a_1^{i+1}$ in accordo con la formula generale.

Gli operatori di bordo destro risulteranno allora essere

$$a_N = a_1^N \quad \text{e} \quad a_{N-1} = a_1^{N-1} \quad (2.1.25)$$

applicando la seconda relazione di chiusura

$$a_N^2 = a_{N-1} \quad (2.1.26)$$

otteniamo

$$a_1^{N+1} = \mathbb{I} \quad (2.1.27)$$

Osserviamo dunque che la taglia del toro generato da a_1 è $N + 1$. Vogliamo ora studiare il periodo della dinamica generata dall'operatore $a_i = a_1^i$, a tal fine richiamiamo la definizione di periodo T_i : l'intero più piccolo tale che $a_i^{T_i} = \mathbb{I}$. Da quanto puntualizzato in precedenza vediamo come il periodo T_i sia il più piccolo intero soddisfacente la relazione $T_i \times i = k \times N + 1$ con $k \in \mathbb{N}$, da cui

$$T_i = \frac{N + 1}{\gcd(N + 1, i)} \quad (2.1.28)$$

Tale formula è in perfetto accordo con quella calcolata nel paragrafo precedente.

2.1.3 Notazione con gli esponenti

Vogliamo ora implementare un algoritmo analogo a quello della sezione precedente utilizzando una notazione più sintetica. Tale algoritmo si rivelerà di grande utilità in seguito mentre nel caso della catena lineare

può sembrare banale. Dalla sezione precedente abbiamo appreso che ogni operatore a_j può essere scritto in funzione di altri n operatori a_1, \dots, a_n nel seguente modo generale:

$$a_j = \prod_{k=1}^n a_k^{e_{k,j}} \quad (2.1.29)$$

Possiamo allora rappresentare l'operatore j -esimo con un vettore a n componenti, dove le componenti sono gli esponenti e degli operatori.

$$\begin{pmatrix} e_{1,j} \\ e_{2,j} \\ \vdots \\ e_{n,j} \end{pmatrix} \quad (2.1.30)$$

Le operazioni di moltiplicazione ed elevamento degli operatori si riducono quindi ad operazioni rispettivamente di somma e moltiplicazione per scalare.

Applicando questa rappresentazione alla pila abeliana su catena lineare otteniamo che l'operatore a_i è rappresentato sulla base a_1 dal vettore ad una componente

$$(i) \quad (2.1.31)$$

Applicando ora la condizione al contorno destra otteniamo

$$2 \cdot (N) = (N - 1) \implies (N + 1) = 0 \quad (2.1.32)$$

Evidentemente la condizione di periodicità che identifica il periodo diventerà:

$$a_i^{T_i} = 1 = a_i^0 \implies T_i = 0 \quad (2.1.33)$$

da cui la relazione per il periodo già trovata nelle sezioni precedenti.

$$T_i \times i = k \times (N + 1) \quad k \in \mathbb{N} \quad (2.1.34)$$

2.2 Simulazione numeriche

Le simulazioni numeriche, illustrate in questo paragrafo, supportano pienamente i concetti e le formule fin qui esposti.

I programmi sono stati strutturati secondo il seguente schema: scelta la lunghezza della catena vengono create delle configurazioni stabili con altezze casuali, scelta la posizione di aggiunta di sabbia il sistema viene fatto evolvere finchè la configurazione raggiunta non è già stata occupata dal sistema. Il numero di configurazioni esplorate fra le due configurazioni identiche é appunto detto periodo.

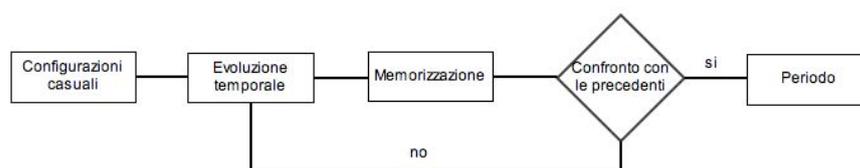


Figura 2.2: Schema delle simulazioni in c++

In primo luogo possiamo verificare che al variare della configurazione casuale iniziale il numero di configurazioni transienti, prima del raggiungimento del ciclo, può variare fortemente mentre il periodo rimane invariato. Tale verifica è stata eseguita con 1000 configurazioni iniziali differenti per lunghezze della catena $N = 5, 30, 70, 99$ trovando sempre accordo con le previsioni.

In secondo luogo possiamo verificare la formula dei periodi, scegliendo una lunghezza arbitraria e variando la posizione della sorgente dal primo all'ultimo vertice. Le simulazioni eseguite con varie lunghezze si sono sempre dimostrate in accordo con la teoria. Possiamo osservare le forti variazioni di periodo dovute alla posizione della sorgente e la simmetria del grafico rispetto allo scambio $j \rightarrow N + 1 - j$, peculiarità della funzione gcd. Riportiamo qui il grafico ottenuto per $N = 99$.

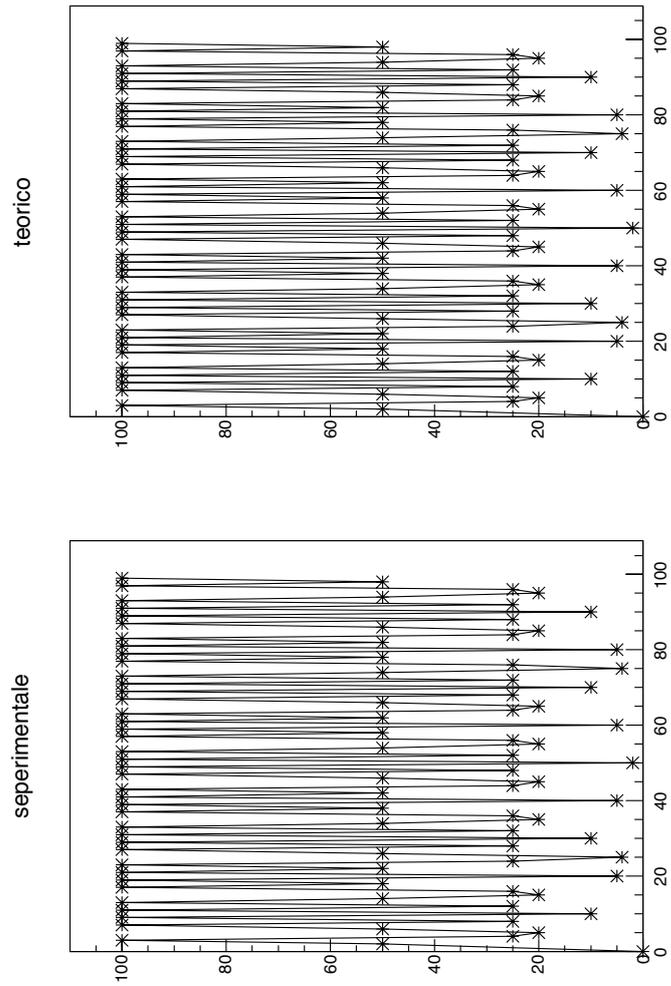


Figura 2.3: Confronto periodo sperimentale e teorico al variare della posizione della sorgente in una catena lineare, $N=99$

Capitolo 3

La antipila di sabbia

Come abbiamo sottolineato nel primo capitolo, con la sola aggiunta di sabbia, condizioni stazionarie possono essere ottenute solo con condizioni al contorno dissipative. Pile di sabbia su grafi chiusi come anelli o tori non possono essere studiate dal punto di vista del periodo. Introduciamo allora una seconda possibile operazione sulla pila: la sottrazione di sabbia e relativo rilassamento. Questa operazione è chiamata antitoppling perchè strettamente legata al toppling, come vedremo successivamente. Utilizzando contemporaneamente toppling e antitoppling siamo in grado di creare configurazioni di sabbia ricorrenti anche su grafi chiusi.

3.1 Antitoppling

3.1.1 Regole di antitoppling

Come per il toppling introduciamo un' altezza critica \underline{z}_i , una configurazione sarà stabile relativamente all'operazione di antitoppling se $z_i > \underline{z}_i$. Le regole di evoluzione temporale dell'operazione di antitoppling sono equivalenti a quelle di toppling:

i) **Sottrazione di sabbia**

Ad ogni passo un granello di sabbia viene sottratto in uno dei nodi del grafo con probabilità p_i . Se la nuova configurazione soddisfa già la condizione di stabilità $z_i > \underline{z}_i$ si passa al prossimo passo, se invece $\exists i$ tale che la condizione suddetta non è soddisfatta la

configurazione è instabile e deve evolvere finchè non raggiunge tale condizione.

ii) **Antitoppling**

L'operazione di antitoppling permette alla pila di raggiungere la stabilità dopo la sottrazione di sabbia. Se $z_i < \underline{z}_i$ nel nodo i -esimo allora tale vertice sottrae un granello ad ognuno dei suoi vicini a proprio vantaggio cioè matematicamente: $z_j \rightarrow z_j + \Delta_{ij}$ per $j = 1 \dots N$. La nuova configurazione così raggiunta può essere stabile o instabile, l'operazione di antitoppling viene ripetuta fino al raggiungimento della stabilità.

Dove la matrice Δ , $N \times N$, è caratterizzata come nel primo capitolo. Notiamo allora che vi sono allora solamente due differenze nella dinamica della pila e della antipila: la soglia di antitoppling \underline{z}_i diversa da quella di toppling $z_i^c = \bar{z}_i$ e il segno nella relazione di evoluzione davanti alla matrice Δ . Anche in questa occasione possiamo scegliere la soglia arbitrariamente $\underline{z}_i = 0$ per $\forall i$, in questo modo altezze negative sono instabili.

3.1.2 Gli operatori a_i^\dagger

Sempre in analogia con il toppling introduciamo gli operatori a_i^\dagger che agiscono su di una configurazione stabile Z . La configurazione $a_i^\dagger Z$ è la configurazione ottenuta togliendo un grano di sabbia in posizione i e lasciando rilassare il sistema tramite antitoppling fino al raggiungimento della stabilità. Abbiamo allora

$$[a_i^\dagger, a_j^\dagger] = 0 \text{ per } \forall i \tag{3.1.1}$$

Gli a_i^\dagger soddisfano le regole di chiusura:

$$(a_i^\dagger)^{\Delta_{ii}} = \prod_{j \neq i} (a_j^\dagger)^{-\Delta_{ij}} \text{ per } \forall i \tag{3.1.2}$$

Come mostreremo nella prossima sezione per gli operatori a_i^\dagger valgono tutte le considerazioni valide per gli a_i riguardanti configurazioni transienti e ricorrenti, tra cui la formula per il periodo di catene lineari.

3.2 Toppling ed Antitoppling

3.2.1 Analogie

Riprendendo [11] definiamo la pila abeliana formata da N vertici come una terna $A = A(\Delta, \bar{z}, \underline{z})$ dove $\bar{z} = \{\bar{z}_i\}$ e $\underline{z} = \{\underline{z}_i\}$ sono le due soglie di toppling ed antitoppling che devono soddisfare la relazione $\bar{z}_i - \underline{z}_i > 0$. Allora definiamo gli spazi

$$S_+ = \{z_i \in \mathbb{Z}, z_i \geq \underline{z}_i | \forall i\} \quad (3.2.1)$$

$$S_- = \{z_i \in \mathbb{Z}, z_i \leq \bar{z}_i | \forall i\} \quad (3.2.2)$$

$$S = S_+ \cap S_- = \{z_i \in \mathbb{Z}, \underline{z}_i \leq z_i \leq \bar{z}_i | \forall i\} \quad (3.2.3)$$

una pila è stabile se la sua configurazione $Z \in S$. Allora definiamo gli operatori di rilassamento t (mentre gli operatori a saranno la composizione di aggiunta/rimozione sabbia e degli operatori t) :

$$t_i(z_j) = z_j - \Delta_{ij} \quad \forall j \quad S_+ \rightarrow S \quad (3.2.4)$$

$$t_i^\dagger(z_j) = z_j + \Delta_{ij} \quad \forall j \quad S_- \rightarrow S \quad (3.2.5)$$

Vediamo allora come la trasformazione lineare:

$$I : z_i \rightarrow z'_i = \bar{z}_i + \underline{z}_i - z_i \quad (3.2.6)$$

scambia il ruolo degli operatori contraddistinti da \dagger e non. Fissate le soglie come in precedenza otteniamo

$$I : z_i \rightarrow z'_i = \Delta_{ii} - 1 - z_i \quad (3.2.7)$$

Per gli operatori a_i^\dagger valgono allora tutte le considerazioni valide per gli a_i .

In particolare vogliamo sottolineare come si comportano gli invarianti di toppling sotto l'azione degli operatori di antitoppling. Verifichiamo immediatamente che gli invarianti di toppling sono anche invarianti di antitoppling. Consideriamo la trasformazione di antitoppling nel vertice k -esimo definita come $Z = \{z_j\} \rightarrow Z' = \{z'_j = z_j + \Delta_{jk}\}$ allora otteniamo

$$Q_i(Z') = Q_i(Z) + \sum_j \Delta_{ij}^{-1} \Delta_{jk} = Q_i(Z) \pmod{1} \quad (3.2.8)$$

Come per il toppling benché le Q siano invarianti di antitoppling esse non sono invarianti sotto l'operazione di rimozione di sabbia rappresentata dagli a_i^\dagger . Infatti consideriamo la rimozione di sabbia sul vertice k -esimo a_k^\dagger definita come $Z = \{z_j\} \rightarrow Z' = \{z'_j = z_j - \delta_{kj}\}$ allora otteniamo

$$Q_i(Z') = Q_i(Z) - \sum_j \Delta_{ij}^{-1} \delta_{jk} \neq Q_i(Z) \pmod{1} \quad (3.2.9)$$

Notiamo in oltre, confrontando la variazione di Q sotto aggiunta o rimozione di sabbia sul sito k , che sebbene $a_i a_i^\dagger Z \neq Z$

$$Q_i(Z') = Q_i(Z) - \sum_j \Delta_{ij}^{-1} \delta_{jk} \neq Q_i(Z) \pmod{1} \quad (3.2.10)$$

$$Q_i(Z') = Q_i(Z) + \sum_j \Delta_{ij}^{-1} \delta_{jk} \neq Q_i(Z) \pmod{1} \quad (3.2.11)$$

per gli invarianti di carica vale

$$Q_i(a_j a_j^\dagger Z) = Q_i(Z) \quad (3.2.12)$$

Cioè sebbene le configurazione Z non per forza torni in sé stessa sotto l'azione di $a_i a_i^\dagger$ gli invarianti di toppling lo fanno.

3.2.2 Commutatività

L'ordine di toppling ed antitoppling non può essere invertito. Presa una configurazione Z in cui i e j siano rispettivamente instabili positivamente e negativamente, la configurazione $t_i Z$ può essere stabile in j e la configurazione $t_j Z$ può essere stabile in i . L'ordine di toppling ed antitoppling è rilevante qualora i due operatori vengano mischiati cioè:

$$[a_i, a_j^\dagger] \neq 0 \quad \text{per } i \neq j \quad (3.2.13)$$

Questa proprietà ha profonde conseguenze. Utilizzando toppling e antitoppling separatamente, per conoscere lo stato finale di un sistema non erano rilevanti i passaggi ma si poteva aggiungere la sabbia nei vertici desiderati e far rilassare il sistema in ordine arbitrario. Al contrario utilizzando i due operatori accoppiati ogni passaggio dell'evoluzione temporale è rilevante ed i rilassamenti vanno eseguiti secondo l'ordine prestabilito.

3.2.3 Periodo di antitopping su catena lineare

Il periodo di toppling in posizione i coincide con quello di antitopping. Notiamo infatti che $\det \Delta^\dagger = \det \Delta$ e $(\Delta^{-1})_{i,j}^\dagger = (\Delta^{-1})_{j,i} = (\Delta^{-1})_{i,j}$ per simmetria, sostituendo nella formula per i periodi si ottiene

$$T_i^\dagger = \frac{\det \Delta^\dagger}{\gcd_j(\det \Delta^\dagger (\Delta^{-1})_{i,j}^\dagger)} = T_i \quad (3.2.14)$$

Ciò è inoltre confermato dalle simulazioni, costruite con il criterio già precedentemente utilizzato.

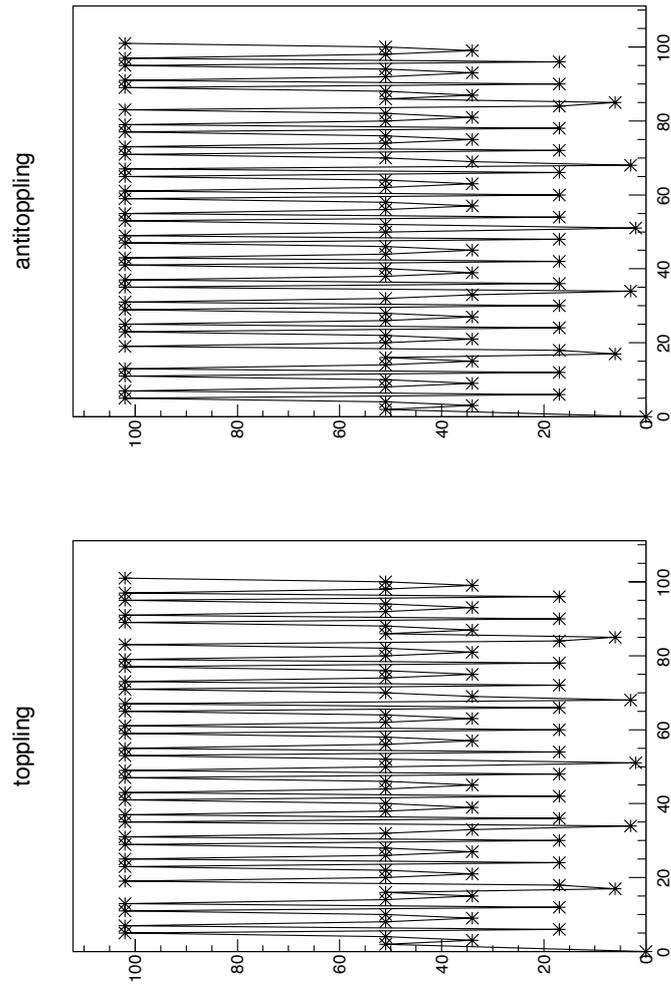


Figura 3.1: Confronto periodo toppling e antitoppling al variare della posizione della sorgente, $L=101$

3.3 Transienti e ricorrenti sotto gli operatori $a_i a_j^\dagger$

Come nel caso del toppling le configurazioni possono essere distinte in transienti e ricorrenti. Anche considerando la dinamica con gli operatori di toppling ed antitoppling accoppiati devono esistere delle configurazioni ricorrenti, essendo finite le configurazioni possibili devono esistere cicli di periodo finito.

Specifichiamo ora la relazione di ricorrenza facendo uso degli a e a^\dagger , una configurazione \bar{C} è ricorrente sotto $a_i a_j^\dagger$ se $\exists m_{ij}$ tali che:

$$(a_i \cdot a_j^\dagger)^{m_{ij}} \bar{C} = \bar{C} \quad (3.3.1)$$

una configurazione \bar{C} è ricorrente se $\exists m_{ij}$ tali che:

$$(a_i \cdot a_j^\dagger)^{m_{ij}} \bar{C} = \bar{C} \quad \forall i, j \quad (3.3.2)$$

Reiterando l'applicazione degli operatori $(a_i \cdot a_j^\dagger)$ raggiungiamo quindi un ciclo di ricorrenti. Quindi data una configurazione qualsiasi esistono due interi n, p tali che $(a_i \cdot a_j^\dagger)^{n+p} Z = Z$ dove p è il periodo ed n il numero di transienti prima di raggiungere il ciclo.

D'ora in avanti ritorneremo a chiamare ricorrenti (C) le configurazioni ricorrenti sotto la dinamica generata dai soli a_i e indicheremo genericamente con configurazioni Z le ricorrenti per $a_i a_j^\dagger$, salvo diversa indicazione. Cioé con ricorrente intendiamo ciò che si intendeva già nel primo capitolo.

Capitolo 4

Periodo toppling/antitoppling su grafi semplici

Questo capitolo analogo al secondo, è incentrato sulla determinazione del periodo di pile costruite su grafi semplici. Mentre nel capitolo 2 eravamo obbligati a trattare pile dissipative, su grafi aperti, adesso vogliamo indagare su grafi chiusi con condizioni cicliche al contorno. Come abbiamo già messo in luce per far ciò dobbiamo introdurre gli operatori di antitoppling presentati sopra e studiare il periodo di coppie di operatori $a_i a_j^\dagger$. Definiamo quindi il periodo come il più piccolo numero T_{ij} tale che:

$$(a_i a_j^\dagger)^{T_{ij}} \bar{C} = \bar{C} \quad (4.0.1)$$

con \bar{C} ricorrente per $a_i a_j^\dagger$. Definiamo come sorgente *sor* il vertice di aggiunta di sabbia i e pozzo *poz* quello di rimozione j . Notiamo che a differenza del secondo capitolo in questo caso il periodo può a priori dipendere dalla configurazione iniziale venendo a mancare la commutatività fra gli operatori a_i e a_i^\dagger .

4.1 Periodo su classi di equivalenza

L'algoritmo che presenteremo in seguito non permette di calcolare direttamente il periodo delle configurazioni ricorrenti dell'operatore $a_i a_j^\dagger$. L'algoritmo ci permette invece di calcolare il periodo sulle classi di equivalenza, cioè sulle ricorrenti di a_i , che invece non dipende dalla configu-

razione iniziale. Ricordiamo che indichiamo nel seguito con ricorrente le configurazioni ricorrenti per a_i .

Come abbiamo sottolineato nel primo capitolo ogni configurazione Z appartiene ad una classe di equivalenza ed ogni classe contiene una ed una sola configurazione ricorrente C per gli a_i . Ogni ricorrente sarà distinta da una N -upla di Q , trovare il periodo sulle ricorrenti equivale allora a chiedersi dopo quanti passi le cariche tornano in loro stesse. Cioè dato un operatore generico a equivale a determinare T tale che

$$Q_i(a^T C) = Q_i(C) \quad \text{per } \forall i \quad (4.1.1)$$

Ricordiamo che effettuando la rimozione di sabbia sul vertice k -esimo a_k^\dagger otteniamo

$$Q_i(Z') = Q_i(Z) - \sum_j \Delta_{ij}^{-1} \delta_{jk} \text{ mod } 1 \quad (4.1.2)$$

e che effettuando l'aggiunta di sabbia a_k otteniamo

$$Q_i(Z') = Q_i(Z) + \sum_j \Delta_{ij}^{-1} \delta_{jk} \text{ mod } 1 \quad (4.1.3)$$

Notiamo allora come $Q_i(a_j^{-1} Z) = Q_i(a_j^\dagger Z)$ o equivalentemente $Q_i(a_j a_j^\dagger Z) = Q_i(Z)$ e che quindi ai fini della determinazione dei periodi sulle ricorrenti gli operatori a_j^\dagger possono essere sostituiti da a_j^{-1} .

Vogliamo ora determinare come si relazionino il periodo delle configurazioni ed il periodo delle ricorrenti corrispondenti. Ricordiamo che $Q_i(Z) = Q_i(Z')$ è condizione necessaria ma non sufficiente perché $Z = Z'$ o che equivalentemente esiste una funzione suriettiva $g(f(\bullet))$ dalle configurazioni Z alle ricorrenti C . Tale condizione è invece necessaria e sufficiente sulle ricorrenti C . Avremo allora che il periodo delle configurazioni deve essere un multiplo di quello delle ricorrenti corrispondenti.

$$T^{\text{configurazioni}} = m \cdot T^{\text{ricorrenti}} \quad (4.1.4)$$

Quindi benché il periodo delle configurazioni possa dipendere dalla configurazione iniziale, i valori che può assumere sono molto ridotti da questa costrizione.

Notiamo come nel caso in cui si utilizzino solamente gli operatori a_i o a_i^\dagger separatamente si abbia

$$T^{\text{configurazioni}} = T^{\text{ricorrenti}} \quad (4.1.5)$$

infatti dopo un numero finito di transienti viene raggiunto il ciclo delle ricorrenti e la funzione $g(f(\bullet))$ diventa l'identità.

4.2 Catene lineari con pozzo e sorgente

Come primo sistema sotto esame consideriamo un catena lineare lunga N , identica a quella studiata nel secondo capitolo, ma la cui evoluzione è condotta dall'operatore $a_i a_j^\dagger$. Studiamo quindi una catena lineare con pozzo e sorgente.

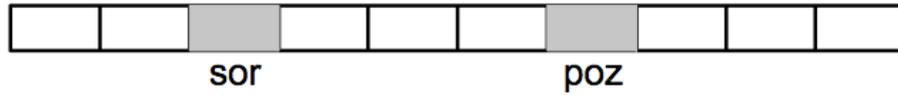


Figura 4.1: Esempio di grafo generico

Le relazioni di ricorsione fra gli operatori e le relazioni di chiusura sono identiche a quelle già considerate per la catena lineare con sola sorgente.

$$a_1^{N+1} = \mathbb{I} \quad (4.2.1)$$

A differenza di quanto fatto in precedenza studiamo ora il periodo dell'operatore

$$a_i a_j^\dagger = a_1^{i-j} \quad (4.2.2)$$

dalla definizione di periodo, in analogia con quanto fatto in precedenza, otteniamo sulle classi di equivalenza

$$T_{ij} = \frac{N+1}{\gcd(N+1, d)} \quad (4.2.3)$$

dove $d = i - j$ è la distanza fra pozzo e sorgente.

Utilizzando la notazione con gli esponenti, in questo caso con vettori unidimensionali, avremmo:

$$(N+1) = 0 \quad (4.2.4)$$

e applicando questa rappresentazione otteniamo che l'operatore $a_i a_j^\dagger$ è rappresentato sulla base a_1 dal vettore ad una componente

$$(i - j) \quad (4.2.5)$$

Si ottiene dunque la formula già ricavata.

Le simulazioni numeriche in questo caso mostrano come il periodo non dipenda dalla configurazione iniziale e il fattore moltiplicativo sia $m = 1$. Cioé

$$T^{\text{configurazioni}} = T^{\text{tricornenti}} \quad (4.2.6)$$

Quindi ogni catena lineare contenente pozzo e sorgente a distanza d è isocrona ad una con sola sorgente o solo pozzo in posizione d o $N + 1 - d$.

4.3 Catene circolari

Ci restringiamo ora ad un grafo molto particolare: la catena circolare. Questo grafo è identico alla catena lineare ma le condizioni al contorno saranno ora differenti. Nella catena lineare abbiamo due condizioni al contorno mentre ora ne abbiamo a disposizione una soltanto. Presa una catena di lunghezza N , composta da N vertici, scegliamo un vertice arbitrariamente e lo denominiamo sito 0, da quello contiamo tutti i vertici fino ad arrivare al vertice $N - 1$ adiacente al primo. Avremo allora come condizione al contorno:

$$a_0^2 = a_1 \cdot a_{N-1} \quad (4.3.1)$$

Mentre la matrice Δ prenderà la seguente forma:

$$\Delta = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Questa matrice soddisfacendo a condizioni al contorno cicliche ha $\det \Delta = 0$.

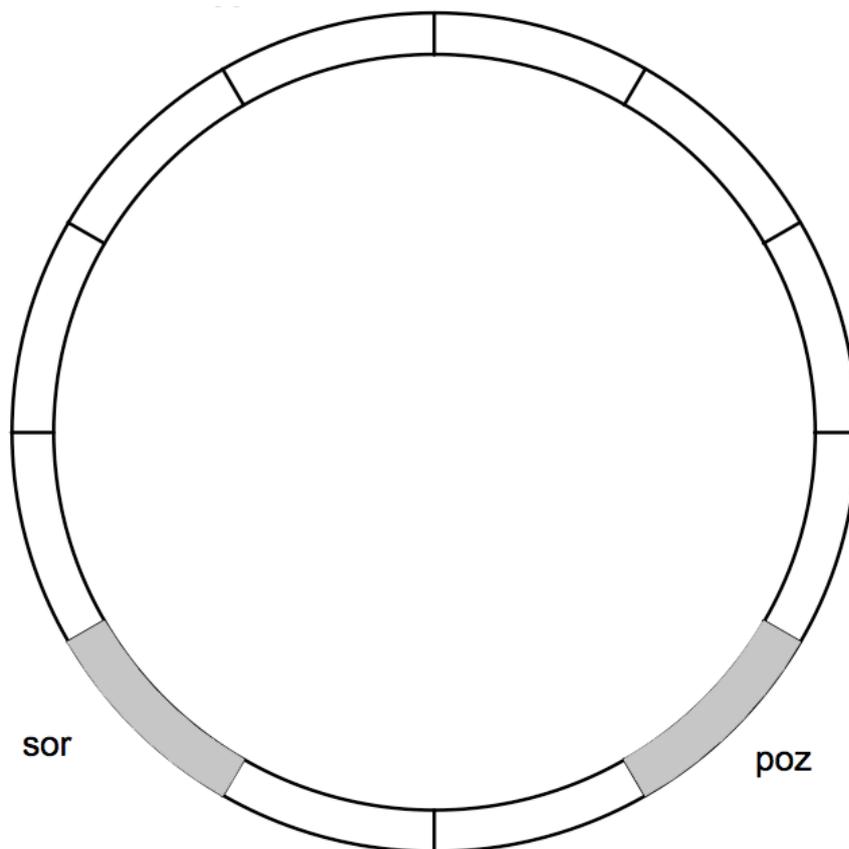


Figura 4.2: Catena circolare

4.3.1 Calcolo del periodo

Necessiteremo su questo grafo di due generatori per G , mancando la seconda condizione al contorno. Prendiamo come generatori del gruppo G gli operatori a_0 e a_1 , avremo allora che

$$a_i = a_0 \cdot \left(\frac{a_1}{a_0}\right)^i \quad (4.3.2)$$

Tale formula può essere dimostrata ricorsivamente: per $i = 0$ è ovviamente soddisfatta, per $i + 1$ sostituendo nella relazione di ricorsione $a_{i+1} = a_i^2 a_{i-1}^{-1}$ otteniamo $a_{i+1} = a_0 \cdot \left(\frac{a_1}{a_0}\right)^{i+1}$.

Calcoliamo allora l'operatore al bordo

$$a_{N-1} = a_0 \cdot \left(\frac{a_1}{a_0}\right)^{N-1} \quad (4.3.3)$$

applicando la condizione al contorno sopra enunciata otteniamo

$$a_0 \cdot \left(\frac{a_1}{a_0}\right)^{N-1} = \frac{a_0^2}{a_1} \quad (4.3.4)$$

da cui si ottiene

$$\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^N = \mathbb{I} \quad (4.3.5)$$

Vogliamo ora calcolare il periodo per la dinamica generata da $a_i a_j^\dagger$. Riscrivendo questo operatore in funzione dei generatori otteniamo a_0 e a_1 :

$$a_i a_j^\dagger = \left(\frac{a_1}{a_0}\right)^{i-j} \quad (4.3.6)$$

Come nel caso di catene lineari siamo ora in grado di estrarre il periodo, quest'ultimo è infatti il più piccolo intero soddisfacente la relazione $T_{ij} \times (i - j) = k \times N$ con $k \in \mathbb{N}$ cioè

$$T_{ij} = \frac{N}{\gcd(N, d)} \quad (4.3.7)$$

dove $d = i - j$ è la distanza fra pozzo e sorgente.

Come nel caso lineare possiamo sinteticamente utilizzare la notazione vettoriale, vettore degli esponenti. Associamo quindi naturalmente agli operatori a_0 e a_1 rispettivamente i vettori di esponenti

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.3.8)$$

In tal caso avremmo:

$$a_0^2 = a_1 \cdot a_{N-1} \quad \longrightarrow \quad 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2-N \\ N-1 \end{pmatrix} \quad (4.3.9)$$

da cui

$$\begin{pmatrix} -N \\ N \end{pmatrix} = 0 \quad (4.3.10)$$

In questa notazione l'operatore $a_i a_j^\dagger$ sarà rappresentato dal vettore

$$\begin{pmatrix} i - j \\ j - i \end{pmatrix} \quad (4.3.11)$$

Da cui la formula già ricavata in precedenza

$$T_{ij} \begin{pmatrix} i - j \\ j - i \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -N \\ N \end{pmatrix} \quad (4.3.12)$$

da cui, ponendo $k, T \in \mathbb{N}$ e T minimo, otteniamo la formula

$$T_{ij} = \frac{N}{\gcd(N, d)} \quad (4.3.13)$$

dove $d = i - j$ è la distanza fra pozzo e sorgente.

Osservazione 4.1. Notiamo come il periodo dipenda solamente dal modulo della distanza d fra pozzo e sorgente, grazie alle proprietà della funzione gcd, e non dal segno di tale distanza. Come conseguenza avremo che possiamo scambiare la posizione del vertice di toppling ed antitoppling senza variare il periodo.

4.3.2 Proprietà

Utilizzando le simmetrie dell'anello possiamo indagare alcune altre interessanti proprietà del suo periodo. Possiamo ad esempio dimostrare che il periodo dell'operatore $a_i a_j^\dagger$ è uguale a quello di $a_j^\dagger a_i$, possiamo quindi permutare l'ordine di applicazione.

Dato un anello contenente pozzo e sorgente: esiste sempre un asse che taglia in due l'anello tale che la rotazione dell'anello attorno ad esso soddisfi la sostituzione $pozzo \leftrightarrow sorgente$ ed esiste sempre un piano che taglia l'anello tale che la riflessione rispetto a quest'ultimo soddisfi la sostituzione $pozzo \leftrightarrow sorgente$. Inoltre assegnamo ai vertici del pozzo i ed della sorgente j un vettore rispettivamente entrante \downarrow ed uscente \uparrow dal piano contenente l'anello, (poz, i, \downarrow) e (sor, j, \uparrow) . Eseguiamo ora

la rotazione attorno all'asse suddetto, pozzo e sorgente si scambieranno di posizione come anche il verso dei due vettori: (poz, j, \uparrow) e (sor, i, \downarrow) . Eseguiamo in secondo luogo la riflessione rispetto al piano suddetto, pozzo e sorgente si scambieranno di posizione ma il verso dei due vettori rimarrà invariato: (poz, i, \uparrow) e (sor, j, \downarrow) . Evidentemente la catena in tutte queste trasformazioni non può aver cambiato periodo.

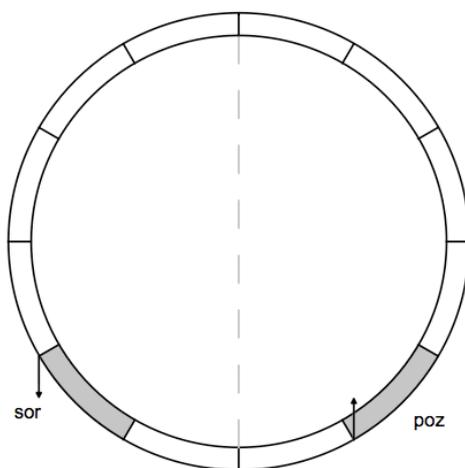


Figura 4.3: Anello iniziale

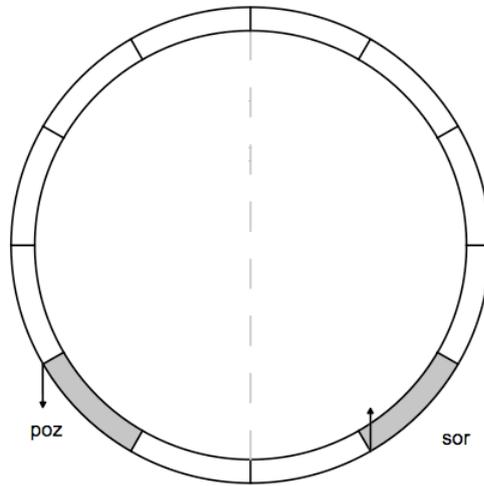


Figura 4.4: Rotazione asse

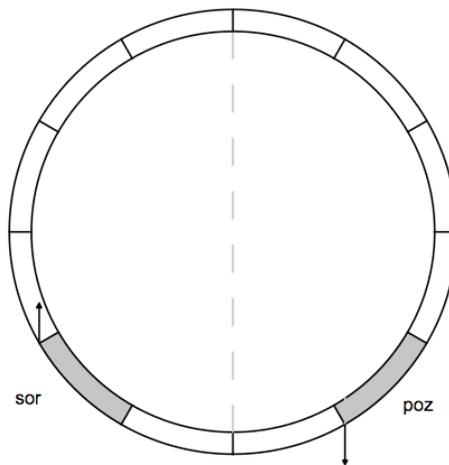


Figura 4.5: Riflessione piano

Associamo al verso del vettore l'ordine di esecuzione delle operazioni, per esempio viene eseguito prima \uparrow e poi \downarrow . Quindi seguendo le due evoluzioni

$$T(a_i a_j^\dagger) = T(a_i^\dagger a_j) = T(a_j^\dagger a_i) \quad (4.3.14)$$

Osservazione 4.2. Possiamo dedurre alcune proprietà della catena lineare da un semplice confronto fra il suo periodo e quello di una catena circolare:

$$T_d^{lin} = \frac{N+1}{\gcd(N+1, d)} \quad \text{e} \quad T_d^{cir} = \frac{N}{\gcd(N, d)}$$

Dal confronto delle due formule è evidente che una catena lineare di lunghezza $N+1$ e sorgente in d è isocrona ad una catena lineare di uguale lunghezza e distanza pozzo/sorgente d ed è isocrona ad una catena circolare di lunghezza N ed uguale distanza pozzo-sorgente.

La trasformazione $N+1 \rightarrow N$ ha una semplice spiegazione intuitiva. Una catena circolare lunga N può essere ottenuta prendendo una catena lineare lunga $N+1$ e facendo coincidere il vertice 1 ed il vertice $N+1$, in questa operazione il vertice $N+1$ viene eliminato. Viceversa tagliando la catena circolare in un vertice diverso da pozzo o sorgente otterremo una catena lineare contenente sia sorgente che pozzo.

Questa isocronia fra i due tipi di catena è molto significativa perchè permette di trasferire tutte le simmetrie riguardanti il periodo dell'anello al caso lineare: ad esempio il periodo nel modello lineare non dipende dalla traslazione di pozzo e sorgente, esattamente come nell'anello.

Osservazione 4.3. Nonostante questa similitudine il periodo può avere grandissime oscillazioni passando da sistemi circolari a lineari di uguale lunghezza. Prendiamo ad esempio una catena circolare di lunghezza N e distanza p/s $d = N/2$. Allora

$$T^{cir} = \frac{N}{\gcd(N/2, N/2)} = 2 \quad (4.3.15)$$

mentre per la catena lineare corrispondente

$$T^{lin} = \frac{N+1}{\gcd(N/2, N/2+1)} = N+1 \quad (4.3.16)$$

poichè due interi consecutivi non hanno mai divisori comuni.

4.3.3 Simulazioni numeriche

In primo luogo possiamo verificare che al variare della configurazione casuale iniziale il numero di configurazioni transienti, prima del raggiungimento del ciclo, può variare fortemente mentre il periodo rimane invariato. Tale verifica è stata eseguita con 1000 configurazioni iniziali differenti per lunghezze della catena $N = 5, 30, 70, 99$. Il periodo non è mai cambiato al variare della configurazione iniziale.

In secondo luogo possiamo calcolare il fattore moltiplicativo m fra i periodi delle configurazioni e quelli delle ricorrenti scegliendo una lunghezza arbitraria e variando la distanza pozzo sorgente. Le simulazioni eseguite con varie lunghezze si sono sempre dimostrate in accordo con il valore $m = 1$. Riportiamo qui il grafico ottenuto per $N = 102$ (prima figura).

Possiamo inoltre verificare numericamente la proprietà $T(a_i a_j^\dagger) = T(a_j^\dagger a_i)$. Utilizziamo sempre la stessa metodologia, fissiamo $N = 102$ e variamo la distanza fra pozzo e sorgente. Eseguiamo prima l'operazione di toppling e poi l'operazione di antitoppling o viceversa, il titolo sul grafico indica l'operazione svolta per prima.

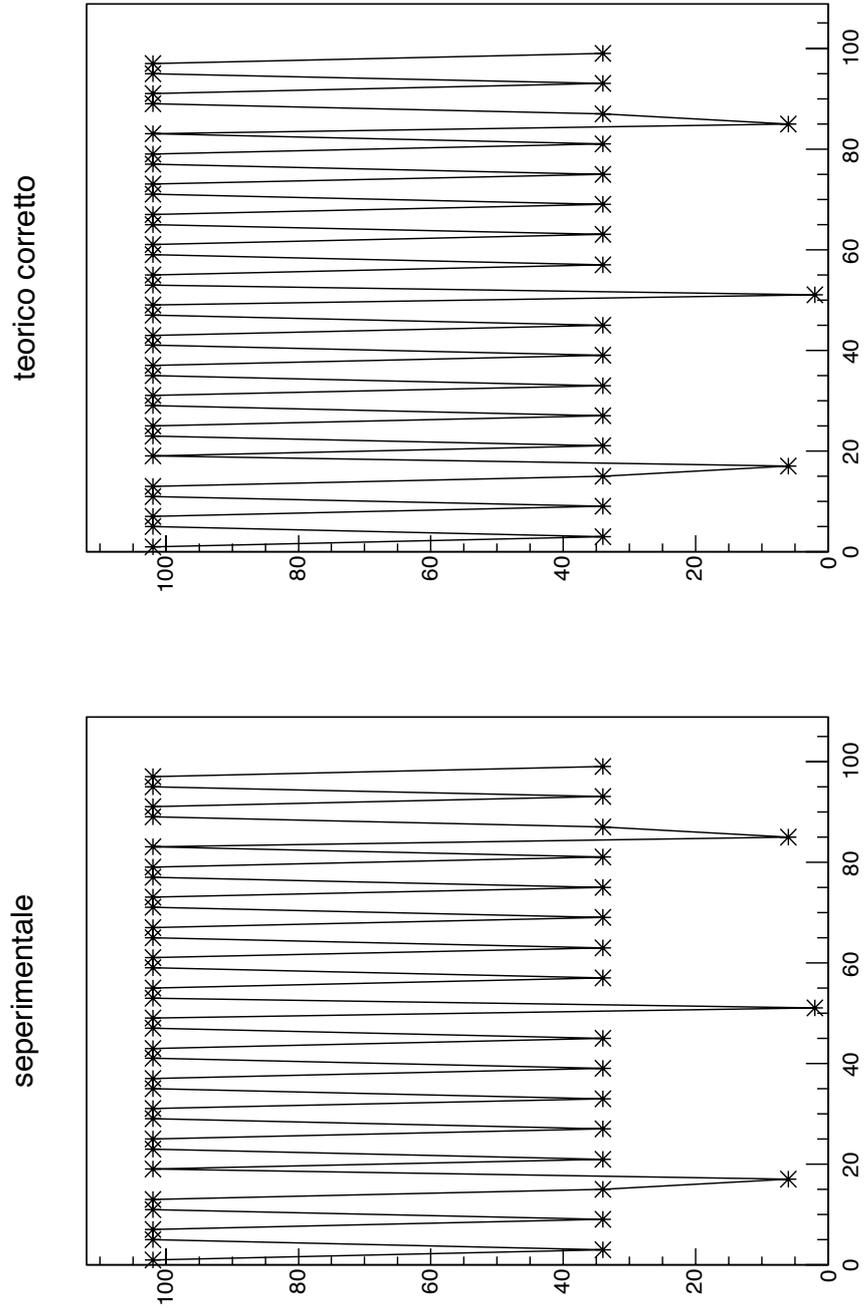


Figura 4.6: Confronto periodo sperimentale e teorico ($m = 1$) al variare della distanza pozzo/sorgente in una catena circolare, $N=102$

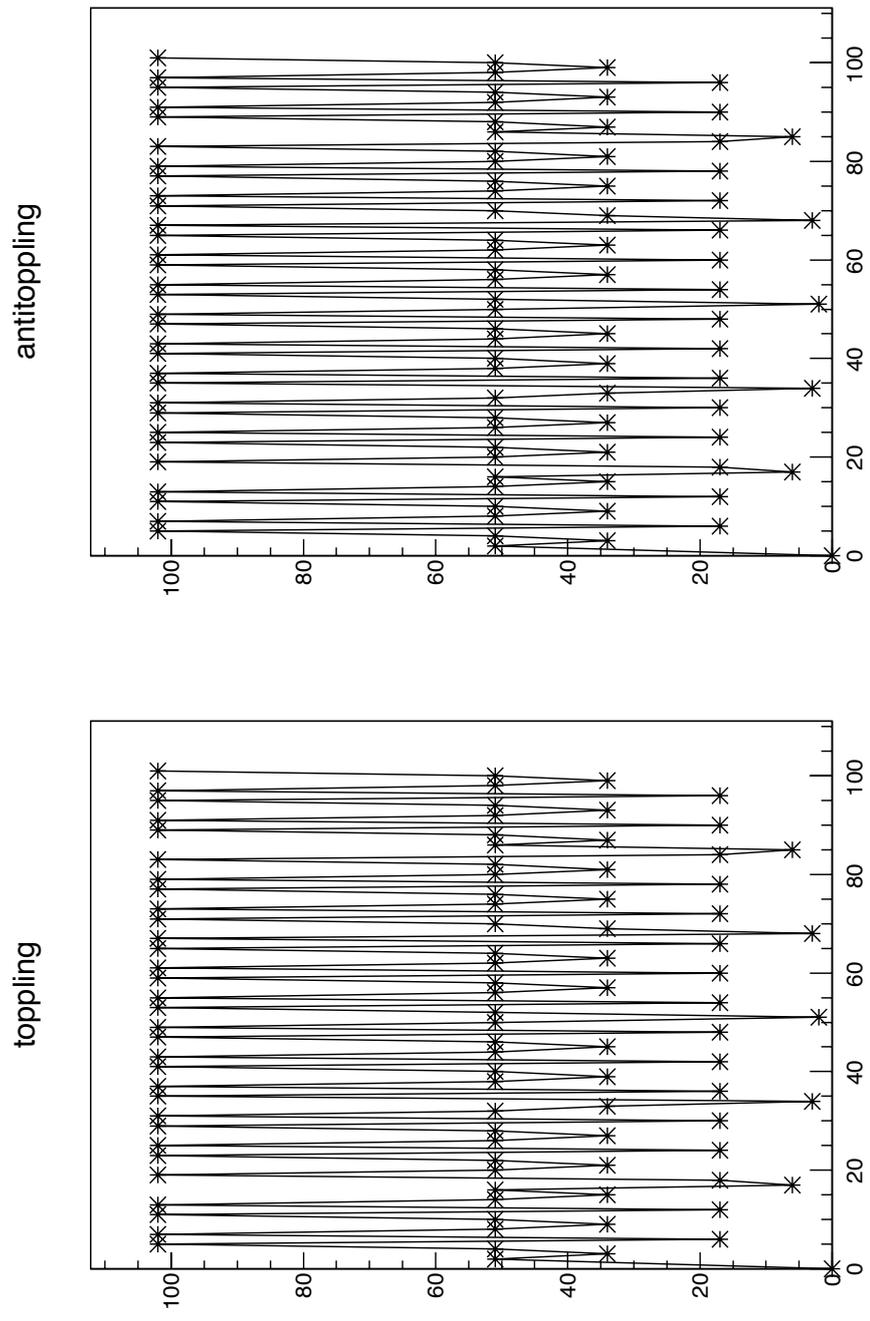


Figura 4.7: Confronto periodo sotto inversione temporale toppling antitoppling al variare della posizione della sorgente $N = 102$

4.4 Grafo completo

Prendiamo ora in considerazione un altro grafo che all'apparenza può sembrare complesso ma che mostra semplici proprietà: Il grafo completo. Il grafo completo è costituito da N vertici tutti connessi fra loro, cioè ogni vertice i possiede $N - 1$ connessioni singole con gli altri vertici. La pila di sabbia costruita su tale grafo sarà allora caratterizzata dalla matrice $N \times N$:

$$\Delta_N = \begin{pmatrix} N-1 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ -1 & N-1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ -1 & -1 & N-1 & \dots & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & N-1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & N-1 \end{pmatrix}$$

Abbiamo fissato la soglia superiore di instabilità a $N - 1$ e quella inferiore a 0, in analogia con quanto fatto in precedenza. Valgono allora le relazioni di ricorrenza:

$$a_k^{N-1} = \prod_{j \neq k} a_j \quad \text{per } \forall k \quad (4.4.1)$$

4.4.1 Calcolo del periodo tramite relazioni di chiusura

Utilizziamo le relazioni di ricorrenza otteniamo

$$a_k^{N-1} = \prod_{j \neq k} a_j = a_i \prod_{j \neq i, k} a_j \quad (4.4.2)$$

$$a_i^{N-1} = \prod_{j \neq i} a_j = a_k \prod_{j \neq i, k} a_j \quad (4.4.3)$$

da cui

$$a_i^N = a_k^N \quad (4.4.4)$$

otteniamo allora

$$\left(\frac{a_i}{a_k} \right)^N = \mathbb{I} \quad \forall i, k \quad (4.4.5)$$

Fissati allora pozzo e sorgente nei vertici k ed i , prendiamo come generatori a_k e a_i , utilizziamo il calcolo già usato in precedenza per trovare il periodo di

$$a_i a_k^\dagger = \frac{a_i}{a_k} \quad (4.4.6)$$

abbiamo dunque dalla definizione

$$T_{ij} = N \quad (4.4.7)$$

Utilizzando allora la notazione che fa uso dei vettori degli esponenti otteniamo

$$\begin{pmatrix} N \\ -N \end{pmatrix} = 0 \quad (4.4.8)$$

e che l'operatore $a_i a_k^\dagger$ è rappresentato sulla base suddetta da

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (4.4.9)$$

otteniamo allora la formula del periodo ricavata sopra.

4.4.2 Proprietà

Definita una configurazione $Z = \{z_j\}$ possiamo osservare varie proprietà della pila costruita sul grafo completo. Tali proprietà sono legate all'equivalenza di tutti i vertici del grafo diversi da pozzo e sorgente, infatti tutti i vertici hanno la stessa distanza sia da pozzo che sorgente (uguale a uno) e tutti i vertici condividono le stesse connessioni.

In primo luogo dimostriamo la seguente proprietà: Presi due vertici qualsiasi i e k della pila, diversi da pozzo e sorgente, tali da avere altezza uguale $z_i = z_k = z$ ad un istante fissato t_0 allora tali vertici avranno altezze uguali ad ogni tempo t . Ancora più in generale, considerati tutti i vertici N_z della pila con uguale altezza z ad un istante fissato t_0 , esclusi pozzo e sorgente, essi avranno sempre la stessa altezza ad ogni tempo t . Quest'ultima caratteristica, da cui la prima deriva, può essere semplicemente dimostrata considerando la dinamica del sistema in quattro diverse condizioni.

In una pila stabile le altezze accessibili sono $z \in [0, \dots, L - 2]$, indichiamo allora con N_z il numero di vertici della pila con altezza z al tempo zero, esclusi pozzo e sorgente. Consideriamo la dinamica della pila:

- i) Finchè il pozzo o la sorgente non eseguono rispettivamente toppling o antitoppling le altezze sui vertici della pila rimangono invariate
- ii) Qualora la sorgente faccia toppling e il pozzo sia stabile, gli N_{N-2} vertici di altezza $N - 2$ faranno toppling portandosi all'altezza $N_{N-2} - 1$. Tutti i vertici N_z a quota $z + N_{N-2}$. I vertici instabili eseguiranno toppling ma reiterando il ragionamento appena svolto vediamo come tutti i vertici N_z si portino sempre alla stessa altezza.
- iii) Se il pozzo esegue antitoppling ed la sorgente è stabile allora la situazione è analoga alla precedente. I vertici N_0 di altezza 0 faranno antitoppling portandosi all'altezza $N - 2 - (N_0 - 1)$ mentre gli altri vertici N_z ad altezza $z - N_0$.
- iv) Se entrambi pozzo e sorgente sono instabili ed eseguono rispettivamente toppling ed antitoppling possiamo reiterare i ragionamenti dei due punti precedenti svolgendo prima tutte le operazioni di toppling ed in seguito tutte quelle di antitoppling o viceversa, a seconda che si stia studiando la dinamica generata da $a_{sor}a_{poz}^\dagger$ o $a_{poz}^\dagger a_{sor}$.

4.4.3 Simulazioni numeriche

Come in precedenza le simulazioni supportano l'ipotesi che il periodo non dipenda dalla configurazione iniziale e che il fattore moltiplicativo sia $m = 1$. Riportiamo il grafico riguardante il periodo ottenuto come in precedenza fissando, N il numero di vertici e facendo variare la distanza pozzo/sorgente.

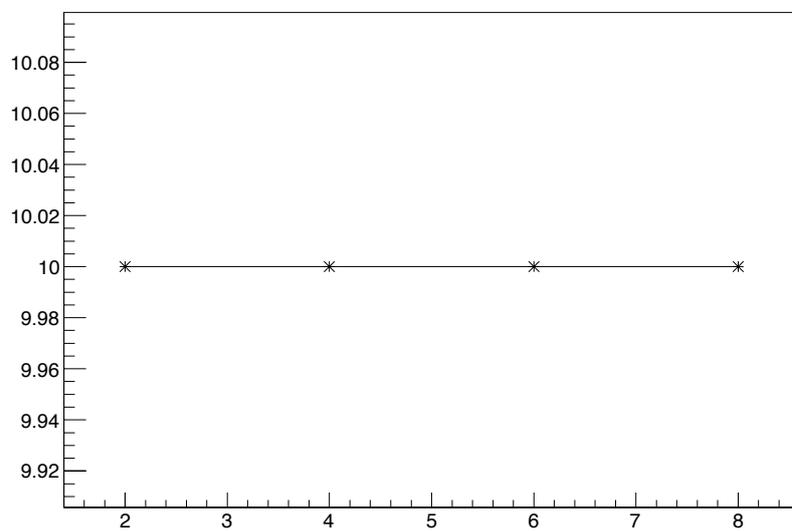


Figura 4.8: Periodo sperimentale al variare della posizione della sorgente di una pila su di un grafo completo, $N=10$

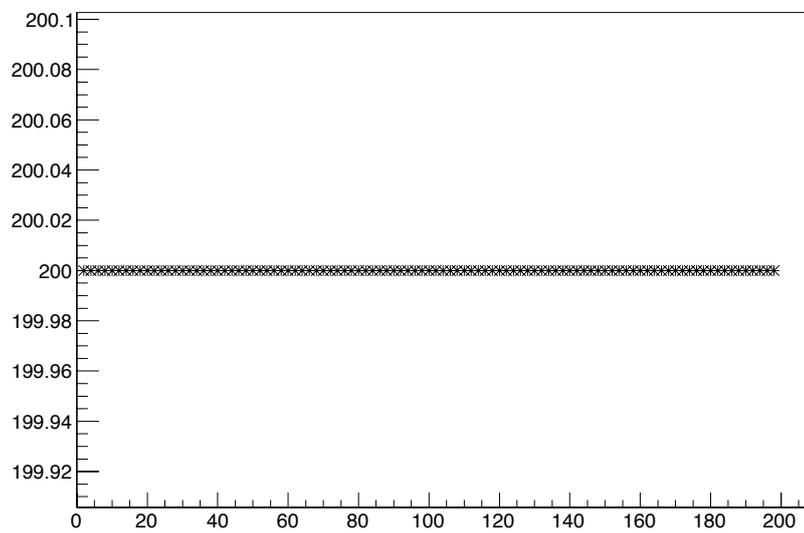


Figura 4.9: Periodo sperimentale al variare della posizione della sorgente di una pila su di un grafo completo, $N=200$

4.5 Il fattore moltiplicativo

All'inizio del capitolo abbiamo mostrato come il periodo delle configurazioni deve essere un multiplo di quello delle ricorrenti corrispondenti.

$$T^{\text{configurazioni}} = m \cdot T^{\text{ricorrenti}} \quad (4.5.1)$$

Abbiamo inoltre osservato che nel caso della dinamica generata dai soli operatori a_i questo fattore deve necessariamente essere $m = 1$. Nei casi fin qui studiati, come catene lineari, circolari e grafi completi, le simulazioni numeriche che abbiamo riportato mostrano come tale fattore sia identicamente uguale a 1.

Postulare che $m = 1$ per ogni operatore é equivalente a chiedere che per ogni operatore A non esistano due configurazioni Z e W diverse fra loro ed appartenenti alla stessa classe di equivalenza tali che

$$A^{n_1} Z = W \quad \text{e} \quad A^{n_2} W = Z \quad (4.5.2)$$

Cioè che nella stessa classe di equivalenza, contenente una sola ricorrente C per a_i , non vi siano due configurazioni ricorrenti \bar{C} per $a_i a_j^\dagger$. Questo mi permette di dire che completato il ciclo sulle ricorrenti di a_i devo essere tornato nella stessa configurazione ricorrente per $a_i a_j^\dagger$, cioè $m = 1$. Questa richiesta sembra una richiesta ragionevole.

Osserviamo in oltre che fissare m ad un valore per tutte le configurazioni impone che il periodo non possa dipendere dalla configurazione iniziale.

Purtroppo però, come mostreremo nella prossima sezione, all'aumentare della complessità del grafo questo postulato viene a cadere. Sul grafo che verrà ora mostrato il periodo delle configurazioni dipende dalla configurazione iniziale che si sceglie.

4.6 Tetoide

Consideriamo ora una pila di sabbia costruita su di un altro semplice grafo chiuso, tale grafo può essere considerato equivalentemente come la composizione di una circonferenza ed una catena lineare o di tre catene lineari. D'ora innanzi chiameremo il grafico in figura Tetoide per la somiglianza alla lettera greca Θ .

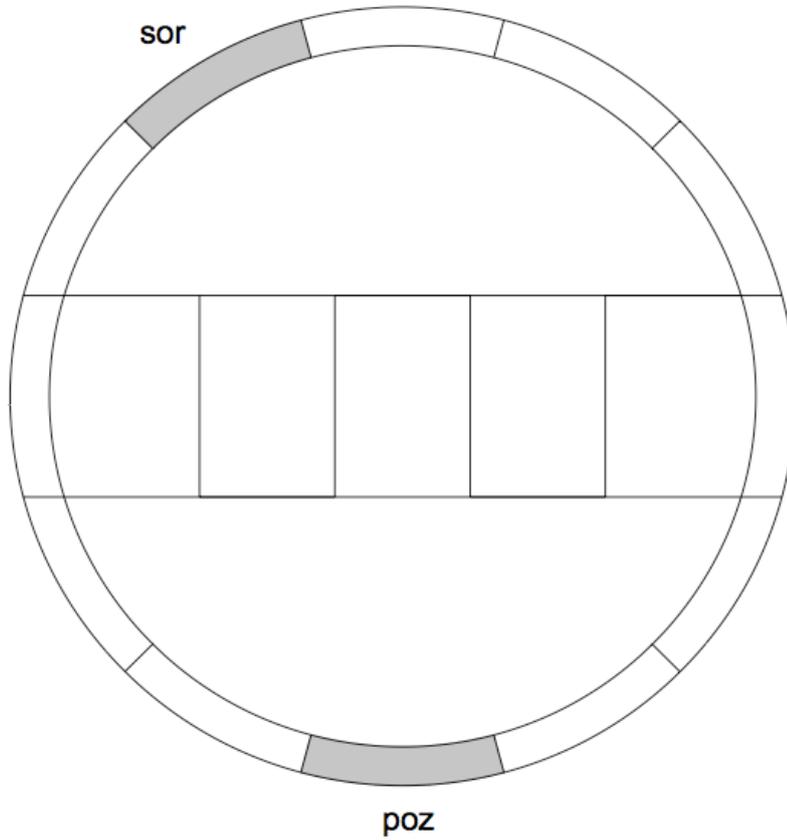


Figura 4.10: Grafo del Tetoide

In primo luogo indichiamo come indicizzare i vertici del grafo, indichiamo col pedice 0 ed F i vertici d' incontro delle tre catene (bracci) rispettivamente a sinistra e a destra, su di ogni catena utilizziamo la numerazione da 1 a $N - 1$ specificando poi con un pedice a, b, c su quale catena vada preso il vertice $(N - 1)$ -esimo. Ugualmente gli operatori di aggiunta o rimozione di sabbia saranno indicati come a_i, b_i o c_i a seconda della catena di appartenenza. Risulta quindi evidente che gli operatori a_0, b_0 e c_0 descrivono tutti la stessa operazione di aggiunta sul vertice 0 e che egualmente a_{N_a}, b_{N_b} e c_{N_c} descrivono l'operazione sul vertice F .

Dovranno quindi valere le condizioni:

$$a_0 = b_0 = c_0 \quad (4.6.1)$$

$$a_{N_a} = b_{N_b} = c_{N_c} \quad (4.6.2)$$

Studiamo ora le relazioni fra gli operatori. Lungo tutti e tre i bracci varrà la relazione valida per le catene circolari

$$x_{i+1} = x_i^2 x_{i-1}^{-1} \quad i \in [0, \dots, N_x - 1] \quad \text{per} \quad x \in [a, b, c] \quad (4.6.3)$$

mentre nei due vertici di incontro varranno le condizioni

$$a_0^3 = a_1 b_1 c_1 \quad (4.6.4)$$

$$a_F^3 = a_{(N_a-1)} b_{(N_b-1)} c_{(N_c-1)} \quad (4.6.5)$$

4.6.1 Calcolo del periodo

Scelti allora come generatori $a_0, a_1, b_0, b_1, c_0, c_1$, avremo tre leggi di ricorrenza, una per ogni braccio, analoghe a quelle proprie della catena circolare:

$$a_k = a_0 \left(\frac{a_1}{a_0} \right)^k \quad b_k = b_0 \left(\frac{b_1}{b_0} \right)^k \quad c_k = c_0 \left(\frac{c_1}{c_0} \right)^k \quad (4.6.6)$$

da cui calcoliamo gli operatori al bordo

$$a_{N_a} = a_0 \left(\frac{a_1}{a_0} \right)^{N_a} \quad b_{N_b} = b_0 \left(\frac{b_1}{b_0} \right)^{N_b} \quad c_{N_c} = c_0 \left(\frac{c_1}{c_0} \right)^{N_c} \quad (4.6.7)$$

Utilizziamo adesso la condizione sul vertice 0-esimo rinominando $a_0 = b_0 = c_0 = d$ e $a_1/a_0 = a$, $b_1/b_0 = b$, $c_1/c_0 = c$,

$$a_{N_a} = d(a)^{N_a} \quad b_{N_b} = d(b)^{N_b} \quad c_{N_c} = d(c)^{N_c} \quad (4.6.8)$$

Possiamo ora applicare la condizione di chiusura nel vertice F -esimo $a_{N_a} = b_{N_b} = c_{N_c}$:

$$d(a)^{N_a} = d(b)^{N_b} = d(c)^{N_c} \quad (4.6.9)$$

da cui

$$a^{N_a} = b^{N_b} = c^{N_c} \quad (4.6.10)$$

otteniamo allora due relazioni linearmente indipendenti

$$a^{N_a} = b^{N_b} \quad a^{N_a} = c^{N_c} \quad (4.6.11)$$

sostituendo nella seconda la relazione di toppling sul vertice 0, che con la nuova notazione prende la forma $a \cdot b \cdot c = \mathbb{I}$, otteniamo due relazioni linearmente indipendenti

$$(a)^{N_a} \cdot (b)^{-N_b} = \mathbb{I} \quad (a)^{N_a+N_c} \cdot (b)^{N_c} = \mathbb{I} \quad (4.6.12)$$

Vogliamo ora calcolare il periodo per la dinamica generata ponendo il pozzo e la sorgente su due bracci differenti cioè generata da $a_i b_j^\dagger$. Riscrivendo questo operatore in funzione dei generatori otteniamo

$$a_i b_j^\dagger = a^i \cdot b^{-j} \quad (4.6.13)$$

Per comodità passiamo alla notazione vettoriale. In questa notazione avremo che le relazioni di identità sono espresse come segue

$$\begin{pmatrix} N_a \\ -N_b \end{pmatrix} = 0 \quad \begin{pmatrix} N_a + N_c \\ N_c \end{pmatrix} = 0 \quad (4.6.14)$$

mentre l'operatore $a_i b_j^\dagger$ prende la forma

$$\begin{pmatrix} i \\ -j \end{pmatrix} \quad (4.6.15)$$

Dalla definizione di periodo osserviamo che il periodo deve essere in primo intero non nullo tale che valga la seguente relazione:

$$T \begin{pmatrix} i \\ -j \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} N_a \\ -N_b \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} N_a + N_c \\ N_c \end{pmatrix} \quad x, y \in \mathbb{N}$$

Le soluzioni di questa equazione saranno allora delle terne (T, x, y) di interi.

Iniziamo a risolvere il problema nel continuo cioè con $(T, x, y) \in \mathbb{R}$. In questo caso possiamo riscrivere l'equazione precedente come

$$\begin{pmatrix} i \\ -j \end{pmatrix} = \frac{x}{T} \begin{pmatrix} N_a \\ N_b \end{pmatrix} + \frac{y}{T} \begin{pmatrix} N_a + N_c \\ N_c \end{pmatrix} \quad (4.6.16)$$

o equivalentemente

$$\begin{pmatrix} i \\ -j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x/T \\ y/T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_a & N_a + N_c \\ -N_b & N_c \end{pmatrix} \quad (4.6.17)$$

invertendo questa relazione si trova che

$$\begin{pmatrix} x/T \\ y/T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \\ -j \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{D} \cdot \begin{pmatrix} N_c & -N_a - N_c \\ N_b & N_a \end{pmatrix} \quad (4.6.18)$$

dove $D = N_a N_b + N_a N_c + N_b N_c$. Otteniamo le due equazioni

$$x = \frac{iN_c + j(N_a + N_c)}{D} \cdot T \quad (4.6.19)$$

$$y = \frac{iN_b - jN_a}{D} \cdot T \quad (4.6.20)$$

Vogliamo ora ricondurci al caso in cui $(T, x, y) \in \mathbb{R}$ con T piú piccolo possibile. Per far ciò dobbiamo identificare T con il denominatore comune fra le due frazioni, operazione che ci riporta ad avere valori interi, dopo aver semplificato i termini comuni di entrambe, operazione necessaria per trovare il valore minimo di T . Tale denominatore sarà quindi

$$\frac{D}{\gcd(D, iN_c + j(N_a + N_c), iN_b - jN_a)} \quad (4.6.21)$$

da cui la formula

$$T_{ij} = \frac{D}{\gcd(D, iN_c + j(N_a + N_c), iN_b - jN_a)} \quad (4.6.22)$$

Analizziamo ora il caso particolare in cui $N_a = N_b = N_c = N$. In tal caso la formula per il periodo si semplifica enormemente diventando

$$T_{ij} = \frac{3N}{\gcd(3N, i + 2j, i - j)} \quad (4.6.23)$$

Notiamo come venga soddisfatta la simmetria $i \leftrightarrow j$, infatti si hanno le proprietà $\gcd(a, b) = \gcd(a, a - b)$ e $\gcd(a, b) = \gcd(a, -b)$ da cui

$$T_{ij} = \frac{3N}{\gcd(3N, j + 2i, j - i)} \quad (4.6.24)$$

4.6.2 Simulazioni numeriche

Riportiamo ora alcune simulazioni numeriche riguardanti il periodo della pila sul tetoide. Abbiamo preso in considerazione solamente il caso semplice in cui $N_a = N_b = N_c = N$ con la sorgente sul ramo a e il pozzo sul ramo b . Le simulazioni sono eseguite fissando la lunghezza N e muovendo pozzo e sorgente lungo i bracci separatamente. Si ottengono delle tabelle: sull'asse orizzontale é indicata la posizione della sorgente, su quello verticale quella del pozzo e si hanno come entrate i periodi. Abbiamo allora tre tabelle quella riportante il periodo delle ricorrenti, quella con il periodo delle configurazioni ed una terza tabella riportante il rapporto fra i due. La terza tabella riporta allora il fattore moltiplicativo m .

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
1	x	78	39	26	39	78	13	78	39	26	39	78	13	78	39	26	39	78	13	78	39	26	39	78
2	78	x	78	78	26	78	78	26	78	78	26	78	78	26	78	78	26	78	78	26	78	78	26	78
3	39	78	x	78	39	26	39	78	13	78	39	26	39	78	13	78	39	26	39	78	13	78	39	26
4	26	78	78	x	78	78	26	78	78	26	78	78	26	78	78	26	78	78	26	78	78	26	78	78
5	39	26	39	78	x	78	39	26	39	78	13	78	39	26	39	78	13	78	39	26	39	78	13	78
6	78	78	26	78	78	x	78	78	26	78	78	26	78	78	26	78	78	26	78	78	26	78	78	26
7	13	78	39	26	39	78	x	78	39	26	39	78	13	78	39	26	39	78	13	78	39	26	39	78
8	78	26	78	78	26	78	78	x	78	78	26	78	78	26	78	78	26	78	78	26	78	78	26	78
9	39	78	13	78	39	26	39	78	x	78	39	26	39	78	13	78	39	26	39	78	13	78	39	26
10	26	78	78	26	78	78	26	78	78	x	78	78	26	78	78	26	78	78	26	78	78	26	78	78
11	39	26	39	78	13	78	39	26	39	78	x	78	39	26	39	78	13	78	39	26	39	78	13	78
12	78	78	26	78	78	26	78	78	26	78	78	x	78	78	26	78	78	26	78	78	26	78	78	26
13	13	78	39	26	39	78	13	78	39	26	39	78	x	78	39	26	39	78	13	78	39	26	39	78
14	78	26	78	78	26	78	78	26	78	78	26	78	78	x	78	78	26	78	78	26	78	78	26	78
15	39	78	13	78	39	26	39	78	13	78	39	26	39	78	x	78	39	26	39	78	13	78	39	26
16	26	78	78	26	78	78	26	78	78	26	78	78	26	78	78	x	78	78	26	78	78	26	78	78
17	39	26	39	78	13	78	39	26	39	78	13	78	39	26	39	78	x	78	39	26	39	78	13	78
18	78	78	26	78	78	26	78	78	26	78	78	26	78	78	26	78	78	x	78	78	26	78	78	26
19	13	78	39	26	39	78	13	78	39	26	39	78	13	78	39	26	39	78	x	78	39	26	39	78
20	78	26	78	78	26	78	78	26	78	78	26	78	78	26	78	78	26	78	78	x	78	78	26	78
21	39	78	13	78	39	26	39	78	13	78	39	26	39	78	13	78	39	26	39	78	x	78	39	26
22	26	78	78	26	78	78	26	78	78	26	78	78	26	78	78	26	78	78	26	78	78	x	78	78
23	39	26	39	78	13	78	39	26	39	78	13	78	39	26	39	78	13	78	39	26	39	78	x	78
24	78	78	26	78	78	26	78	78	26	78	78	26	78	78	26	78	78	26	78	78	26	78	78	x

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
1	x	78	39	26	39	78	13	78	39	26	39	78	13	78	39	26	39	78	13	78	39	26	39	78
2	78	x	78	78	26	78	78	26	78	78	26	78	78	26	78	78	26	78	78	26	78	78	26	78
3	39	78	x	78	39	26	39	78	13	78	39	26	39	78	13	78	39	26	39	78	13	78	39	26
4	26	78	78	x	78	78	26	78	78	26	78	78	26	78	78	26	78	78	26	78	78	26	78	78
5	39	26	39	78	x	78	39	26	39	78	13	78	39	26	39	78	13	78	39	26	39	78	13	78
6	78	78	26	78	78	x	78	78	26	78	78	26	78	78	26	78	78	26	78	78	26	78	78	26
7	13	78	39	52	39	78	x	78	39	26	39	78	13	78	39	26	39	78	13	78	39	26	39	78
8	78	26	78	78	26	78	78	x	78	78	26	78	78	26	78	78	26	78	78	26	78	78	26	78
9	39	78	13	78	39	26	39	78	x	78	39	26	39	78	13	78	39	26	39	78	13	78	39	26
10	26	78	78	26	78	78	26	78	78	x	78	78	26	78	78	26	78	78	26	78	78	26	78	78
11	39	26	39	78	13	78	78	26	39	78	x	78	39	26	39	78	13	78	39	26	39	78	13	78
12	78	78	26	78	78	26	78	78	26	78	78	x	78	78	26	78	78	26	78	78	26	78	78	26
13	13	78	39	26	39	78	13	78	39	26	39	78	x	78	39	26	39	78	13	78	39	26	39	78
14	78	26	78	78	26	78	78	26	78	78	26	78	78	x	78	78	26	78	78	26	78	78	26	78
15	78	78	26	78	39	26	39	78	13	78	39	26	39	78	x	78	39	26	39	78	13	78	39	26
16	26	78	78	26	78	78	26	78	78	26	78	78	26	78	78	x	78	78	52	78	78	26	78	78
17	39	26	39	78	13	78	39	26	39	78	13	78	39	26	39	78	x	78	39	26	39	78	13	78
18	78	78	26	78	78	26	78	78	26	78	78	26	78	78	26	78	78	x	78	78	26	78	78	26
19	13	78	39	26	39	78	13	78	39	26	39	78	13	78	39	26	39	78	x	78	39	26	39	78
20	78	26	78	78	26	78	78	26	78	78	26	78	78	26	78	78	26	78	78	x	156	156	26	78
21	39	78	13	78	39	26	78	78	13	78	39	26	39	78	13	78	39	26	39	78	x	78	39	26
22	26	78	78	26	78	78	26	78	78	26	78	78	26	78	78	26	78	78	26	78	78	x	78	78
23	39	26	39	78	13	78	39	26	39	78	13	78	39	26	39	78	13	78	39	26	39	78	x	78
24	78	78	26	78	78	26	78	78	26	78	78	26	78	78	26	78	78	26	78	78	26	78	78	x

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	
1	x	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	x	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3	1	1	x	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
4	1	1	1	x	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
5	1	1	1	1	x	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
6	1	1	1	1	1	x	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
7	1	1	1	2	1	1	x	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
8	1	1	1	1	1	1	1	x	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
9	1	1	1	1	1	1	1	1	x	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
10	1	1	1	1	1	1	1	1	1	x	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
11	1	1	1	1	1	1	2	1	1	1	x	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
12	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	x	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
13	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	x	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
14	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	x	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
15	2	1	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	x	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
16	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	x	1	1	2	1	1	1	1	1	1
17	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	x	1	1	1	1	1	1	1	1
18	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	x	1	1	1	1	1	1	1
19	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	x	1	1	1	1	1	1
20	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	x	2	2	1	1	1
21	1	1	1	1	1	1	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	x	1	1	1	1
22	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	x	1	1	1
23	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	x	1
24	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	x

Sebbene anche su questo grafo nella maggioranza dei casi il periodo calcolato sulle ricorrenti e quello calcolato numericamente coincidano ($m = 1$) come mostrano le precedenti simulazioni vi sono configurazioni in cui $m = 2$. Il periodo dipende quindi dalla configurazione iniziale sebbene rispetti il vincolo di essere un multiplo di quello calcolato sulle ricorrenti.

Le simulazioni seguenti sono costruite secondo tale semplice criterio: fissati lunghezza N , sorgente i e pozzo j vengono costruite delle configurazioni iniziali casuali, tali configurazioni vengono fatte evolvere. Il periodo della dinamica $a_i a_j^\dagger$ viene misurato come nei capitoli precedenti. In queste simulazioni viene continuamente ripetuta la stessa identica dinamica con configurazioni iniziali variare e si calcola ogni volta il periodo al fine di verificare che rimanga invariato.

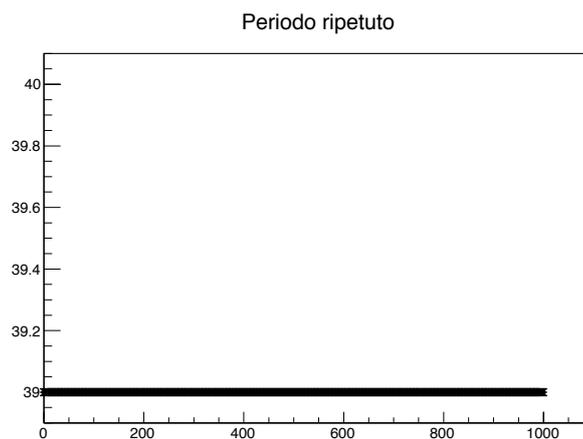


Figura 4.11: Reiterazione del calcolo del periodo con $N = 13$, $sor = 4$, $poz = 9$. Vediamo come in questo caso le attese sono state confermate e si ha periodo costante ed $m = 1$

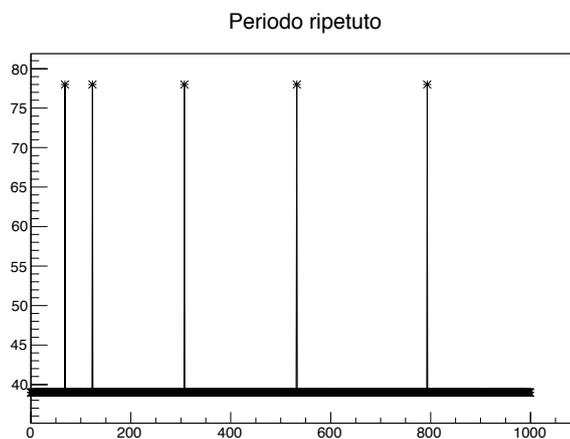


Figura 4.12: Reiterazione del calcolo del periodo con $N = 13$, $sor = 4$, $poz = 8$. Già in questo caso si rintracciano delle configurazioni che mostrano $m = 2$, anche se sufficientemente rare

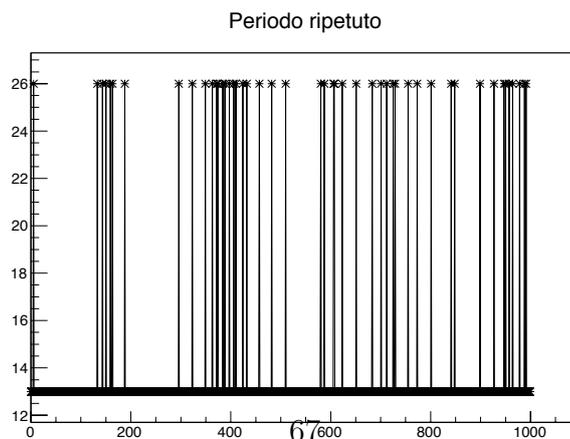


Figura 4.13: Reiterazione del calcolo del periodo con $N = 13$, $sor = 4$, $poz = 7$. In questo caso invece le configurazioni con $m = 2$ sono molto più frequenti del precedente.

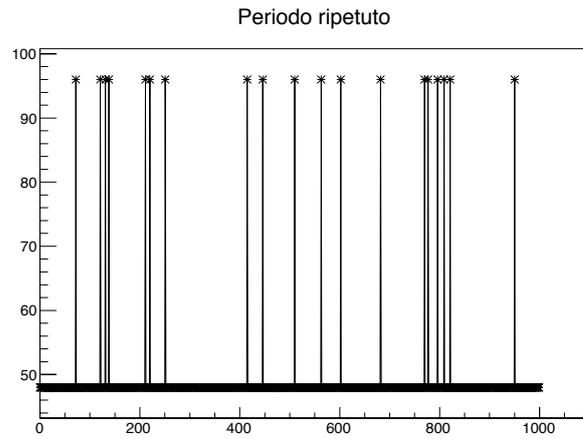


Figura 4.14: Reiterazione del calcolo del periodo con $N = 32$, $sor = 10$, $poz = 24$

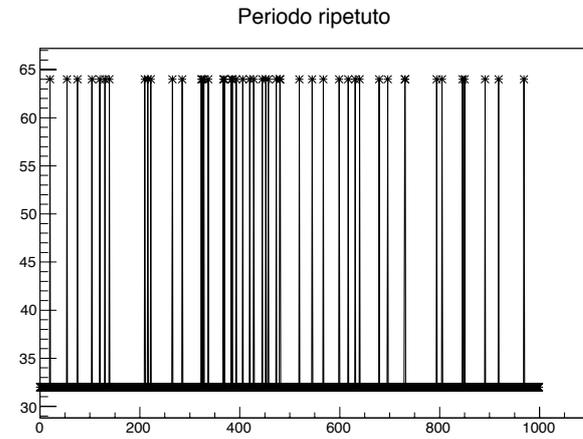


Figura 4.15: Reiterazione del calcolo del periodo con $N = 32$, $sor = 9$, $poz = 24$

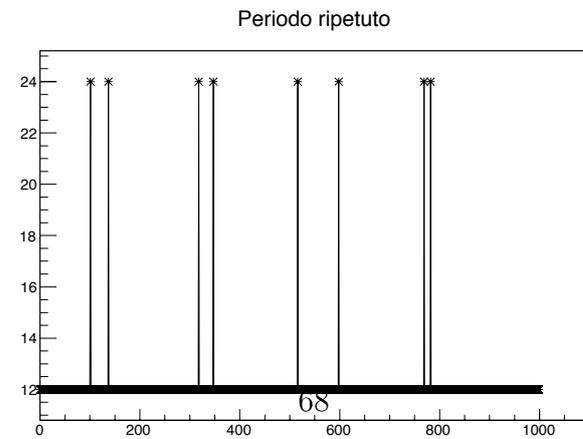


Figura 4.16: Reiterazione del calcolo del periodo con $N = 32$, $sor = 8$, $poz = 24$

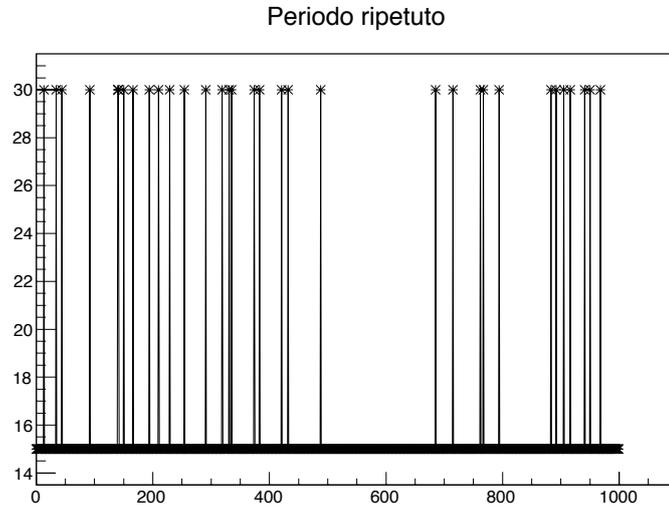


Figura 4.17: Reiterazione del calcolo del periodo con $N = 5$, $sor = 1$, $poz = 3$. Le configurazioni $m = 2$ si trovano anche in sistemi con relativamente pochi siti come in questo caso, cioè in sistemi relativamente semplici.

Osserviamo allora che il periodo dipende dalla configurazione iniziale in un largo range di lunghezze dei bracci $N = 5 - 32$. Vediamo inoltre come $m = 1, 2$ e non assuma in questo modello valori superiori. In fine osserviamo che la presenza di configurazioni $m = 2$ dipende fortemente dalla posizione di pozzo e sorgente come nel caso $N = 13$ ma anche in $N = 32$.

Conclusione

Riassumendo abbiamo mostrato un algoritmo che permette di calcolare esattamente il periodo sulla pila di sabbia abeliana, mentre su quella non abeliana permette di restringere il range dei periodi possibili ai multipli di quello calcolato. Il fattore moltiplicativo fra periodo reale e calcolato si é mostrato essere uguale a 1 su vari grafi semplici ma non su quelli piú complessi. In tutti i casi in cui possiamo fissare il fattore moltiplicativo il periodo non dipende dalla configurazione iniziale della pila.

Periodo di a_i su grafi di N punti

i) Catena lineare: $T_i = \frac{N+1}{\gcd(N+1,i)} \quad m = 1$

Periodo di $a_i a_j^\dagger$ su grafi di N punti

i) Catena lineare: $T_{ij} = \frac{N+1}{\gcd(N+1,i-j)} \quad m = 1$

ii) Catena circolare: $T_{ij} = \frac{N}{\gcd(N,i-j)} \quad m = 1$

iii) Grafo completo: $T_{ij} = N \quad m = 1$

iv) Tetoide (tre bracci lunghi N) $T_{ij} = \frac{3N}{\gcd(3N,j+2i,j-i)} \quad m = 1, 2$

Bibliografia

- [1] Bak Tang Wiesenfeld, *Self-Organized criticality: an explanation of 1/f noise*, Physical review letters, 1987.
- [2] Deepak Dhar, *Self-organized critical state of sandpile automaton models*, Physical review letters, 1990.
- [3] Serge Lang, *Algebra lineare*, Bollati Boringhieri, 1970.
- [4] Guglielmo Paoletti, *Abelian sandpile models and sampling of trees and forests*, UNIMI, 2007.
- [5] Olle Häggström, *Finite Markov Chains and Algorithmic Applications*, Cambridge University press, 2002.
- [6] Lee Tzeng, *Hidden conservation law for sandpile model*, Physical review letters, 1990.
- [7] Dhar Ruelle Sen Verma, *Algebraic aspects of abelian sandpile models*, PACS 05.40+j .
- [8] Jacobson, *Basic algebra*, Freeman and Company, 1974.
- [9] Ruelle Sen, *A 25*, Journal of physics, 1992.
- [10] Ali Dhar, *E 51*, Physics review, 1995.
- [11] Caracciolo Sportiello Paoletti, *Multiple and inverse topplings in the ASM*, submitted to EPJ-ST, 2011.
- [12] Liu, *Sandpile and Anti-sandpile models*, Universiteit Leiden, 2006.